

时变泊松比 HTPB 固体推进剂体积和 剪切松弛模量反演 *

白 凡^{1,2}, 杨新华³, 曾国伟^{1,2}

- (1. 武汉科技大学 理学院, 湖北 武汉 430065;
2. 冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430081;
3. 华中科技大学 航天航空学院, 湖北 武汉 430074)

摘 要: 为表征 HTPB 复合固体推进剂泊松比的时间相关性, 以经典积分型粘弹性本构模型为基础, 开展了从单轴受力响应到体积和剪切松弛模量反演问题研究。运用径向基配置法和带近似奇异核的高斯求积公式求解反演问题的第二类 Volterra 积分方程。将获得的体积和剪切松弛模量导入 Abaqus 有限元软件并开展材料力学行为仿真。将有限元结果与单轴松弛、蠕变和等速率加载实验数据进行对比, 验证反演方法的正确性。分析了粘弹性泊松比 Prony 级数参数对相对松弛模量的影响规律。结果表明, 当泊松比与时间相关时, 相对体积和剪切松弛模量曲线出现分离, 其分离程度受长期与瞬时泊松比之差的影响, 而分离快慢受泊松比迟滞时间影响。采用正确的体积和剪切松弛模量, 经典粘弹性本构模型不仅能合理预测 HTPB 固体推进剂松弛和蠕变等粘弹性行为, 还能正确反映泊松比的时间相关性。

关键词: 粘弹性泊松比; 松弛模量; Prony 级数; Volterra 积分方程; HTPB 固体推进剂

中图分类号: V512.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-4055 (2023) 01-210871-07

DOI: 10.13675/j.cnki. tjjs. 210871

Inversion Method of Bulk and Shear Relaxation Moduli for HTPB Solid Propellant with Time-Dependent Poisson's Ratio

BAI Fan^{1,2}, YANG Xin-hua³, ZENG Guo-wei^{1,2}

- (1. School of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China;
2. Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process, Wuhan 430081, China;
3. School of Aerospace Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: In order to represent time-dependent Poisson's ratio of HTPB composite solid propellant, the inversion problem about determination of bulk and shear relaxation moduli from the uniaxial stress versus strain responses was studied based on the classical integral viscoelastic constitutive model. The collocation method with radial basis functions, as well as Gauss quadrature formulas for approximately singular kernels, was applied for solving the second-kind Volterra integral equations of the inversion problem. The obtained bulk and shear relaxation moduli were imported into Abaqus finite element software to simulate the mechanical behavior of HTPB propellant. The proposed inversion method was validated by comparing the finite element results with the results from

* 收稿日期: 2021-12-14; 修订日期: 2022-03-03。

基金项目: 国家自然科学基金 (11832013); 湖北省自然科学基金 (2020CFB128); 湖北省教育厅科研计划 (D20211108)。

作者简介: 白 凡, 博士, 高级工程师, 研究领域为粘弹塑性力学。

通讯作者: 杨新华, 博士, 教授, 研究领域为材料和结构失效行为及多尺度计算方法。E-mail: yangxinh@hust.edu.cn

引用格式: 白 凡, 杨新华, 曾国伟. 时变泊松比 HTPB 固体推进剂体积和剪切松弛模量反演[J]. 推进技术, 2023, 44(1): 210871. (BAI Fan, YANG Xin-hua, ZENG Guo-wei. Inversion Method of Bulk and Shear Relaxation Moduli for HTPB Solid Propellant with Time-Dependent Poisson's Ratio[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2023, 44(1):210871.)

uniaxial relaxation, creep, and constant-rate loading tests. Finally, parameter analyses were conducted to find out how the Prony series of viscoelastic Poisson's ratio affects the relative relaxation moduli. The results show that, the curves of the relative bulk and shear relaxation moduli are separated when Poisson's ratio is time dependent. The separation degree is affected by the difference between the long-term and instantaneous Poisson's ratios, while the separation slope by the retarded time. With the correct volume and shear relaxation moduli, the classical viscoelastic constitutive model can reasonably predict not only the relaxation and creep behaviors of HTPB propellant, but also the time dependency of Poisson's ratio.

Key words: Viscoelastic Poisson's ratio; Relaxation modulus; Prony series; Volterra integration equation; HTPB propellant

1 引言

泊松比是描述材料在轴向载荷作用下横向变形行为的重要参数。实验研究表明,许多粘弹性材料,如固体推进剂^[1]、沥青混合料^[2]和页岩^[3]等,其泊松比会随时间变化。如果忽略了粘弹性材料泊松比的时间相关性,将会导致结构应力和应变计算结果出现明显误差^[4-5]。因此,在固体发动机装药结构完整性分析中,正确描述推进剂泊松比的时间相关性是非常有必要的。

当泊松比与时间相关时,一般将其称为粘弹性泊松比。不过,至今关于粘弹性泊松比定义仍未统一^[2,6]。常见的有:(1)在单轴受力实验中,将试件横向与轴向应变比值的绝对值定义为泊松比^[7-8];(2)用遗传积分式描述轴向和横向应变关系,并将积分核函数定义为泊松比^[3,9];(3)基于弹性-粘弹性对应原理,采用体积和剪切松弛模量的 Laplace 变换定义泊松比^[2,10]。其中,第一种定义以单轴受力响应为基础,便于测量,但是与加载历史相关^[2];第二、三种定义在理论上只与材料性能相关,但是较难获得泊松比在时域上的显式表达式。

为了反映固体推进剂泊松比的时间相关性,崔辉如等^[5,11]和邓斌等^[12]基于弹性-粘弹性对应原理,建立了以粘弹性泊松比和单轴蠕变柔量(或单轴松弛模量)为基本参量的粘弹性本构模型。这些基本参量能直接用单轴实验测得,但是将模型用于仿真分析时,需要编写特定的用户材料子程序^[11-12]。这是因为现有商业有限元软件一般仅提供以体积和剪切松弛模量为基本参量的经典粘弹性本构模型^[13]。另外,由于粘弹性泊松比的定义未统一,以泊松比为基础参量容易引起混淆。

如果能采用经典粘弹性本构模型正确描述泊松比时间相关性,便可直接利用现有商业有限元软件开展仿真分析,也能避免粘弹性泊松比的使用。不

过,直接测量体积和剪切松弛模量一般需要特殊的实验装置^[14]。如何利用材料单轴实验,获得反映泊松比时间相关性的体积和剪切松弛模量是问题关键。

本文以 HTPB 复合固体推进剂为研究对象,建立从单轴受力响应到体积和剪切松弛模量反演问题的 Volterra 积分方程,并提出求解该积分方程的有效数值方法。以现有单轴松弛实验数据为基础,通过反演问题求解,获得经典粘弹性本构模型的基本参量。在此基础上,运用 Abaqus 有限元软件开展材料力学行为仿真。通过对比仿真结果和单轴松弛、蠕变、等速率加载实验数据,验证反演方法的正确性。最后分析了粘弹性泊松比参数对相对松弛模量的影响规律。

2 方法

2.1 经典积分型粘弹性本构模型

Abaqus, Ansys 和 MSC 等商业有限元软件一般提供如下经典积分型粘弹性本构模型。

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \int_0^t K(t-t') \frac{d\phi(t')}{dt'} dt' + \int_0^t 2G(t-t') \frac{de_{ij}(t')}{dt'} dt' \quad (1)$$

式中 σ_{ij} 为应力张量, δ_{ij} 为 Kronecker delta 张量, K 和 G 分别为体积和剪切松弛模量, e_{ij} 和 ϕ 分别为偏应变张量和体应变^[13]。

2.2 粘弹性泊松比与松弛模量关系

在单轴松弛实验中,定义粘弹性泊松比 μ 和单轴松弛模量 E 分别为

$$\mu(t) = -\frac{\varepsilon_y(t)}{\varepsilon_x} \quad (2)$$

$$E(t) = \frac{\sigma_x(t)}{\varepsilon_x} \quad (3)$$

式中 ε_x 为轴向常应变, ε_y 为横向应变, σ_x 为轴向正应力。

材料参量 μ, E, K 和 G 均可用如下 Prony 级数表示

$$P(t) = P_0 + \sum_{i=1}^N P_i (e^{-t/\tau_i^P} - 1) \quad (4)$$

式中 P_0 为瞬时参数, τ_i^P 为第 i 项迟滞时间。

为了区分,具体运用时,将上式字母“ P ”替换为材料参量对应字母。如 μ_0, K_0 和 G_0 分别表示瞬时泊松比、瞬时体积和剪切模量。

由式(1)~(3)可推导出材料参量满足如下第二类 Volterra 积分方程

$$M(t) = \frac{E(t)}{3\chi(0)} - \int_0^t M(s) \frac{\chi'(t-s)}{\chi(0)} ds \quad (5)$$

式中 M 和 χ 代表不同的时间相关参量。

当 $M(t) = K(t)$ 时, $\chi(t) = 1 - 2\mu(t)$ 。

当 $M(t) = G(t)$ 时, $\chi(t) = 2[1 + \mu(t)]/3$ 。

定义相对体积和剪切松弛模量分别为

$$k(t) = K(t)/K_0 \quad (6)$$

$$g(t) = G(t)/G_0 \quad (7)$$

由式(5)可知,当泊松比 μ 为常数时,相对体积和剪切松弛模量曲线重合,即

$$k(t) = g(t) = E(t)/E_0 \quad (8)$$

在式(5)中令 $t = 0$,可得

$$K_0 = \frac{E_0}{3(1 - 2\mu_0)} \quad (9)$$

$$G_0 = \frac{E_0}{2(1 + \mu_0)} \quad (10)$$

2.3 Volterra 积分方程的径向基配置法

当材料泊松比与时间无关时,体积和剪切松弛模量可直接由式(6)~(10)求出;当泊松比与时间相关时,则需要求解积分方程式(5)。本文采用径向基配置法^[15-16]求解该积分方程。该方法优点是,即使求解域很宽,也能保证较好的全局收敛性。其基本思想是用如下径向基序列近似待求函数。

$$M(t) \approx \sum_{j=0}^n w_j \phi_j(t) \quad (11)$$

式中 w_j 为待定系数, $\phi_j(t)$ 为径向基函数。

常用基函数有:光滑样条径向基、Gaussian 径向基、Multiquadric 径向基(MQ)和反 Multiquadric 径向基(IMQ)等^[15]。本文采用 IMQ,即

$$\phi_j(t) = \frac{1}{\sqrt{(t - t_j)^2 + \theta_j^2}} \quad (12)$$

式中 t_j 为基函数中心点, θ_j 为形状参数。

θ_j 可根据 t_j 与相邻中心点的最小距离 d_j 确定

$$\theta_j = \beta d_j \quad (13)$$

式中 β 为大于零的常数。对于特定问题,选取合适的

β 可以获得较好的求解精度^[17-18]。

在求解域 $[0, T]$ 内均匀布置 $n + 1$ 个节点($t_j = (jT)/n, j = 0, 1, \dots, n$)作为径向基 $\phi_j(t)$ 的中心点,并将式(11)和粘弹性泊松比 Prony 级数代入式(5)可得

$$\sum_{j=0}^n w_j \left[\phi_j(t) - \sum_{i=1}^N m_i \int_0^t \phi_j(s) \Gamma_i(t-s) ds \right] = \frac{E(t)}{3\chi(0)} \quad (14)$$

式(14)中系数 m_i 定义为

当 $M(t) = K(t)$ 时, $m_i = 2\mu_i/(2\mu_0 - 1)$

当 $M(t) = G(t)$ 时, $m_i = \mu_i/(\mu_0 + 1)$

核函数 $\Gamma_i(t)$ 定义为

$$\Gamma_i(t) = e^{-t/\tau_i^\mu} / \tau_i^\mu \quad (15)$$

在式(14)中分别令 $t = t_l (l = 0, 1, \dots, n)$,便可将积分方程转化为关于待定系数 w_j 的 $n + 1$ 阶线性代数方程组,进而实现积分方程近似求解。

2.4 含近似奇异核的高斯求积公式

保证径向基配置法数值精度的关键之一是确保式(14)的积分计算精度。一般可采用分段高斯求积方法。注意到式(15)有如下性质。

$$\tau_i^\mu \rightarrow 0: \Gamma_i(0) \rightarrow \infty \quad (16)$$

所以当 τ_i^μ 较小时,积分核函数 Γ_i 为近似奇异核。

为提高积分计算精度,采用如下带权高斯求积

公式

$$\int_a^b \phi_j(s) \Gamma_i(t-s) ds = \alpha e^{-\beta} \int_{-1}^1 \psi_j(z) e^{-\alpha z} dz = \alpha e^{-\beta} (\gamma_1 \psi_j(\xi_1) + \gamma_2 \psi_j(\xi_2)) \quad (17)$$

其中

$$\alpha = (b - a)/(2\tau_i^\mu) \quad (18)$$

$$\beta = (2t - b - a)/(2\tau_i^\mu) \quad (19)$$

$$\psi_j(z) = \phi_j(t - \tau_i^\mu(\alpha z + \beta)) \quad (20)$$

高斯点 ξ_1 和 ξ_2 为如下二次方程的两个实根

$$\xi^2 - \frac{q_1 q_2 - q_0 q_3}{q_1^2 - q_2 q_0} \xi - \frac{q_3 q_1 - q_2^2}{q_1^2 - q_2 q_0} = 0 \quad (21)$$

$$q_0 = (e^{2\alpha} - 1)/(\alpha e^\alpha) \quad (22)$$

$$q_1 = [(1 - \alpha)e^{2\alpha} - (1 + \alpha)]/(\alpha^2 e^\alpha) \quad (23)$$

$$q_2 = [(2 - 2\alpha + \alpha^2)e^{2\alpha} - (2 + 2\alpha + \alpha^2)]/(\alpha^3 e^\alpha) \quad (24)$$

$q_3 =$

$$[(6 - 6\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3)e^{2\alpha} - (6 + 6\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3)]/(\alpha^4 e^\alpha) \quad (25)$$

求积系数 γ_1 和 γ_2 分别为

$$\gamma_1 = \frac{(q_0 \xi_2 - q_1)}{\xi_2 - \xi_1}$$

$$\gamma_2 = \frac{(q_1 - q_0 \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \quad (26)$$

2.5 有限元模型

将反演得到的基本参量 K 和 G ,导入 Abaqus 有限元软件,并建立固体推进剂圆柱体试件的有限元模型,如图 1 所示。通过开展单轴蠕变、松弛和等速率加载实验仿真,验证反演方法的正确性,并探讨粘弹性泊松比对相对松弛模量的影响规律。有限元模型采用隐式 Visco 求解步和 8 节点线性六面体单元。对模型底面施加轴向和刚体位移约束,通过顶面的耦合节点施加位移或者力载荷。根据力、轴向和横向位移等计算结果,可以获得材料轴向应力、轴向应变和横向应变之间关系。

需要指出的是,采用圆柱体有限元模型是为了简化建模和后处理过程。实际上,为了方便试验机夹持,实际固体推进剂单轴拉伸试验一般采用哑铃状试件,并通过引伸计^[18]、应变片^[7]或数字图像相关方法(DICM)^[9]等技术,测量试件中间段变形大小。该段的受力状态与圆柱体有限元模型相同,均为应变均匀分布的单轴应力状态,反映了材料单轴力学性能。

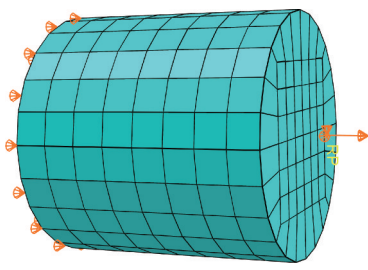


Fig. 1 Finite element model of solid propellant

3 结果与讨论

3.1 固体推进剂体积和剪切松弛模量

Cui 等^[9,11]针对 HTPB 推进剂开展了一系列不同温度 and 不同老化程度的单轴松弛实验,并采用 DICM 测量轴向和横向应变,从而获得材料单轴参量 μ 和 E 。根据其实验结果,提取推进剂在无老化和 25℃条件下 μ, E 数据^[11],如图 2 所示。可见,HTPB 推进剂泊松比随时间逐渐增加,这说明在单轴松弛实验中,推进剂横向变形会滞后于轴向变形。如果松弛时间继续增加,HTPB 推进剂泊松比将逐渐趋于 0.5^[9,11]。然而,在 150s 的短期松弛时间内,HTPB 推进剂泊松比随时间变化较快,并且明显小于 0.5,因此不能将其视为常数或将推进剂简化为不可压缩材料。

用 Prony 级数拟合图 2 数据,并将拟合结果代入式(14),运用径向基配置法反演得到体积和剪切松

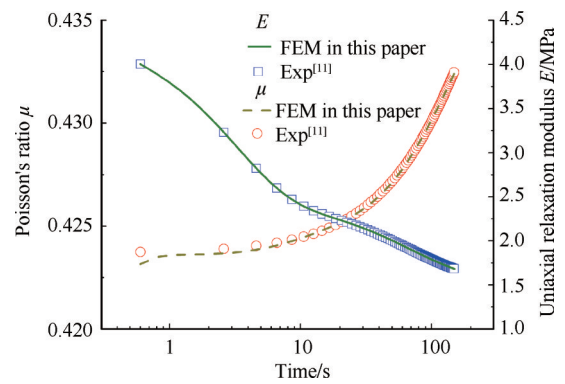


Fig. 2 Poisson's ratio and uniaxial relaxation modulus of unaged HTPB propellant at 25℃

弛模量 K 和 G 。反演结果如图 3 所示,获得的松弛模量 Prony 级数参数列于表 1。可以看出,当材料泊松比与时间相关时,相对体积和剪切松弛模量曲线出现分离,即式(8)不成立。由于粘弹性泊松比随时间增加,所以相对体积松弛模量大于相对剪切松弛模量。另外,反演结果表明: $g(t) \approx E(t)/E_0$ 。

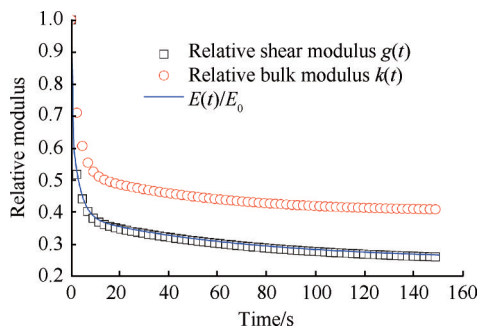


Fig. 3 Relative bulk and shear relaxation moduli for unaged HTPB propellant at 25℃

Table 1 Prony series of bulk and shear relaxation moduli for unaged HTPB propellant at 25℃

i	0	1	2	3	4
τ_i^K/s	—	0.10	3.03	44.43	998.4
K_i/MPa	10.29	0.787	4.075	1.140	0.973
τ_i^G/s	—	0.13	3.09	57.50	728.1
G_i/MPa	2.26	0.743	0.652	0.253	0.235

3.2 方法验证

(1)与单轴松弛实验对比。将表 1 的松弛模量参数导入 Abaqus 软件,运用经典积分型粘弹性本构模型开展单轴松弛实验仿真,反算材料的单轴松弛模量和粘弹性泊松比,结果如图 2 所示。可见,有限元计算结果与实验数据基本吻合。这说明通过径向基配置法反演得到的体积和剪切松弛模量是正确的。这也说明,只要采用正确的体积和剪切松弛模量,经

典积分型粘弹性本构模型也能合理描述泊松比的时间相关性。

(2)与单轴蠕变实验对比。Cui 等^[19]基于时间-温度等效原理,通过实验确定了 HTPB 推进剂单轴蠕变柔量与温度关系模型。曹翌军等^[20]针对 HTPB 推进剂开展了一系列不同温度和应力条件下的单轴蠕变实验。考虑到在小应力条件下材料非线性可以忽略,将上述文献的小应力蠕变实验结果,通过时间-温度等效原理^[19-20],转化为 25℃ 条件下的材料单轴蠕变柔量 $J(t)$,并与本文仿真结果对比,从而进一步验证本文所获体积和剪切松弛模量的合理性,如图 4 所示。由于不同研究者的实验条件和试件可能存在一定差异,三条曲线存在一定偏差。仿真结果与两条实验曲线最大误差不超过 20%,并且它们均满足蠕变速率随时间逐渐减小的变化趋势。

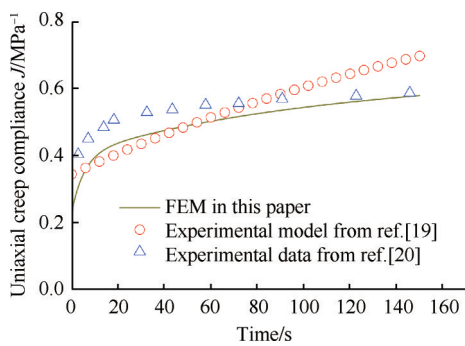


Fig. 4 Uniaxial creep compliance for unaged HTPB propellant at 25℃

(3)与单轴等速率加载实验对比。Cui 等^[19]针对哑铃状 HTPB 推进剂试件,在 25℃ 条件下开展了三种加载速率($v_1=1.68\text{mm/s}$, $v_2=3.36\text{mm/s}$, $v_3=5.04\text{mm/s}$)的单轴拉伸实验,并采用 DICM 技术测得了轴向应力和横向应变历史,如图 5 所示。由于轴向应变历史无法根据实验条件直接求出,因此以轴向应力历史为输入,通过有限元模型,预测横向应变历史,并与实验结果对比。从图 5 可见,两者基本吻合。

综上,基于体积和剪切松弛模量的经典积分型粘弹性本构模型不仅能合理预测 HTPB 推进剂单轴松弛、蠕变和等速率加载等粘弹性行为,还能正确描述泊松比的时间相关性。

3.3 粘弹性泊松比对相对松弛模量影响规律

为进一步揭示泊松比时间相关性对松弛模量的影响规律,利用如下单项 Prony 级数描述泊松比,并开展参数分析。

$$\mu(t) = \mu_0 - \Delta\mu(e^{-t/\tau^\mu} - 1)$$

(27)

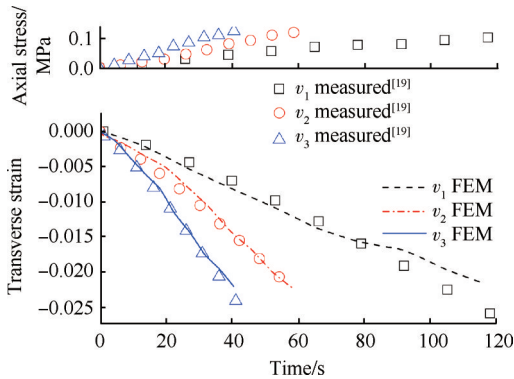


Fig. 5 Axial stress and transverse strain in the uniaxial constant-rate loading tests of unaged HTPB propellant at 25℃

由式(27)易知:长期泊松比 $\mu_\infty = \mu_0 + \Delta\mu$,而 $\Delta\mu$ 表示长期泊松比与瞬时泊松比的差值。

保持 $\mu_0 = 0.4$ 和 $\tau^\mu = 100\text{s}$ 不变,改变 $\Delta\mu$ 的值。图 6(a)和图 6(b)分别给出了不同 $\Delta\mu$ 对应的 $k(t)$ 和 $g(t)$ 与 $E(t)/E_0$ 的差值。可以看出,随着 $\Delta\mu$ 增加,其差值绝对值均增加。相对体积松弛模量 $k(t)$ 与 $E(t)/E_0$ 的差值为正,其大小不可忽略;相对剪切松弛模量 $g(t)$ 与 $E(t)/E_0$ 的差值为负,且绝对值较小,可以忽略不计。

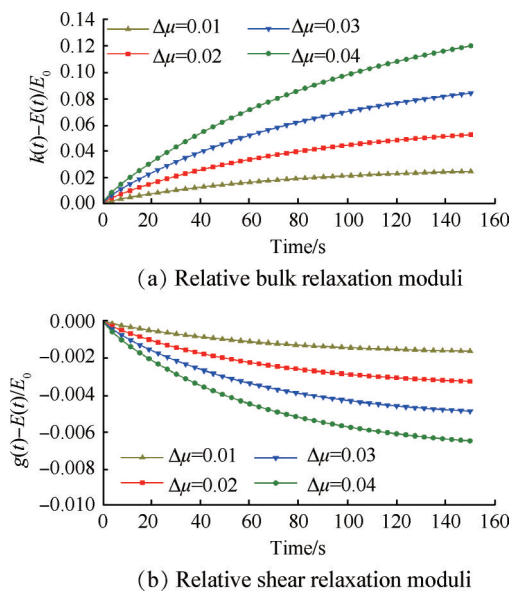


Fig. 6 Influence of the Poisson's ratio parameter $\Delta\mu$ when $\mu_0 = 0.4$ and $\tau^\mu = 100\text{s}$

保持 $\Delta\mu = 0.02$ 和 $\tau^\mu = 100\text{s}$ 不变,改变 μ_0 的值。此时,虽然长期泊松比与瞬时泊松比的差值不变,但增加 μ_0 会导致平均泊松比增加。图 7(a)和图 7(b)分别给出了不同 μ_0 对应的 $k(t)$ 和 $g(t)$ 与 $E(t)/E_0$ 的差值。可以看出,随着 μ_0 增加,相对体积松弛模量 $k(t)$

与 $E(t)/E_0$ 的差值加速增加;而相对剪切松弛模量 $g(t)$ 与 $E(t)/E_0$ 的差值绝对值缓慢减小。

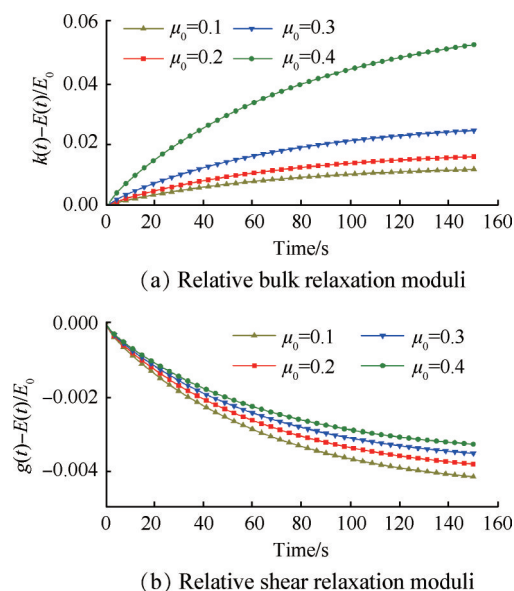


Fig. 7 Influence of the instantaneous Poisson's ratio μ_0 when $\Delta\mu = 0.02$ and $\tau^\mu = 100\text{s}$

图8给出了当 $\mu_0 = 0.4$ 和 $\Delta\mu = 0.02$ 时,不同 τ^μ 对应的差值 $k(t) - g(t)$ 。可以看出,当粘弹性泊松比迟滞时间较短时,其差值首先快速增加,后缓慢减小。随着粘弹性泊松比迟滞时间的增加,差值峰值降低,峰值出现时间延迟。可以说,泊松比迟滞时间决定了相对体积和剪切松弛模量曲线的分离速度。

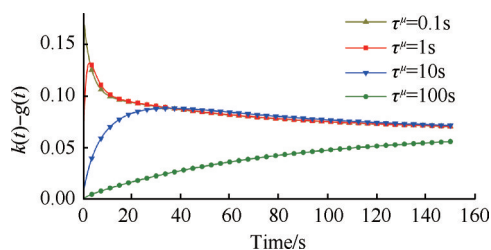


Fig. 8 Influence of the retarded time τ^μ when $\mu_0 = 0.4$ and $\Delta\mu = 0.02\text{s}$

4 结 论

本文对 HTPB 固体推进剂泊松比的时间相关性和粘弹性本构模型开展研究,提出了从单轴受力响应反演到体积和剪切松弛模量的方法,得到如下结论:

(1)在处理固体推进剂泊松比时间相关性时,现有方法多以粘弹性泊松比为基础参量建立新的粘弹性本构模型,仿真运用时一般需要编写用户材料子

程序。实际上,通过经典积分型粘弹性本构模型也能较好地描述固体推进剂泊松比的时间相关性,前提是能够准确获取材料的剪切和体积松弛模量。

(2)通过单轴松弛实验结果,即粘弹性泊松比和单轴松弛模量,反演体积和剪切松弛模量,需要求解第二类 Volterra 积分方程。结合径向基配置法和含近似奇异核的高斯求积公式,能够获得较精确的反演结果。由此方法确定的经典积分型粘弹性本构模型,能够合理预测 HTPB 固体推进剂在小应力条件下的单轴松弛、蠕变和等速率加载等粘弹性行为。

(3)当泊松比与时间无关时,相对体积和剪切松弛模量曲线重合;反之,两者会分离。长期泊松比与瞬时泊松比的差值越大,或者两者平均值越大,曲线分离越明显;泊松比迟滞时间越小,曲线分离越快。泊松比时间相关性对剪切松弛模量的影响较小,对体积松弛模量的影响较大。

由于经典积分型粘弹性本构模型为线性模型,因此只适用于固体推进剂在小应力条件下的线性粘弹性行为。在高应力水平下,材料往往表现出明显的非线性,因此需要进一步在本构模型中引入与应力或应变相关的非线性参数,才能准确预测材料力学行为。另外,本文仅针对 HTPB 固体推进剂开展研究,所提方法是否适用于其它类型固体推进剂,还需要进一步通过实验验证。

致 谢:感谢国家自然科学基金、湖北省自然科学基金、湖北省教育厅科研计划的资助。

参考文献

- [1] Pan B, Yu L, Yan J, et al. Determination of Viscoelastic Poisson's Ratio of Solid Propellants Using an Accuracy-Enhanced 2D Digital Image Correlation Technique [J]. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 2015, 40 (6): 821-830.
- [2] Kassem E, Grasley Z C, Masad E. Viscoelastic Poisson's Ratio of Asphalt Mixture [J]. *International Journal of Geomechanics*, 2013, 13(2): 162-169.
- [3] Trzeciak M, Sone H, Dabrowski M. Long-Term Creep Tests and Viscoelastic Constitutive Modeling of Lower Paleozoic Shales from the Baltic Basin, N Poland [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2018, 112: 139-157.
- [4] Keramat A, Kolahi A G, Ahmadi A. Waterhammer Modelling of Viscoelastic Pipes with a Time-Dependent Poisson's Ratio [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2013, 43: 164-178.
- [5] 崔辉如, 张 斌, 申志彬, 等. 考虑粘弹性泊松比的

- 固体推进剂蠕变型本构模型[J]. 固体火箭技术, 2019, 42(4): 447-450.
- [6] 赵伯华. 粘弹性泊松比与动态复数泊松比的研究[J]. 推进技术, 1995, 16(3): 1-7. (ZHAO Bo-hua. An Investigation on Viscoelastic Poisson's Ratio and Dynamic Complex Poisson's Ratio[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 1995, 16(3): 1-7.)
- [7] 郑 健, 张建彬, 周长省, 等. 蠕变试验下固体推进剂泊松比研究[J]. 南京理工大学学报, 2014, 38(5): 543-596.
- [8] Weber H, Wolf T, Dunger U. Determination of Relaxation Moduli and Poisson's Ratio in Uniaxially Loaded Solid Polyethylene Foam Specimens as Part of Full Material Characterization[J]. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 1997, 1: 195-208.
- [9] Cui H R, Tang G J, Shen Z B. Study on the Viscoelastic Poisson's Ratio of Solid Propellants Using Digital Image Correlation Method [J]. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 2016, 41(5): 835-843.
- [10] Alotta G, Barrera O, Cocks A C F, et al. On the Behavior of a Three-Dimensional Fractional Viscoelastic Constitutive Model[J]. *Meccanica*, 2017, 52: 2127-2142.
- [11] Cui H R, Shen Z B, Li H. A New Constitutive Equation for Solid Propellant with the Effects of Aging and Viscoelastic Poisson's Ratio[J]. *Meccanica*, 2018, 53: 2393-2410.
- [12] 邓 斌, 贺元吉, 赵宏伟, 等. 含能材料变泊松比粘弹性本构及其数值实现方法[J]. 固体火箭技术, 2019, 42(3): 290-296.
- [13] 杨挺青, 罗方波, 徐 平, 等. 黏弹性理论与应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.
- [14] 高 鸣. 计算固体推进剂粘弹性泊松比的一种新方法[J]. 推进技术, 1993, 14(2): 69-73. (GAO Ming. A New Method for Calculating the Viscoelastic Poisson Ratio for Solid Propellant[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 1993, 14(2): 69-73.)
- [15] Golbabai A, Seifollahi S. An Iterative Solution for the Second Kind Integral Equations Using Radial Basis Functions[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 181(2): 903-907.
- [16] Bai F, Yang X, Yin A, et al. Prediction Method of Long-Term Mechanical Behavior of Largely Deformed Sand Asphalt with Constant Loading Creep Tests [J]. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 2012, 138(12): 1457-1467.
- [17] 白 凡. 沥青混合料粘弹塑本构模型与长期蠕变行为的实验研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2014.
- [18] 李 东, 周长省, 鞠玉涛, 等. 双基固体推进剂药柱本构关系的实验研究[J]. 弹道学报, 2009, 21(2): 6-9.
- [19] Cui H R, Shen Z B. An Investigation on a New Creep Constitutive Model and Its Implementation with the Effects of Time- and Temperature-Dependent Poisson's ratio[J]. *Acta Mechanica*, 2018, 229: 4605 - 4621.
- [20] 曹翌军, 黄卫东, 李金飞. HTPB推进剂非线性粘弹特性的时温等效研究[J]. 推进技术, 2018, 39(7): 1643-1649. (GAO Yi-jun, HUANG Wei-dong, LI Jin-fei. Time-Temperature Equivalent Research of Nonlinear Viscoelastic Properties of HTPB Propellant[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2018, 39(7): 1643-1649.)

(编辑:朱立影)