

高精度电磁标定力数值模拟及实验研究*

冯孝辉^{1,2}, 洪延姬¹, 崔海超¹, 冯高平¹

(1. 航天工程大学 宇航科学与技术系 激光推进及其应用国家重点实验室, 北京 101416;
2. 航天东方红卫星有限公司, 北京 100094)

摘要: 高精度电磁标定力源是微推力测量系统的重要组成要素之一。为了获得性能优良的电磁标定力, 本文综合采用数值模拟及实验测量两种方法分析研究了线圈和永磁铁相对位置变化时, 磁铁几何尺寸对电磁力特性的影响: 对于直径较大、厚度较小的永磁铁而言, 其电磁力随相对位置的变化会存在极值, 且极值点附近的电磁力具有较好的稳定性和一致性。根据电磁力变化趋势特性, 提出了线圈和永磁铁相对基准中心(极值点)位置的高精度设置方案, 且基准中心位置附近的电磁力变异系数可达0.00252。最后, 确定了大直径永磁铁+线圈组合型电磁力产生装置, 并基于拟合方法建立了一定包络区间内的高精度电磁力控制关系式, 其拟合曲线的估计标准误差约为0.0137。

关键词: 微推力测量; 系统参数标定; 电磁恒力; 数值模拟; 实验研究

中图分类号: V439.4 文献标识码: A 文章编号: 1001-4055 (2022) 08-210806-14

DOI: 10.13675/j.cnki.tjjs.210806

Numerical Simulation and Experimental Methods for High Precision Electromagnetic Calibration Force

FENG Xiao-hui^{1,2}, HONG Yan-ji¹, CUI Hai-chao¹, FENG Gao-ping¹

(1. State Key Laboratory of Laser Propulsion & Application, Department of Aerospace Science and Technology, Space Engineering University, Beijing 101416, China;
2. DFH Satellite Co. Ltd, Beijing 100094, China)

Abstract: High precision electromagnetic calibration force source is one of the important components of micro-thrust measurement system. For obtaining the electromagnetic calibration force with excellent performance, numerical simulation and experimental research methods are used to analyse the influence of geometry sizes of the permanent magnet on the characteristics of electromagnetic force with the relative position of coil and magnet: For the magnet with larger diameter and smaller thickness, the electromagnetic forces have extreme value with the change of relative position, and the electromagnetic forces near the extreme point have high stability and consistency. In addition, according to the variation trend of electromagnetic force, a high-precision setting scheme of the fiducial position (the location of extreme point) of coil and permanent magnet is proposed. And the variation coefficient of electromagnetic force near the fiducial position is about 0.00252. Finally, the large-diameter magnet and coil combined electromagnetic force generation device is determined, and the high-precision electromagnetic force control relationship with a standard error of estimate 0.0137 is established based on the fitting method.

* 收稿日期: 2021-11-17; 修订日期: 2022-02-09。

作者简介: 冯孝辉, 硕士, 高级工程师, 研究领域为卫星综合测试。

通讯作者: 崔海超, 博士, 助理研究员, 研究领域为微推力测量。

引用格式: 冯孝辉, 洪延姬, 崔海超, 等. 高精度电磁标定力数值模拟及实验研究[J]. 推进技术, 2022, 43(8):210806. (FENG Xiao-hui, HONG Yan-ji, CUI Hai-chao, et al. Numerical Simulation and Experimental Methods for High Precision Electromagnetic Calibration Force[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2022, 43(8):210806.)

Key words: Micro-thrust measurement; System parameter calibration; Electromagnetic constant force; Numerical simulation; Experimental research

1 引言

微纳卫星因其具有微型化、轻质化、易编队、易回收、高性能、低成本、低能耗等众多优良特性^[1-2],已在深空探测、技术试验、侦查监视、空间攻防、地质勘探、遥感导航等科研、国防和商用领域起到了不可替代的作用^[3-5],并逐步成为未来卫星装备发展的焦点。微推进器是微纳卫星的核心子系统之一,其为微纳卫星的轨道控制、姿态调整以及非保守力补偿提供了所需的高精度、高稳定性微小推力^[6-9]。目前国内外所研制的推进器推力量级一般在 $\mu\text{N}\sim\text{mN}$ 量级,相比于传统的化学推进要小很多,而且对推力的控制精度要求较高。除此之外,对于大多数的微推进器而言,其所产生的推力无法通过建立准确的数学物理模型进行解析求解。因此,有必要开发、研制相应的测量方法和测量台架,通过实际测量来获得准确的推力参数,为推进器的性能参数评估和缩短研发周期提供必要的技术支持^[10-11]。

为了满足不同的推力测量要求,国内外学者成功研制出了天平型测量台架^[12-13]、单摆型测量台架^[14-15]、扭摆型测量台架^[16-19]以及弯振型测量台架^[20-21]等多种测量系统。其测量原理均是基于力的作用效果,通过确定振动系统的基本参数和测量振动部件的位移响应,然后根据动力学方程反演获得推力大小。其中,对振动系统基本参数的确定即为系统参数的标定,可以通过对测量台架施加恒定的标定力,根据获得的系统响应和动力学关系确定系统参数^[22]。因此,所施加标定力的精度直接影响系统参数的标定精度,进而影响测量系统的测量结果。标定力装置的可重复性、可操作性、可调节性、稳定性和精确性是保证微推力测量系统性能的关键技术之一,也是验证其测量水平的重要基础。

根据标定力的产生方式不同,可以将标定方法分为重力法^[23]、静电力法^[24-27]以及电磁力法^[28]等。重力法原理简单、操作简便,但往往会受到滑动摩擦、空气阻力以及绳线弹性伸缩和拖曳影响,并受限于重物最小质量,难以提供高精度微牛量级标定力。静电力法是通过改变两个通同性电压的极板距离来获得所需的标定力。该方法可以提供范围较宽的力源,但是其精度易受电极板间距的影响,且所需输入的电压较大,导致结构尺寸较大,使用不方便,而

且增加了测量台架的附加质量,降低了固有频率,缩短了测量带宽。电磁力法是利用载流导体在磁场中会受到磁场力作用的原理,来达到产生标定力的目的。常见的电磁力产生装置有线圈与圆柱体永磁体组合方式^[29-30]、通电导线与长方体磁铁对组合方式^[31-32]以及通电导线与马蹄形电磁铁^[33-34]组合方式。由于线圈与圆柱体永磁体组合结构简单、轻质、便于操作,且所产生的标定力具有连续可调、量程宽、高稳定性、可重复性等众多优点。此外,磁力标定力产生装置属于非接触式标定力源,便于远程操控,适合真空环境测量,目前已成为较为常用的微小标定力产生方式。

标定过程中,为了避免外部管线的拖曳影响,通常将永磁体与测量台架进行固连,而将线圈安装在位移台上,通过调节多轴位移台来确定两者的相对位置关系。随后,对线圈施加恒定的电流,根据安培定律和牛顿第三定律可知,永磁体所受的电磁力会导致测量台架发生振动,进而改变永磁体与线圈之间的相对位置(简称相对位置),引起线圈周围磁场的改变,导致电磁力具有时变特性。为了保证标定的精度,电磁力随相对位置的变化应该在一定的范围内,即所产生的电磁力需要具有较高的稳定性、重复性和一致性。在电流和线圈确定的条件下,电磁力的特性仅与永磁体所提供的磁场有关。因此,选择合适的永磁体对于高精度电磁力的产生具有至关重要的作用。目前,圆柱体钕铁硼磁铁因其性能最优、磁力最强,且磁场具有轴对称特性,而被广泛视为提供磁场的最佳选择^[29,34-36]。对于圆柱体钕铁硼而言,其磁场分布特性取决于其直径和厚度。

本文在介绍电磁力产生原理的基础上,通过数值模拟和实验验证两种方法,分别研究了相对位置改变情况下永磁体的直径和厚度对电磁力输出特性的影响,并依据电磁力特性变化规律确定了永磁体和线圈之间相对基准中心位置。最后,结合线性拟合方法给出了一定包络区间内电磁力和电流之间的控制率,获得了高性能电磁标定力源。

2 电磁力产生原理

电磁力由载流导体在磁场中所受的安培力提供。线圈由单根铜导线按一定方向缠绕 N 匝而成。假设线圈均匀,则有

$$NI = \int_A J_\varphi dA \quad (1)$$

式中 I 为电流大小; A 为线圈横截面面积; J_φ 是通过线圈横截面的电流密度, 其大小等于单位时间内通过某一单位面积的电流, 方向向量为单位面积相应横截面的法向量, 指向由电流的方向确定。

当永磁铁与线圈同轴放置时, 根据安培定律和左手法则可知, 线圈只会受到磁感应强度径向分量 B_r 所引起的轴向电磁力影响, 而轴向磁感应强度分量 B_z 所引起的径向电磁力矢量和为 0, 所以线圈所受的电磁力 F_e 为

$$F_e = \int_V J_\varphi B_r dV \quad (2)$$

式中 V 为线圈体积。

由于在实际应用中, 线圈所受的轴向电磁力是主体, 而径向电磁力一般很小(理论上只有在线圈和永磁铁非同轴时存在), 通过精密调节线圈与永磁铁之间的同轴度, 可以忽略其对标定力的影响, 因此, 下文只对轴向电磁力(简称电磁力)进行讨论研究。

通入恒定电流的线圈不存在趋肤效应, 所以导体横截面的电流密度可以视为恒定值, 且均匀分布。因此, 式(1)可改写为

$$J_\varphi = NI/A \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)后, 简化可得

$$F_e = kI \quad (4)$$

其中

$$k = \frac{2\pi N}{A} \int_A r B_r dA \quad (5)$$

相对位置确定不变时, 磁感应强度 B_r 在线圈横截面上不同位置点处的值固定不变。因此, 根据式(4)可知, 电磁力 F_e 与电流 I 严格符合正比例关系。通过改变电流的大小, 即可获得相应的电磁力。然而, 在实际应用过程中往往会存在系统误差、随机误差和使用误差, 一般通过线性拟合建立电磁力和电流之间的控制关系

$$F_e(I) = a_0 + (a_1 + k)I \quad (6)$$

式中 a_0 表示系统误差和随机误差的贡献, 其值往往很小。 a_1 表示使用误差的贡献, 其与线圈位置处的磁场特性紧密相关, 且在很大程度上依赖于永磁铁与线圈之间的相对位置。

由于圆柱体永磁铁的磁场分布具有不均匀特性, 所以相对位置的改变将直接影响线圈处的磁场特性, 进而对 a_1 产生较大的影响。因此, 为了能够获得高精度、高稳定性的电磁力, 有必要研究相对位置

改变时, 永磁铁尺寸对电磁力输出特性的影响规律。

3 电磁力力学特性数值模拟

由于缺乏方便实用的计算方法, 通过解析方法来获得圆柱体永磁铁的空间磁感应强度分布较为困难^[37-38], 致使难以解析获得线圈所受的电磁力, 只能借助数值方法来近似获得其电磁力大小。对于电磁场问题而言, 有限元方法是最常用的数值方法。该方法通用性强、适用性好, 可以很好地处理大部分电磁场问题。本文将采用有限元方法对通电线圈与永磁铁之间的电磁力进行建模、分析, 研究相对位置变化时永磁铁尺寸对高精度电磁标定力的影响规律。

实际加工制作的线圈是由一根漆包铜线在骨架上按一定方向螺旋缠绕 N 匝所得。其横截面上每匝铜线之间隔有绝缘线皮或微空隙, 但这些空隙和线皮厚度所占体积相对于铜线体积而言很小, 可以忽略不计。因此, 为了方便分析研究, 在数值模拟中, 可将线圈的基本结构假设为一个均匀的圆环体, 其相关参数如表 1 所示, 并施加顺时针方向电流, 如图 1 所示。永磁铁采用较为常用的圆柱体钕铁硼磁铁, 其矫顽力约为 860kA/m, 剩磁为 1.17T, 磁导率为 1.05, 沿 z 轴正方向磁化, 使其与线圈产生的电磁力表现为斥力。表 2 给出了 7 种不同几何尺寸的永磁铁。当输入电流为 1A 时, 根据 #1~#4 永磁铁对比研究直径对电磁力的影响; 基于 #4~#7 对比研究厚度对电磁力的影响。

Table 1 Parameters of coil

Parameter	Outer diameter	Wall thickness	Height	Wire diameter	Number of turns
Value	20mm	1mm	10mm	0.5mm	150

Table 2 Geometric sizes of permanent magnets

Permanent magnets	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7
Diameter/mm	10	20	40	60	40	40	40
Height/mm	3	3	3	3	4	5	6

图 1 给出了永磁铁与线圈相互作用典型磁场分布图。从图中可以看出, 整个磁场符合轴对称分布特性。永磁铁磁场具有边缘效应, 其中心区域的磁场较小, 而边缘处磁场强度、磁场密度梯度均较大。由于距离永磁铁越远, 其磁场越小, 所以线圈处的磁场自下向上逐渐降低。

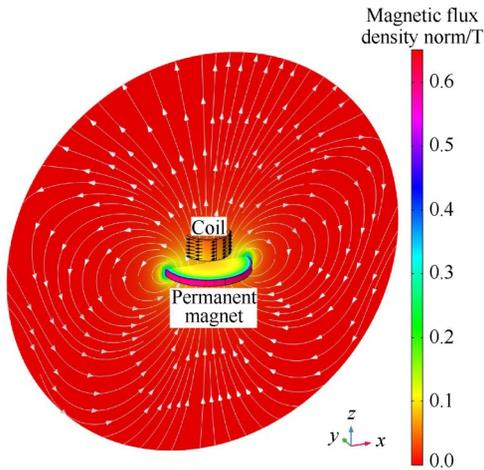


Fig. 1 Magnetic field distribution contour of interaction between permanent magnet and coil (the white and black arrows indicate the directions of magnetic field and coil current, respectively)

3.1 永磁铁直径对电磁力的影响

3.1.1 轴向距离改变时,永磁铁直径对电磁力影响分析

首先,将线圈与永磁铁同轴设置,其初始轴向(z 方向)间距为 0.1mm 。此时,以线圈下表面圆心为初始基准中心 $(0,0,0)$,将线圈以 0.5mm 为步长,从 0 逐渐增大至 8mm ,计算轴向距离改变时,每种永磁铁对线圈产生的电磁力。图2给出了轴向距离不同时, #1~#4永磁铁所产生的电磁力变化趋势曲线图,图2中的(a),(b),(c),(d)所对应的永磁铁直径分别是线

圈直径的 0.5 倍、 1 倍、 2 倍和 3 倍。

尽管#1永磁铁的直径和体积远小于#3和#4永磁铁,但由于永磁铁边缘效应影响,在轴向距离较小的情况下,线圈所处的总磁场强度较大,从图中可以看出, #1永磁铁对应的电磁力要大于#3和#4永磁铁。#2永磁铁与线圈直径相同,同样得益于永磁铁边缘效应的存在,线圈处的磁通密度最大,故而其电磁力最大,所以#2永磁铁对应的电磁力远大于其他三种工况,如图2(b)所示。随着轴向距离逐渐增大,图2(a),(b)所示的电磁力均单调递减,这是由于随线圈逐渐远离永磁铁,其所受的永磁铁边缘效应和磁场强度在逐渐减弱。#3和#4永磁铁的直径要大于线圈外径,此时随着永磁铁和线圈之间轴向距离逐渐增大,其电磁力曲线均呈现先增大后减小的抛物线,这是由磁场径向分量先增大后减小导致的。从图中还可以得出,抛物线的极值位置会随着永磁铁直径的增大而增大,但其数值却随着永磁铁直径的增大而减小,且永磁铁直径越大,极值附近的电磁力变化趋势越平缓。因此,对于直径越大的永磁铁而言,极值附近的电磁力对轴向距离的变化敏感性越弱、稳定性越好,可输出的标定力精度越高,但可产生的电磁力较小。

为了能够更加直观、定量地说明永磁铁直径对电磁力的影响,且进一步说明极值附近电磁力的稳定性,分别以上述四种工况中电磁力最大值所对应的轴向距离 z_0 为基准中心 $(0,0,z_0)$,并以 0.25mm 为前进步长,将线圈从 z_1 移动至 $z_1+2\text{mm}$ 位置处,其中 $z_1 =$

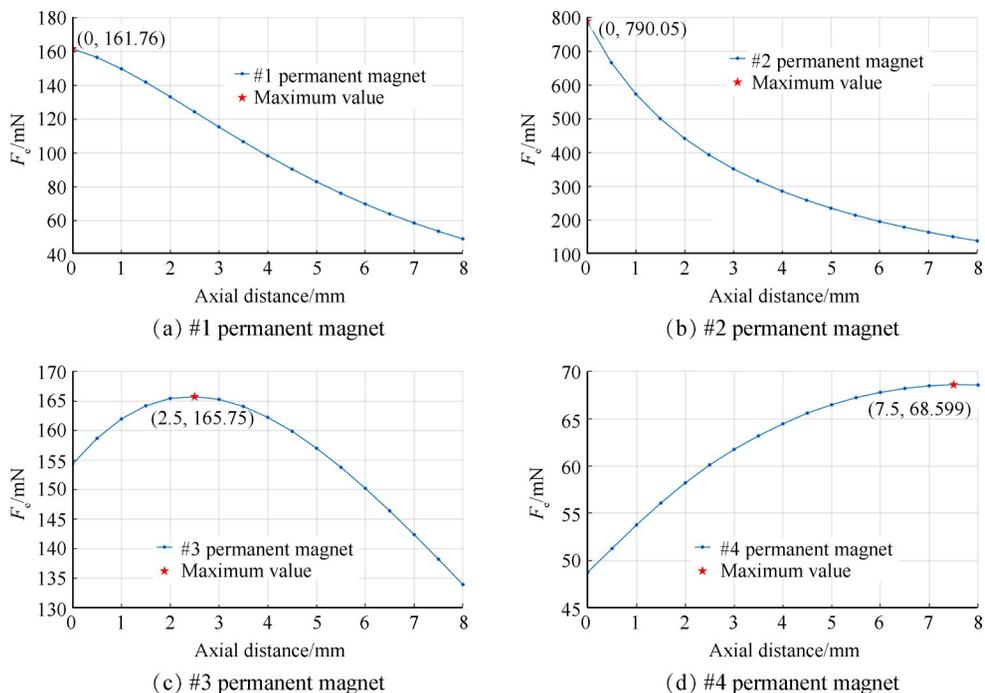


Fig. 2 Variation curve of electromagnetic force with axial distance when the diameters of permanent magnet are different

$\max(z_0 - 1\text{mm}, 0)$ 。表3给出了每一位置处的电磁力大小,其中 $F_{\#j}(j = 1, 2, 3, 4)$ 表示永磁铁# j 对应的电磁力大小。从表中数据可以直观地看出#2永磁铁对应的电磁力要远大于其他情况,且变化最剧烈;而#4永磁铁对应的电磁力最小、变化最弱。

为了说明电磁力随相对位置改变的敏感性,引入变异系数 $\delta = \sigma/E$ (σ 为样本标准差, E 为样本均值)。变异系数为无量纲量,可以对数据的离散程度进行客观的对比,而与数据的具体数值无关,可以消除每种工况具体数据值相差较大的影响。根据表3可以计算得到每种工况电磁力随轴向距离的变异系数,如表4所示,以此说明电磁力对轴向距离的敏感性,其中 $\delta_{\#j}$ 分别表示# j 永磁铁对应的电磁力变异系数。从表中可以看出,永磁铁的直径越接近于线圈外径时,所得的电磁力变异系数越大,对轴向距离的变化越敏感。#1,#3永磁铁直径与线圈的外径均是2倍关系,但#1永磁铁对应的变异系数要大于#3永磁铁对应的变异系数,这表明在选择永磁铁和线圈组合时,所选择的永磁铁直径要大于线圈直径为宜。直径最大的永磁铁#4所对应的电磁力变异性最小,意味着永磁铁直径越大,输出的电磁力对轴向距离的敏感性越弱、稳定越好。

3.1.2 径向距离变化时,永磁铁直径对电磁力影响分析

首先,同样将 $(0, 0, z_0)$ 作为基准中心,然后,将线

圈以0.5mm为步长,沿 x 轴从-2mm移动到2mm,图3给出了不同工况下随径向位置变化时的电磁力曲线。

由于线圈中电流的分布和永磁铁提供的磁场分布均符合轴对称特性,所以每种工况所对应的电磁力曲线具有左右对称特性。图3(a)对应的线圈外径要远大于永磁铁直径,当径向偏差为0时,两者是同轴关系,此时线圈远离永磁铁边缘密集的磁场区,所以电磁力最小;当线圈向 x 正方向(负方向)移动时,其右(左)侧会远离永磁铁磁场,所受的磁场强度会减弱,而线圈的左(右)侧则会逐渐靠近边缘效应较大的区域,所受的磁场强度会变大,总体上会呈现电磁力增大的趋势,因此,图3(a)是开口向上的抛物线。可以预测当偏移距离继续增大时,线圈会整体远离磁场,此时电磁力又会降低。图3(b)图对应的线圈外径接近于永磁铁的直径。当两者同轴设置时,线圈受到永磁铁边缘效应的影响最大,所以此工况对应的电磁力量级最大;当线圈向左右两侧移动时,其电磁力会逐渐降低,所以图3(b)呈现开口向下的抛物线。图3(c)和(d)所对应的线圈外径均小于永磁铁的直径,当线圈和永磁铁同轴设置时,线圈仅仅会受到永磁铁中心区域磁场的影响,此时电磁力较小。当线圈向两侧移动时,会逐渐靠近永磁铁的边缘效应区,此时电磁力会逐渐增大,因此,图3(c),(d)均是开口向上的抛物线。同样,可以预测当偏移距离继续增大时,电磁力将会逐渐减小。

Table 3 When the axial distance changes,the electromagnetic force corresponding to permanent magnets with different diameters

Axial distance/mm	$F_{\#1}/\text{mN}$	$F_{\#2}/\text{mN}$	$F_{\#3}/\text{mN}$	$F_{\#4}/\text{mN}$
z_1	161.76	790.05	164.17	68.241
$z_1+0.25$	159.44	723.70	164.91	68.376
$z_1+0.5$	156.67	666.54	165.43	68.488
$z_1+0.75$	153.45	617.02	165.69	68.570
z_1+1	149.90	573.68	165.75	68.599
$z_1+1.25$	146.03	535.55	165.66	68.580
$z_1+1.5$	141.96	501.11	165.32	68.566
$z_1+1.75$	137.70	470.11	164.74	68.514
z_1+2	133.34	442.21	164.07	68.419

Table 4 When the relative position changes,the variation coefficient of electromagnetic force corresponding to permanent magnets with different diameters

Variation coefficient	$\delta_{\#1}$	$\delta_{\#2}$	$\delta_{\#3}$	$\delta_{\#4}$
Axial direction	6.64×10^{-2}	2.00×10^{-1}	3.91×10^{-3}	1.73×10^{-3}
Radial direction	2.10×10^{-2}	7.70×10^{-2}	7.56×10^{-3}	3.06×10^{-3}

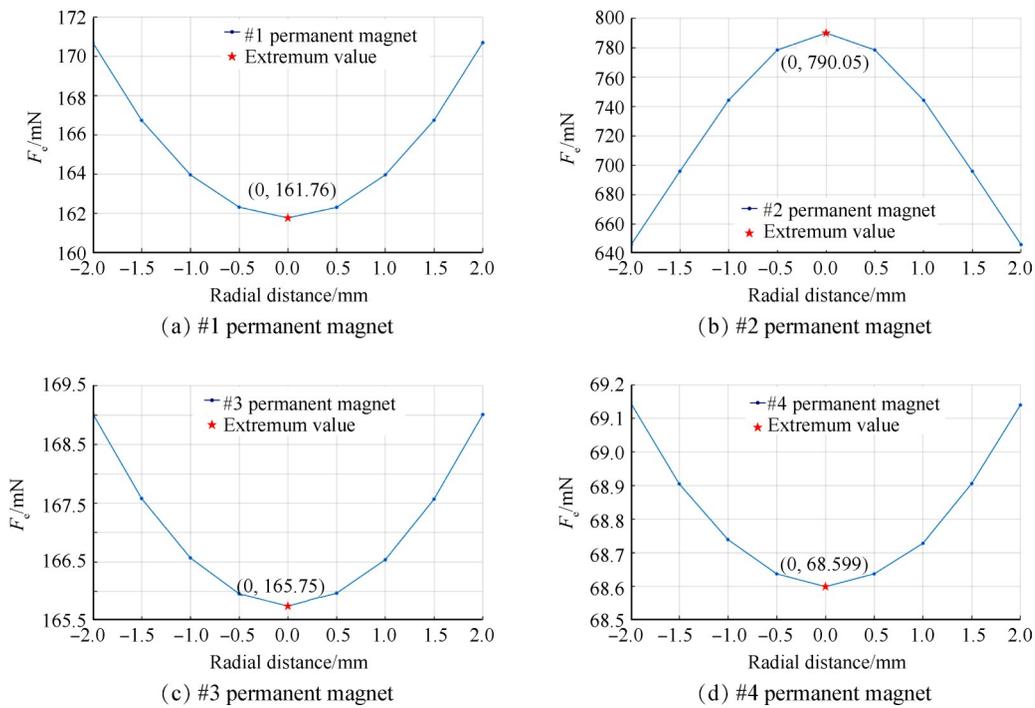


Fig. 3 Variation curve of electromagnetic force with radial distance when the diameters of permanent magnets are different

从表 4 可以得知, 径向距离改变和轴向距离改变所引起的电磁力变异性变化规律一致。当线圈的外径与永磁铁的直径越接近时, 其电磁力变异性越大, 此时电磁力对径向距离的改变越敏感。为了能够产生对径向距离不敏感的电磁力, 应该选用直径比线圈外径要大的永磁铁。

3.2 永磁铁厚度对电磁力的影响

3.2.1 轴向距离变化时, 永磁铁厚度对电磁力的影响

同 3.1 节设置, 将线圈与永磁铁轴向间距设为 0.1mm 时, 其下表面圆心作为初始基准中心 (0, 0, 0), 然后以 0.5mm 为步长, 将线圈从 0 逐渐增大至 8mm, 研究永磁铁厚度对电磁力的影响。

图 4 给出了轴向距离变化时, 厚度不同的 4 种永磁铁所产生的电磁力变化趋势曲线图。由于永磁铁直径大于线圈外径, 图中每条曲线均是开口向下的抛物线。从图中可以看出, 随着永磁铁厚度逐渐增大, 其相应的电磁力也会变大。这是由于永磁铁变厚后, 其体积增大, 其相应的磁场强度也变大。这与上一小节中永磁铁直径越大, 磁场相对而言越小的结论正好相反。除此之外, 电磁力极值位置会随着厚度的变大而减小, 这也与上一小节中永磁铁直径对极值位置的影响相反。可以预测继续增大永磁铁厚度时, 其电磁力曲线将由存在极值点的抛物线变为单调递减的曲线。

表 5 总结给出了永磁铁几何尺寸与轴向电磁力

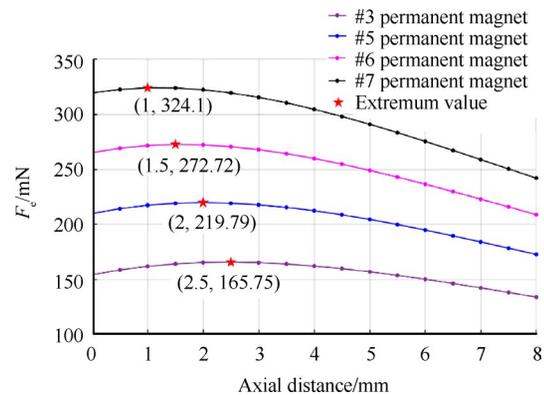


Fig. 4 Variation curve of electromagnetic force with axial distance when the thicknesses of permanent magnets are different

极值的相关性。当线圈和永磁铁同轴设置, 只改变线圈与永磁铁的轴向间距时, 永磁铁直径越大, 电磁力极值越小, 极值位置距离永磁铁越远; 而永磁铁厚度越大时, 电磁力极值越大, 极值位置距离永磁铁越近。

为了能够更加直观、定量地说明永磁铁厚度对电磁力特性的影响, 同样令 $(0, 0, z_0)$ 作为线圈的基准中心, 将其从 z_1 移动至 z_1+2 , 计算保存每一位置处的电磁力大小, 并计算每种工况对应的变异系数, 如表 6 所示。从表中可以看出, 每种工况所对应的电磁力变异系数几乎一样。这表明对于直径相同、厚度不同的永磁铁而言, 极值点附近的电磁力对轴向距离

的变化敏感性一样。

3.2.2 径向距离变化时,永磁铁厚度对电磁力的影响

仍将 $(0, 0, z_0)$ 作为线圈的基准中心,然后,以 0.5mm 为步长,将线圈沿 x 轴从 -2mm 移动到 2mm,计算每一位置处的电磁力,如图 5 所示。

从图 5 中可以看出,厚度越大,电磁力也越大。但电磁力先降低后增大的变化趋势并未发生改变,这说明线圈确定的情况下,电磁力随径向距离改变时的曲线形状仅仅取决于永磁铁直径,而不受永磁铁厚度的影响。为了进一步说明径向距离改变对电磁力的影响,表 6 给出了每种工况电磁力的变异系数。从表中可以看出,四种工况对应的电磁力变异系数几乎一样,这表明对于直径相同、厚度不同的永磁铁而言,其极值点附近电磁力对径向距离变化的敏感性一样。综上可知,永磁铁厚度的改变只会影

响电磁力的大小,而不改变电磁力对径向距离的敏感性。

数值模拟时,为了方便已将线圈和永磁铁进行了一定简化,并未考虑铜线之间的间隙影响和永磁铁涂层、加工精度以及退磁漏磁的影响,致使数值计算的结果与实验结果有一定的差异,并不能直接用来进行标定测量。但利用数值模拟分析得出的规律性结论同样适用于实际工况,可以对制定和优化实验方案提供有力的参考和理论支持。下一节,将通过实验方法进一步验证数值模拟所得的结论,为标定力产生装置的永磁铁选取提供参考意见。

4 电磁力力学特性实验研究

为了能够获得高精度的电磁标定力,并实验验证数值模拟所得结论。本节将采用称重法,利用高

Table 5 Correlation between the geometric size of permanent magnet and the extreme value of electromagnetic force

Permanent magnet	Value of extreme point	Position of extreme point
Diameter	Negative correlation	Positive correlation
Thickness	Positive correlation	Negative correlation

Table 6 When the relative position changes,the variation coefficient of electromagnetic force corresponding to permanent magnets with different thicknesses

Coefficient of variation	$\delta_{\#3}$	$\delta_{\#5}$	$\delta_{\#6}$	$\delta_{\#7}$
Axial direction	7.56×10^{-3}	7.46×10^{-3}	7.55×10^{-3}	7.60×10^{-3}
Radial direction	3.91×10^{-3}	3.90×10^{-3}	4.29×10^{-3}	3.74×10^{-3}

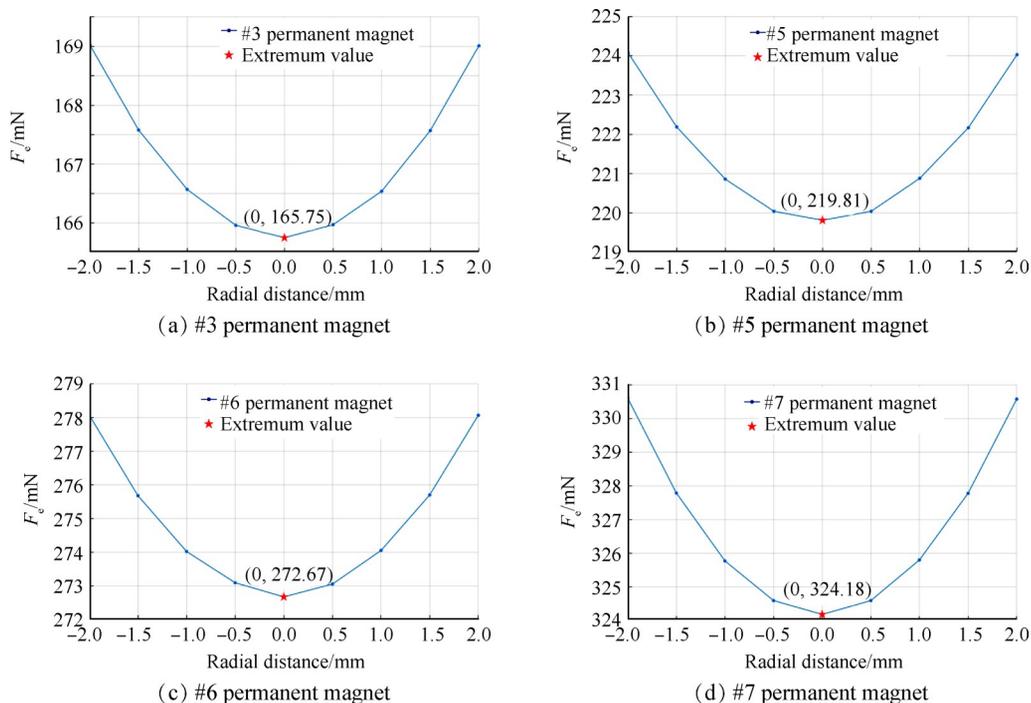


Fig. 5 Variation curve of electromagnetic force with radial distance when the thicknesses of permanent magnet are different

分辨率电子天平获得线圈与永磁铁之间的电磁力，实验研究永磁铁尺寸对电磁力特性的影响。

4.1 实验装置

本次实验所用的装置如图 6 所示，该装置具有 3 自由度调节功能。利用非导磁轻质支撑台架承载永磁铁，使其远离电子天平，降低磁场对天平的影响。线圈通过连接杆固定在多自由度位移台上，并置于永磁铁正上方，通过调整位移台实现相对位置的改变。线圈通电后，电子天平示数会发生改变，将改变量乘以当地重力加速度即可获得电磁力的大小。表 7 给出了各个实验设备及其性能参数；购置 7 种不同的永磁铁，均是货架产品，如图 7 所示；使用游标卡尺和电子天平测量其实际的几何尺寸和质量，如表 8 所示。表 9 给出了磁性能参数。

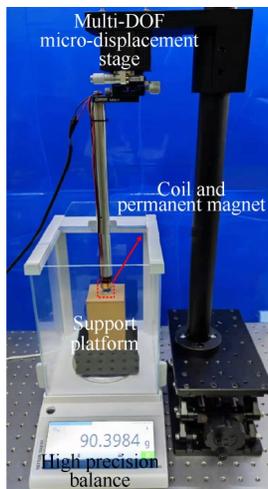


Fig. 6 Experimental equipment

Table 7 Experimental equipment and their performance parameters

Experimental equipment	Performance parameter
Electronic balance	Weighing capacity: 220g; Readability: 0.1mg; Reproducibility: 0.08mg; Linearity: 0.06mg; Stabilization time (typical): 2s
Displacement stage	Travel: 1.5cm; Resolution: 0.5mm per revolution
Coil	Outer diameter: 20mm; Inner diameter: 16.5mm; Height: 10mm; Turns: 20; Wire diameter: 0.5mm
DC power source	Resolution: 1mA

4.2 设置基准位置

将电磁力随距离变化时所对应的极值（极值不存在时，取最大值）位置定义为基准中心位置。对于高精度测量而言，首先需要设置永磁铁和线圈之间

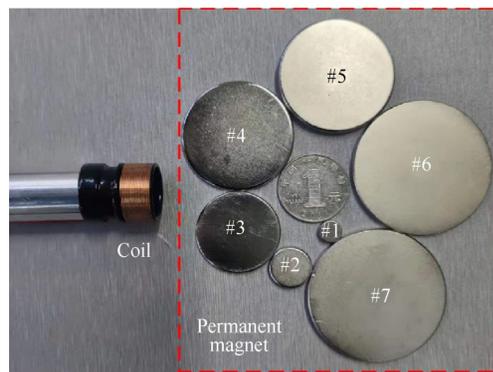


Fig. 7 Physical drawing of coil and permanent magnets

的相对基准中心。其基准位置的确定会直接影响电磁标定力的重复性、一致性和精确性。目前常用的设置方式是基于线圈和永磁铁的形状、尺寸，通过目测对线圈和永磁铁进行同轴设置。但是，由于加工误差和运输储存不当，实际的线圈和永磁铁并非理想的轴对称结构，进而致使其物理场的对称轴中心与结构的几何中心也并非完全重合。因此，通过目测设置往往会存在较大的误差，导致标定结果失真。故而，需要通过操作流程的优化来设置高精度的基准中心。

首先，通过目测粗略调整永磁铁和线圈的初始相对位置，使其近同轴设置，且保证线圈的下表面与永磁铁的上表面近似共面，记录位置为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 。然后，确定径向位置 $i_0 (i = x, y)$ ，即完成同轴设置：通过数值分析可知，随着径向距离的变化，电磁力变化曲线是抛物线，因此，可以根据其对称性来确定水平面零点 i_0 。通过微调线圈 i 方向的位置，根据天平示数相等的两个位置坐标 i_1 和 i_2 ，即可确定其径向中心位置 $i_0 = (i_1 + i_2)/2$ 。最后，确定线圈的轴向位置 z_0 ：根据数值分析可知，当永磁铁直径小于线圈外径或磁铁厚度较大时，电磁力是单调递减的，此时令 $z_0 = \bar{z}$ ；当永磁铁直径大于线圈外径且厚度较小时，电磁力符合先增大后减小的抛物线。此时，可以根据其对称性来确定轴向零点 z_0 。同样地，通过微调线圈 z 方向的位置，可根据天平示数相等的两个位置坐标 z_1 和 z_2 来确定轴向零点 $z_0 = (z_1 + z_2)/2$ 。至此，可以确定线圈与永磁铁之间的基准中心为 (x_0, y_0, z_0) 。

4.3 永磁铁直径对电磁力的影响

由于加工精度影响，#1~#4 以及 #6 永磁铁的厚度并不完全一致，如表 8 所示，但是相差不大，因此仍可视作等厚情况，所以可以根据这 5 种永磁铁来实验研究直径对电磁力的影响。在本次实验中，线圈电流

为1A。

4.3.1 轴向间距变化时,永磁铁直径对电磁力的影响

线圈水平位置保持为 (x_0, y_0) , 轴向间距以 0.25mm 为步长, 将线圈从 z 移动至 $z+2$ mm 位置, 其中 $z=\max(z_0-1\text{mm}, 0)$, 单程可获得 9 个测量数据。为了保证测量数据的可靠性和准确度, 并尽可能降低随机误差对测量结果的影响, 每种永磁铁所对应的线

圈需要进程返程共测量 6 次, 因此, 每种磁铁需要测量 54 个数据。然后, 对同一位置点处测得的 6 个电磁力进行统计处理, 获得其电磁力均值和误差棒, 如图 8 所示, 图 8(a)~(e) 分别对应 #1~#4 以及 #6 永磁铁对线圈所产生的电磁力。从图 8 中可以看出误差棒很小, 说明数据重复性很好, 且永磁铁直径越大, 其对应的电磁力极值越小。由于 #1, #2 永磁铁直径小于或者接近与线圈的外径, 所以这两种磁铁对应

Table 8 Parameters of Nd-Fe-B permanent magnets

Magnet	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7
Mass/g	1.0496	3.4620	9.3234	24.3594	47.1487	38.1462	62.4753
Diameter/mm	8.0	15.0	24.5	40.0	40.0	48.0	49.5
Thickness/mm	3.0	2.5	2.6	2.7	5.0	2.8	5.0

Table 9 Magnetic properties (temperature in 20°C)

Remanence		Coercivity		Intrinsic coercivity		Max.energy product		Permeability
$B_{r_{min}}$ /T	$B_{r_{nom}}$ /T	$H_c B_{c_{min}}$ / (kA/m)	$H_c B_{c_{nom}}$ / (kA/m)	$H_c J_{c_{min}}$ / (kA/m)	$H_c J_{c_{nom}}$ / (kA/m)	$B_{H_{min}}$ / (kJ/m ³)	$B_{H_{nom}}$ / (kJ/m ³)	μ
1.17	1.22	860	925	955	960	263	279	1.05

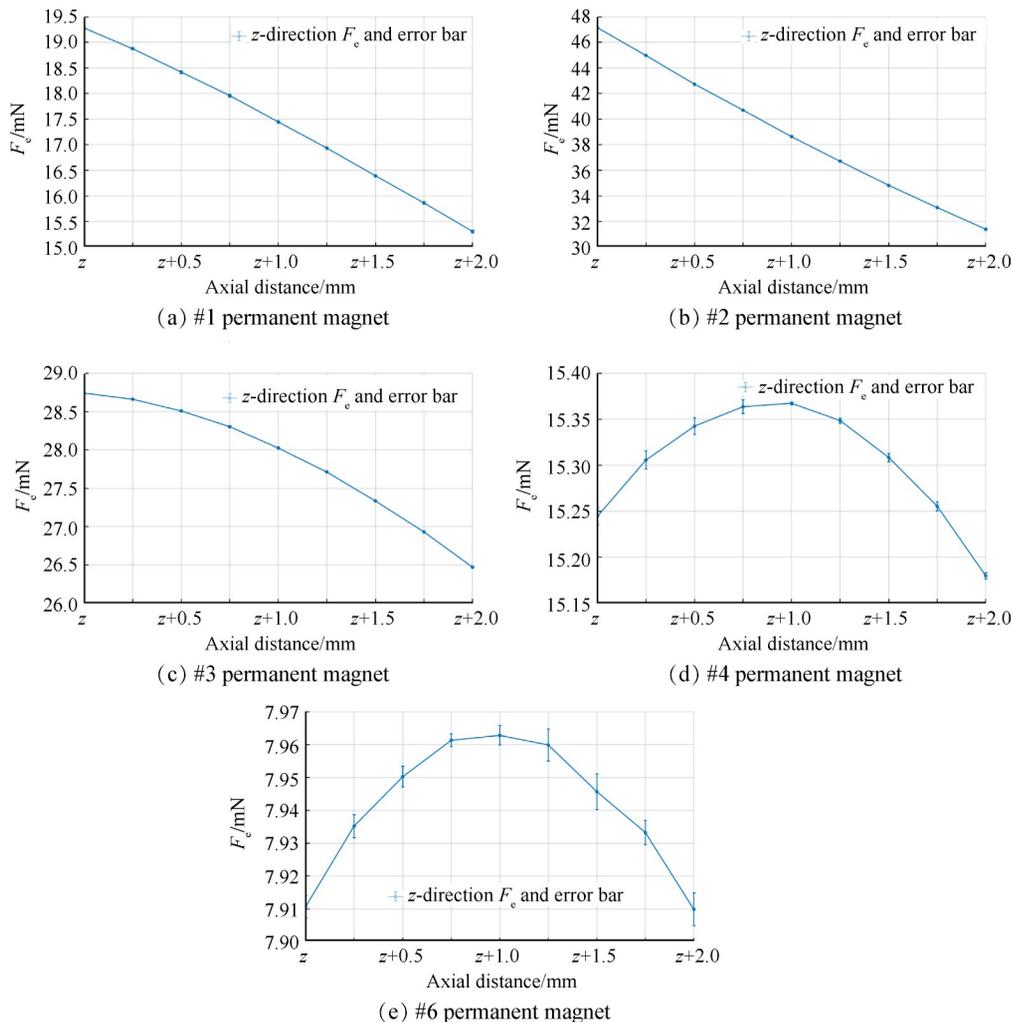


Fig. 8 Variation curve of electromagnetic force with axial distance when the thicknesses of permanent magnet are different

的电磁力曲线随着轴向距离的增大单调递减。由于#4,#6永磁铁直径远大于线圈的外径,所以这两种磁铁对应的电磁力曲线随着轴向距离的增大呈开口向下的抛物线。尽管#3永磁铁也稍大于线圈外径,但是受厚度影响,致使其电磁力呈单调递减趋势。

计算线圈在轴向区间 $[z, z+2\text{mm}]$ 移动时所对应的电磁力变异系数,如表 10 所示,其中 $\delta_i(i = x, y, z)$ 分别表示 x, y, z 方向间距改变时其变异系数大小。从表中可以看出:由于#2永磁铁直径最接近线圈直径,所以其轴向变异系数最大;而随着永磁铁直径与线圈直径相差越大,其轴向变异系数逐渐变小,且变化

梯度也越来越小。这说明永磁铁直径越大于线圈直径,其电磁力对轴向距离的敏感性越弱,稳定性越好。

4.3.2 径向间距变化时,永磁铁直径对电磁力的影响

首先,将线圈轴向位置调整至 z_0 ,径向间距以 0.5mm 为步长,将线圈从 $i_0 - 2\text{mm}$ 移动至 $i_0 + 2\text{mm}$,每个位置记录一次电磁力,其对应的线圈需要进程返程共测量 6 次,每种永磁铁同样需测量 54 个数据。然后,再对同一位置点处测得的 6 个电磁力进行统计处理,获得电磁力均值和误差棒,如图 9 所示。从图 9 中可以看出误差棒很小,说明数据重复性很好,图 9 (a)~(e)分别对应#1~#4 以及#6 永磁铁对线圈所产生

Table 10 When the relative position changes,the variation coefficient of electromagnetic force corresponding to permanent magnets with different diameters

Magnet	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7
δ_z	7.90×10^{-2}	5.42	8.03×10^{-1}	4.16×10^{-3}	3.88×10^{-3}	2.60×10^{-3}	2.52×10^{-3}
δ_x	4.46×10^{-3}	7.55×10^{-1}	3.80×10^{-1}	8.31×10^{-3}	7.41×10^{-3}	5.04×10^{-3}	4.66×10^{-3}
δ_y	5.14×10^{-3}	8.03×10^{-1}	4.06×10^{-1}	9.05×10^{-3}	8.09×10^{-3}	5.79×10^{-3}	5.40×10^{-3}

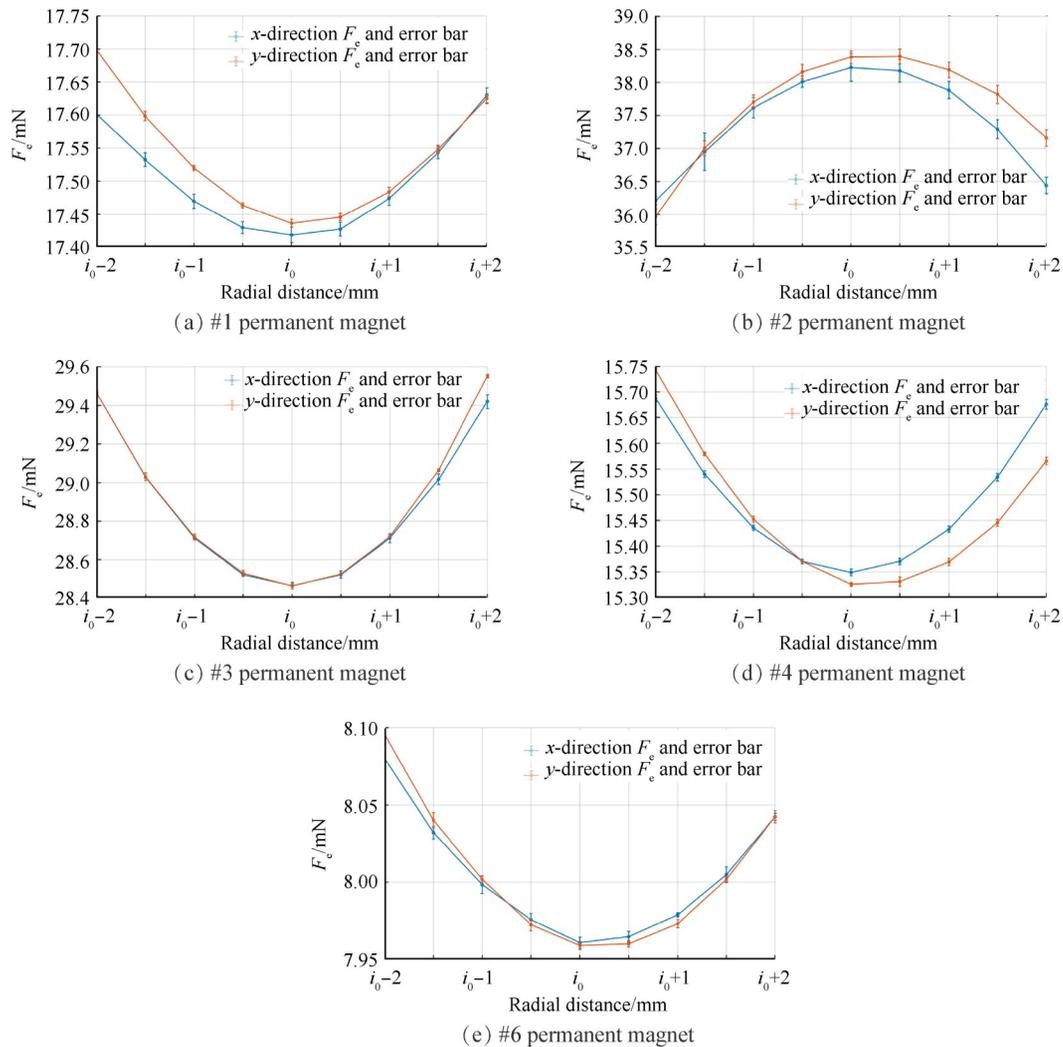


Fig. 9 Variation curve of electromagnetic force with radial distance when the diameters of permanent magnets are different

的电磁力。但是,由于加工误差、系统误差和随机误差的影响,每个方向上的电磁力并非完美左右对称分布,且 x 方向对应的电磁力与 y 方向对应的电磁力也并不完全相同,但均相差较小。从图中还可以看出:由于#2永磁铁直径接近与线圈直径,所以其对应的电磁力曲线随着径向距离的增大呈开口向下的抛物线;而其他4种永磁铁均大于线圈直径,所以其对应的电磁力呈开口向上的抛物线。

计算线圈在径向区间 $[i_0 - 2\text{mm}, i_0 + 2\text{mm}]$ 移动时所对应的电磁力变异系数,如表10所示。从表10中可以看出:径向变异系数变化规律与轴向变异系数变化规律是一致的;随着永磁体直径与线圈直径相差越大,其径向变异系数会越小。这说明永磁体直径越大于线圈直径,其电磁力对径向距离的敏感性越弱,稳定性越好,但电磁力极值越小。

综上所述,相对位置改变时,永磁铁直径对电磁力的影响规律同数值模拟的结论一致。

4.4 永磁铁厚度对电磁力的影响

通过实验对比研究#4和#5以及#6和#7所对应的电磁力变化来说明永磁铁厚度对电磁力的影响(受加工误差影响,#6和#7永磁铁的直径稍有差异)。在本次实验中,线圈电流仍设置为1A。

依据上节同样的方法可以求得,#5和#7永磁铁随轴向和径向距离改变时,其电磁力变化曲线及误差棒,如图10所示。同时,也可以获得相应的变异系

数,如表10中所示。从图中可以看出,每条曲线均是存在极值点的抛物线,且每个位置点处的电磁力误差棒很小,说明实验数据具有很好的重复性。对比分析#4(#6)永磁铁和#5(#7)永磁铁对应的电磁力变化曲线,可以看出永磁铁厚度增大,电磁力极值越大。从表中可以看出,这两对永磁铁各自对应的3个方向上的变异系数相差不大,说明直径相同时,极值点两侧电磁力对距离的敏感性相近。永磁铁厚度并不改变极值点两侧电磁力对距离的敏感性。综上所述可知,相对位置改变时,永磁铁厚度对电磁力的影响规律同数值模拟的结论一致。

表11给出了偏离#7永磁铁与线圈之间基准中心位置 $\pm 0.5\text{mm}$ 时所引起的电磁力误差。从表中可以看出,电磁力几乎保持不变,最大误差 $\leq 0.1771\%$ 。上述误差不仅包含了因非同轴度所引起的径向电磁力影响,也包含了系统误差、随机误差的影响。因此,依据本文研究结果通过相对基准中心位置的确定、选择合适的永磁铁,可以获得对位置敏感性较弱的高精度电磁标定力。

4.5 高精度电磁力与电流之间的控制关系

数值模拟和实验研究均表明直径较大的永磁铁所获得的电磁力对相对位置的敏感性最弱、一致性最优。因此,本节选用#6永磁铁和线圈的组合形式,以此建立一定包络区间内的电磁力标定关系式,并分析其不确定度。

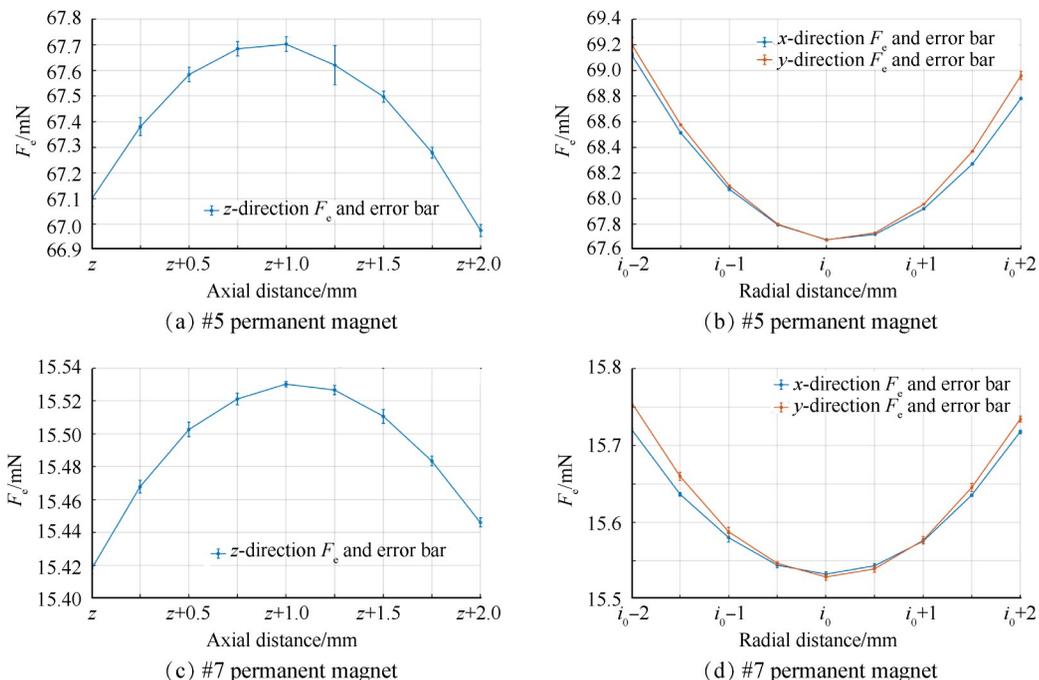


Fig. 10 When the relative position changes, the variation curve of electromagnetic forces corresponding to #5 and #7 permanent magnets

Table 11 Errors of electromagnetic forces with ±0.5mm off the center position

Offset distance/mm	x-direction		y-direction		z-direction	
	F_c /mN	Relative error/%	F_c /mN	Relative error/%	F_c /mN	Relative error/%
-0.5	15.5441	0.0766	15.5464	0.1127	15.5026	0.1771
0.0	15.5322	0.0000	15.5289	0.0000	15.5301	0.0000
+0.5	15.5433	0.0715	15.5392	0.0663	15.5106	0.1256

首先,利用 4.2 节的方法确定永磁体和线圈的基准中心 (x_0, y_0, z_0) ,以基准中心为原点,通过位移台将线圈沿 x, y, z 方向移动 $\varepsilon = \pm 0.5\text{mm}$ 。在每个位置点处,电流 $I(\text{A})$ 依次施加 $[0.005, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 1.2, 1.5]$ 等 10 个值,且分别去程回程各施加一次,共需测量 $3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 10 = 540$ 组数据点 (I_j, F_j) ,如图 11 所示。

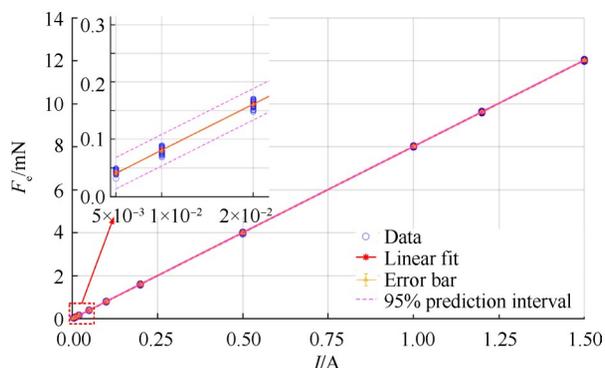


Fig. 11 Relationship between the electromagnetic force and the current

对测量数据进行拟合,可得到电磁力与电流之间的线性拟合方程

$$F_c(I) = 8.0167I + 7.9943 \times 10^{-4} \quad (7)$$

由图 11 分析可知:(1)包络区间内,电磁力与电流之

间的线性度极高,拟合相关系数为 0.999994970992483;(2)从误差棒曲线可以看出,电磁力与电流之间的数据重复性非常好,很多误差棒长度几乎为 0;(3)所产生的电磁力为 $40.7\mu\text{N} \sim 12.07\text{mN}$;(4)拟合曲线的估计标准误差非常小,约为 1.37%,说明拟合方程精度很高。

电磁标定力的测量不确定度取决于所用仪器的分辨率,如表 12 所示。根据误差传递函数,将所有仪器产生的误差进行相加,即为电磁标定力的测量不确定度误差

$$u_c = \frac{\partial F_c}{F_c} = (1 + \beta) \sqrt{\left(\frac{\delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\delta F_c}{F_c}\right)^2 + \left(\frac{\delta x}{x}\right)^2} \quad (8)$$

式中 β 为其他不可预测误差源的补偿系数,一般取 0.2%。

根据电流和电子天平所使用的最值,可以推算出不确定误差范围为: $1.2\% \leq u_c \leq 24.2\%$ 。不确定度上限 24.2% 主要取决于所使用的电源分辨率和所设置的最小电流值,通过选择高分辨的电源可以有效地提高其测量精度。

表 13 给出了施加不同电流时相应电磁力的变异系数,由表分析可知:(1)不同电流对应的变异系数非常小,几乎为 0,说明线圈在包络区间内微调时,其电磁力稳定性很好,对距离变化不敏感,电磁力性能

Table 12 Known source of error for uncertainty analysis

Item	Equipment	Resolution	Min	Max
Current I/mA	Power supply	1	5	1500
Calibration $F_c/\mu\text{N}$	Weighing balance	0.981	40.7	12070
Engagement distance $x/\mu\text{m}$	Mechanical stage	10	1000	1000
Uncertainty error with $\beta=0.2\%$			24.2	1.2

Table 13 Variation coefficient of electromagnetic force corresponding to current

I/A	Variation coefficient	I/A	Variation coefficient
0.005	8.60×10^{-2}	0.2	4.92×10^{-3}
0.01	5.81×10^{-2}	0.5	3.44×10^{-3}
0.02	3.33×10^{-2}	1	2.38×10^{-3}
0.05	1.31×10^{-2}	1.2	2.32×10^{-3}
0.1	8.12×10^{-3}	1.5	2.13×10^{-3}

优良;(2)随着电流逐渐变大,其电磁力也会随之增大,系统误差和随机误差影响降低,所以相应的变异系数会逐渐降低。

5 结 论

本文在介绍电磁力产生原理的基础上,分别通过数值模拟和实验研究两种方法分析了线圈与永磁铁相对位置改变情况下,永磁铁几何尺寸对电磁力特性的影响。

(1)基于数值模拟方法,分别研究了永磁铁直径和厚度对电磁力的影响规律,并通过实验研究对其进行了验证:对于直径较大的永磁铁而言,其相应的电磁力随相对位置的改变会存在极值点,且极值点附近区域的电磁力对相对位置变化的敏感性最弱、性能最优;永磁铁的直径与线圈直径相比越大,其所产生的电磁力极值会越小,但极值附近电磁力对相对位置改变的敏感性越弱,稳定性和一致性越好;对于厚度越大的永磁铁而言,其所对应的电磁力极值越大,但磁铁厚度并不改变极值点附近电磁力随相对位置改变的敏感性。

(2)根据电磁力变化规律,提出了线圈和永磁体之间基准中心(极值点)位置的设置方案,为最佳相对位置的确定以及电磁标定力精度的保证提供了基础和前提。

(3)确定了大直径永磁铁+线圈的组合型电磁标定力产生装置,获得了一定包络区间内电磁力与电流之间的高精度控制率,为标定源的选择和确定提供了理论指导和技术支持。

参考文献

- [1] 马定坤, 匡 银, 杨新权. 微纳卫星发展现状与趋势[J]. 空间电子技术, 2017, 25(225): 45-48.
- [2] 任 亮, 张天平, 吴先明, 等. 真空电弧推力器技术发展现状及趋势[J]. 真空与低温, 2016, 22(5): 265-270.
- [3] 李献球, 李春霞, 蒋东方. 微纳卫星在卫星导航中的应用探讨[J]. 现代导航, 2015, 6(5): 391-395.
- [4] 于达仁, 牛 翔, 王泰卜, 等. 面向空间引力波探测任务的微推进技术研究进展[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2021, 60(1): 1-19.
- [5] 胡文瑞, 康 琦. 微重力科学前沿[J]. 科技导报, 2020, 38(10): 59-62.
- [6] Cheah K H, Low K S. Fabrication and Performance Evaluation of a High Temperature Co-Fired Ceramic Vaporizing Liquid Microthruster[J]. *Journal of Micromechanics & Microengineering*, 2015, 25(1).
- [7] Rovey J L, Lyne C T, Mundahl A J, et al. Review of Multimode Space Propulsion[J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2020, 118(10).
- [8] 吴汉基, 蒋远大, 张志远. 电推进技术的应用与发展趋势[J]. 推进技术, 2003, 24(5): 385-392. (WU Han-Ji, JIANG Yuan-da, ZHANG Zhi-yuan. Application and Development Trend of Electric Propulsion Technology[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2003, 24(5): 385-392.)
- [9] 毛根旺, 韩先伟, 杨 涓, 等. 电推进研究的技术状态和发展前景[J]. 推进技术, 2000, 21(5): 1-5. (MAO Gen-Wang, HAN Xian-wei, YANG Juan, et al. Research State of Electric Propulsion and Its Development Prospect[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2000, 21(5): 1-5.)
- [10] 李得天, 张伟文, 张天平, 等. 空间电推进地面综合测试评价技术研究[J]. 真空与低温, 2017, 23(5): 266-273.
- [11] 杨元侠. 微牛顿量级推进器的推力性能研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2012.
- [12] Rohaizat M, Lim M, Xu L, et al. Development and Calibration of a Variable Range Stand for Testing Space Micropropulsion Thrusters[J]. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2017, 46(2): 1-7.
- [13] Li X, Huang Y, Zhang X, et al. Micro-Thrust Measurement of a MEMS Based Cold Gas Micro-Thruster in Vacuum Conditions [C]. Rome: 5th IEEE International Workshop on Metrology for AeroSpace, 2018.
- [14] Schwertheim A, Azevedo E R, Liu G, et al. Interlaboratory Validation of a Hanging Pendulum Thrust Balance for Electric Propulsion Testing[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2021, 92(3).
- [15] Asakawa J, Nishii K, Nakagawa Y, et al. Direct Measurement of 1-mN-Class Thrust and 100-s-Class Specific Impulse for a Cubesat Propulsion System[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2020, 91(3).
- [16] Zhang Z, Hang G, Qi J, et al. Design and Fabrication of a Full Elastic Sub-Micron-Newton Scale Thrust Measurement System for Plasma Micro Thrusters[J]. *Plasma Science and Technology*, 2021, 23(10).
- [17] 刘岳鹏, 周 磊, 马 鑫. 基于LabVIEW的mN级微推力测量系统研究[J]. 计算机测量与控制, 2020, 28(5): 61-64.
- [18] 杨 超, 贺建武, 康 琦, 等. 亚微牛顿级推力测量系统设计及实验研究[J]. 中国光学, 2019, 12(3).
- [19] 刘旭辉, 杨飞虎, 魏延明, 等. 基于扭摆台架的动态推力测试方法研究[J]. 推进技术, 2017, 38(4): 926-931. (LIU Xu-hui, YANG Fei-hu, WEI Yan-ming, et al. Study of Dynamic Thrust Measurement Using Torsional Pedulum [J]. *Journal of Propulsion Technology*,

- 2017, 38(4): 926-931.)
- [20] Conde L, Lahoz M D, Grabulosa J, et al. Thrust Stand Based on a Single Point Load Cell for Impulse Measurements from Plasma Thrusters[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2020, 91(2).
- [21] 王大鹏, 叶继飞, 李南雷, 等. 一种基于悬臂梁结构的微冲量测量方法[J]. *仪表技术与传感器*, 2019(3): 39-44.
- [22] 洪延姬, 星 金. 微推力和微冲量测量方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2014.
- [23] 刘书杰, 方蜀州, 刘旭辉. 一种微推力器阵列测试台系统辨识与动态补偿[J]. *固体火箭技术*, 2011, 34(6): 794-797.
- [24] Manuel Gamero-Castano. A Torsional Balance for the Characterization of Micronewton Thrusters[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2003, 74(10): 4509-4514.
- [25] Selden N P, Ketsdever A D. Comparison of Force Balance Calibration Techniques for the Nano-Newton Range[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2003, 74(12): 5249-5254.
- [26] Lun J, Law C. Direct Thrust Measurement Stand with Improved Operation and Force Calibration Technique for Performance Testing of Pulsed Micro-Thrusters[J]. *Measurement Science and Technology*, 2014, 25(9).
- [27] 马隆飞, 贺建武, 薛森文, 等. 双丝扭秤微推力测量系统[J]. *推进技术*, 2018, 39(4): 948-954. (MA Long-fei, HE Jian-wu, XUE Sen-wen, et al. A Micro-thrust Measurement System with Two-Wire Torsion Balance[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2018, 39(4): 948-954.)
- [28] 王春平. 毫牛级微推力测试装置研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2018.
- [29] Lam J K, Koay S C, Lim C H, et al. A Voice Coil Based Electromagnetic System for Calibration of a Sub-Micro-Newton Torsional Thrust Stand[J]. *Measurement*, 2019, 131: 597-604.
- [30] Tang H, Shi C, Zhang X, et al. Pulsed Thrust Measurements Using Electromagnetic Calibration Techniques[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2011, 82(3).
- [31] Zhang D, Wu J, Zhang R, et al. High Precision Micro-Impulse Measurements for Micro-Thrusters Based on Torsional Pendulum and Sympathetic Resonance Techniques[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2013, 84(14): 716.
- [32] 何洪斌. 扭秤微推力测量装置的研制[D]. 沈阳: 东北大学, 2014.
- [33] He Z, Wu J, Zhang D, et al. Precision Electromagnetic Calibration Technique for Micro-Newton Thrust Stands[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2013, 84(5): 2060-2499.
- [34] 雄 莫. 微牛级推力测量技术研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2019.
- [35] Chen J, Zhou W, Hong Y. Method for Generating High-Precision Calibration Force for Low Thrust Measurement[J]. *IOP Conference Series Earth and Environmental Science*, 2019, 384(1).
- [36] 王大鹏, 金 星, 周伟静, 等. 高精度电磁标定力的产生及其特性分析[J]. *仪器仪表学报*, 2017, 38(8): 1933-1942.
- [37] 董生智, 苏 航, 李岫梅, 等. 永磁体空间磁场的计算与分析[J]. *金属功能材料*, 2001, 1(8): 14-17.
- [38] 汤双清, 沈 洁, 陈习坤, 等. 基于磁荷模型的永磁体空间磁场的有限元分析与计算[J]. *三峡大学学报(自然科学版)*, 2003, 25(5): 452-455.

(编辑:朱立影)