# 径向支承刚度非对称转子系统振动特性分析\*

曾振坤1,张大义1.2,黄 巍3,杨 诚1

(1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院,北京 100191;2. 北京航空航天大学 航空发动机结构强度北京市重点实验室,北京 100191;3. 中国航发商用航空发动机有限责任公司,上海 200241)

摘 要:为研究径向支承刚度非对称对航空发动机转子系统的影响,采用集中参数模型和有限元理 论建立此类转子振动特性的求解方法,研究关键影响参数及影响规律。结果表明:支承刚度非对称导致 转子系统在两正交方向质量刚度特性不同,使稳态响应相位非同步变化和幅值差异,这是引发转子反进 动涡动和椭圆形轴心轨迹的内在原因。增大支承刚度非对称程度使转子椭圆进动轨迹离心率增大,各阶 临界转速单调变化;增大支承阻尼能有利于降低支承刚度非对称对转子响应幅值和进动状态的不利影 响;利用 ANSYS 求解刚度非对称转子系统的多阶模态频率误差不大于 0.3%,稳态响应峰值误差不大于 0.96%,验证了利用 ANSYS 求解的可行性。

关键词: 支承刚度; 刚度非对称; 临界转速; 不平衡响应; 有限元 中图分类号: V434.21 文献标识码: A 文章编号: 1001-4055 (2022) 02-200559-10 DOI: 10.13675/j.cnki. tjjs. 200559

# Analysis of Vibration Characteristics of Rotor System with Asymmetric Radial Support Stiffness

ZENG Zhen-kun<sup>1</sup>, ZHANG Da-yi<sup>1,2</sup>, HUANG Wei<sup>3</sup>, YANG Cheng<sup>1</sup>

(1. School of Energy and Power Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;2. Beijing Key Laboratory of Aero-Engine Structure and Strength,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;

3. AECC Commercial Aircraft Engine Co., Ltd, Shanghai 200241, China)

Abstract: In order to study the effects of asymmetric radial support stiffness on the aero-engine rotor system, a solution method for vibration characteristic, key parameters and the influence of them were studied based on the lumped parameter model and 3D finite element method. The results show that the asymmetry of support stiffness causes the rotor system different mass and stiffness characteristics in the two orthogonal directions, and makes the asynchronous change of the steady-state response phase and the difference of the amplitude, which is the internal reason causing backward precession and oval axis orbit of the rotor system. When the asymmetry of the support stiffness increases, the elliptic eccentricity of the rotor's axis orbit increases, and the critical speeds change monotonously. While increasing the support damping, the adverse effect of the asymmetry of support stiffness on the rotor's response amplitude and precession state is reduced. The relative error of several modal fre-

<sup>\*</sup> 收稿日期: 2020-07-30; 修订日期: 2020-11-17。

基金项目:国家自然科学基金(11772022;91860205);国家科技重大专项(J2019-I-0008)。

作者简介:曾振坤,硕士生,研究领域为航空发动机转子动力学。

通讯作者:张大义,博士,副教授,博导,研究领域为航空发动机振动分析及抑制。

引用格式: 曾振坤,张大义,黄 巍,等. 径向支承刚度非对称转子系统振动特性分析[J]. 推进技术, 2022, 43(2):
 200559. (ZENG Zhen-kun, ZHANG Da-yi, HUANG Wei, et al. Analysis of Vibration Characteristics of Rotor System with Asymmetric Radial Support Stiffness[J]. Journal of Propulsion Technology, 2022, 43(2):200559.)

quencies of the rotor system with asymmetric support stiffness obtained by ANSYS is less than 0.3%, and that of the peak amplitude of steady-state response is less than 0.96%, which verifies the feasibility of ANSYS.

Key words: Support stiffness; Asymmetric stiffness; Critical speed; Unbalanced response; Finite element method

## 1 引 言

准确预测航空发动机转子系统的临界转速等动 力学特性是进行总体结构设计与动力学优化设计的 关键前提。航空发动机由于安装节位置和转子载荷 外传路线的影响,在工程实际中难免存在支承系统 径向支承刚度非对称的问题,这会增加转子系统临 界转速和不平衡响应特征的复杂性,如临界转速增 多、反进动涡动可能被激起、不平衡响应幅值预测困 难、动平衡过程更加繁琐等<sup>[1]</sup>。

针对支承刚度非对称转子振动特性的理论研究 方法,可分为解析法和数值法两种。在解析法中,一 般采用集中参数<sup>[2-6]</sup>或连续梁<sup>[7-9]</sup>进行建模与分析。 1930年至今,Smith<sup>[2]</sup>,Ginsberg<sup>[3]</sup>,顾家柳等<sup>[4]</sup>,Lee<sup>[5]</sup>, 张连祥等<sup>[6]</sup>先后建立了支承刚度非对称Jeffcott转子 系统的集中参数模型,推导得到了运动平衡方程和 稳态响应,结果显示转子盘心进动轨迹一般是椭圆 形,频响曲线中两阶临界转速取决于竖直和水平支 承刚度,转子在两转速之间运行时发生反进动,张连 祥还探究了支承刚度非对称度和支承交叉耦合度对 临界转速的影响。20世纪60年代至今,Morton<sup>[7]</sup>, Parkinson<sup>[8]</sup>,廖明夫等<sup>[9]</sup>借助连续梁模型针对刚度非 对称转子系统开展研究,其中廖明夫指出各向异性 刚度中介轴承会导致双转子系统的"重力临界" 现象。

数值法可分为传递矩阵和有限元两类建模方法。传递矩阵方法由 Prohl于 1945年提出并用于计 算转子的临界转速<sup>[10]</sup>,经 Lund<sup>[11]</sup>和 Bansal等<sup>[12]</sup>逐步 完善后被广泛应用。1987年至今,钟一谔等<sup>[13]</sup>、何洪 庆等<sup>[14]</sup>、李全通等<sup>[15]</sup>建立了支承刚度各向异性下弹 性支承、圆盘等部件的传递矩阵,对其临界转速、不 平衡响应进行研究。王黎等<sup>[16]</sup>利用 Riccati 传递矩阵 方法实现了某型燃机涡轮非对称支承均布质量物理 模型的建立,研究了转子系统的稳定性。1972年, Ruhl等<sup>[17]</sup>首先将有限元法用于转子动力特性计算, 而后随着计算机技术的成熟,有限元法得到迅猛发 展和广泛应用。Kenzou<sup>[18]</sup>采用渐进方法对各向异性 支承单盘转子展开研究,求解其瞬态响应特性;Genta<sup>[19]</sup>基于铁摩辛柯一维梁单元对转子非对称、支承非 对称以及转静子同时非对称即双重非对称转子支承 系统开展了研究;1993年,Stephenson等<sup>[20]</sup>基于二维 轴对称谐波单元建立支承非对称转子系统的有限元 模型。

在商用有限元软件方面,ANSYS,SAMCEF,NAS-TRAN等能够采用内置弹簧单元建立支承刚度非对称转子模型并完成求解,但求解过程中,能否判断转 子反进动涡动被激起尚无明确的判断准则<sup>[21]</sup>,进而 影响转子系统响应特征的可信度。例如,ANSYS在 对支承刚度非对称转子模态分析时,所获得Campbell 图中等转速线与反进动对应的动频线存在交点,但 反进动涡动在实际工作中是否会被激起还需要进一 步确定。

综上,在解析法方面,已有研究仅借助数学求解 结果进行粗略阐述,并从机理上清晰解释各类物理 现象的本质;在数值方法方面,最适用于工程复杂结 构的是有限元法,但鲜有文献采用三维有限元法识 别支承刚度非对称转子动力学特性的关键影响参数 及影响规律;在商用有限元软件方面,由于内在求解 流程不清晰,因此求解结果的准确性有待验证,尚不 能用于工程实际。本文首先基于集中参数模型对简 单的支承刚度非对称转子系统的振动特性进行求 解,并从机理上定性揭示支承非对称转子系统振动 特性的引发机制;其次建立基于自编程序的支承刚 度非对称转子的三维有限元分析方法,并识别系统 动力学特性的关键设计参数及影响规律;而后对AN-SYS求解这类问题的准确性进行对比验证,为工程人 员的软件使用提供数据支撑。

## 2 方 法

#### 2.1 航空发动机转子支承系统结构形式及力学特征

航空发动机转子支承系统指由轴承至安装节的 一系列结构,各结构的刚度串联或并联共同决定各 支点的刚度,如图1所示,该支点支承刚度为轴承、弹 性支承、幅板、机匣和安装节的刚度串联。

径向支承刚度非对称是航空发动机转子系统中 难以避免的问题。图2中,某高涵道比涡扇发动机通 过前后安装节吊挂于吊架结构正下方<sup>[22]</sup>,安装节竖 直方向刚度显著大于水平方向刚度;图1中的承力支



Fig. 1 Supporting structure for the fan component of one aero-engine

板,由于布置润滑导管或冷却通道的需求,部分支板 会被增粗加厚,也会带来支承刚度的非对称性<sup>[23-24]</sup>。 此外,在一些故障状态下,例如鼠笼笼条的局部断裂 会使鼠笼的刚度呈现不对称性<sup>[25]</sup>。航空发动机转子 系统径向支承刚度非对称会增加转子设计和动力 学特性分析的难度。廖明夫等<sup>[9]</sup>指出中介轴承刚度 各向异性会导致重力激起双转子系统2倍频正进动; Semenov等<sup>[24]</sup>通过全尺寸转子动力学试验发现支承 刚度非对称使航空发动机出现共振点增多、椭圆进 动轨迹的明显现象。

航空发动机的转子支承系统可简化为如图3所 示的力学模型<sup>[5]</sup>,不计支承阻尼时,支承力与支点位 移的关系

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
(1)

式中刚度系数矩阵 K 中各项  $k_{ij}(i,j$  可为 x,y)代表支点在j 方向有单位位移时需要施加的沿着i 方向的单位力;  $k_{xi}$ ,  $k_{xi}$  为交叉刚度系数。

不同方向坐标系对应的**K**可由矩阵正交变换 得到。当支承刚度非对称时,不同方向的坐标系对 应不同的**K**,可得 $k_{xx} \neq k_{yy}, k_{xy} \neq k_{yx} \neq 0$ 。当转子系 统的交叉刚度系数差别不大时,**K**可正交变换为对 角阵以简化计算<sup>[13]</sup>。

# 2.2 算例

为能够推导获得解析解,并便于与现有工作对





比,选取文献[13]中的偏置单盘单转子,分别采用解 析法、自编有限元法和商用软件对其动力学特性进 行计算分析与对比,转子结构如图4所示。



Fig. 3 Simplified model of the rotor system with asymmetric support stiffness<sup>[5]</sup>



Fig. 4 Rotor system structure diagram

转子参数如下:钢制圆盘质量  $m_d$ =20kg,半径 R= 12cm,极转动惯量  $J_p$ =1440kg·m<sup>2</sup>,直径转动惯量  $J_d$ = 720kg·m<sup>2</sup>,偏心距 e=20mm;钢制等截面转轴跨度 l= 75cm,直径 d=3cm;圆盘距离左支点 a=25cm;两端 弹性支承刚度相同,各向同性工况下弹性支承主刚 度: $k_x = k_y = 81EI/l^3$ ,刚度非对称工况下: $k'_x = 2k'_y =$ 162 $EI/l^3$ ,其中I为转轴截面惯性矩,E=206GPa为钢的 弹性模量。

## 2.3 集中参数模型解析方法

利用集中参数法建立力学模型,将圆盘质量和 转动惯量集中于圆盘质心c处,忽略转轴自重,简化 后模型如图5所示。



Fig. 5 Lumped parameter model of the rotor system

## 2.3.1 自由振动微分方程及特征值求解

设图 5 转子盘心 O'投影在 xAy 平面的坐标为(x, y),文献[13]借助拉格朗日方程推导得到转子系统在 集中参数模型下的运动微分方程

$$\begin{cases} m_{d}\ddot{x} + k_{11}x + k_{14}\theta_{y} = 0\\ m_{d}\ddot{y} + k_{22}y - k_{23}\theta_{x} = 0\\ J_{d}\ddot{\theta}_{x} + J_{p}\Omega\dot{\theta}_{y} - k_{32}y + k_{33}\theta_{x} = 0\\ J_{d}\ddot{\theta}_{y} - J_{p}\Omega\dot{\theta}_{x} + k_{41}x + k_{44}\theta_{y} = 0 \end{cases}$$
(2)

(3)

为将微分方程组简化为矩阵形式,定义位移向量

 $\boldsymbol{u} = \left[ x, y, -\theta_x, \theta_y \right]^{\mathrm{T}}$ 刚度矩阵

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{14} \\ k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \\ k_{41} & k_{44} \end{bmatrix}$$
(4)

质量矩阵M和陀螺矩阵J为

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{\mathrm{d}} & & & \\ & \boldsymbol{m}_{\mathrm{d}} & & \\ & & \boldsymbol{J}_{\mathrm{d}} & \\ & & & \boldsymbol{J}_{\mathrm{d}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & & -\boldsymbol{J}_{\mathrm{p}} \\ 0 & & \boldsymbol{J}_{\mathrm{p}} \end{bmatrix} (5)$$

式中 θ<sub>x</sub>为圆盘在 xAz 平面投影与 z 轴夹角, θ<sub>y</sub>为 圆盘在 yAz 平面投影与 z 轴夹角, Ω 为圆盘自转角速 度, k<sub>ij</sub>(*i*, *j*=1, 2, 3, 4)为圆盘中心沿 u 中第 *i* 行坐标有 单位位移或转角时所需要的沿 u 中第 *j* 行坐标的力或 力矩, 即转子系统在不同方向的刚度系数。当转轴 两端为刚性支座时, 刚度系数的大小借助材料力学 梁弯曲公式得到; 计入弹性支承时, 刚度系数由轴和 支承的刚度串联等效得到。

最终,支承刚度非对称转子系统运动微分方程 简化为

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\ddot{u}} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\dot{u}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = 0 \tag{6}$$

下面对方程进行求解,设方程的特解为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{7}$$

$$\left[-\omega^2 M + i\Omega\omega J + K\right]u_0 = 0$$
(8)

得到频率方程为

 $\left| -(\boldsymbol{M} - i\boldsymbol{J})\boldsymbol{\omega}^2 + \boldsymbol{K} \right| = 0 \tag{10}$ 

将算例数据代入方程,可得轴对称刚度工况下 转子系统各阶临界转速,并与文献[13]中结果对比 见表1,两者一致性较好。

2.3.2 强迫振动微分方程及稳态响应求解

首先确定转子系统不平衡力激励 Q

$$\boldsymbol{Q} = \left[ m \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{\Omega}^2 \cos \boldsymbol{\Omega} t, m \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{\Omega}^2 \sin \boldsymbol{\Omega} t, 0, 0 \right]^{T}$$
(11)

Table 1 Comparison of critical speed results (rad/s)

Critical speed	$\omega_{1B}$	$\omega_{1\mathrm{F}}$	$\omega_{_{2\mathrm{B}}}$	$\omega_{\mathrm{2F}}$
Ref.[13]	202.3	204.4	660.6	-
This paper	202.3	204.5	661.0	-
Relative error/%	0.01	0.05	0.24	-

$$Q = me_1 \Omega^2 \operatorname{Re}(b e^{i\Omega t})$$
(12)

式中Re代表取复数的实部, $\boldsymbol{b} = [1, -i, 0, 0]^{\mathrm{T}}$ 。

转子系统受不平衡力激励的强迫运动微分方程 由方程(6)可得

 $M\ddot{u} + \Omega J\dot{u} + Ku = me_1 \Omega^2 \operatorname{Re}(be^{i\Omega t})$ (13) 设方程的特解为

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{Re}\left(\boldsymbol{u}_{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}t}\right) \tag{14}$$

将之代入方程得到

 $\boldsymbol{u}_{0} = m\boldsymbol{e}_{1}\boldsymbol{\Omega}^{2} \left[ -\boldsymbol{\Omega}^{2}\boldsymbol{M} + i\boldsymbol{\Omega}^{2}\boldsymbol{J} + \boldsymbol{K} \right]^{-1} \boldsymbol{b} \quad (15)$ 式中i为虚数单位,转子系统的不平衡响应由式 (15)代入式(14)即可得到。 $\boldsymbol{u}_{0}$ 为复数列集。

为简化表述,设:

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{m} + \mathrm{i}\boldsymbol{n} = \left| \boldsymbol{u}_0 \right| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \tag{16}$$

设相位角 $\alpha$ 中各项元素满足 $\tan\alpha_i = n_i/m_i$ ,则不 平衡响应可表示为

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{Re}\left(\left|\boldsymbol{u}_{0}\right| e^{i(\boldsymbol{\Omega}t + \alpha)}\right) = \left|\boldsymbol{u}_{0}\right| \cos\left(\boldsymbol{\Omega}t + \alpha\right) \quad (17)$$

即在转子不平衡激励作用下转子系统稳态响应 振幅为 $|u_0|$ ,相角为 $\alpha$ 。

## 2.4 基于自编程序的三维有限元分析方法

本节建立支承刚度非对称转子动力学特性的有 限元求解方法,并验证方法的准确性。

转子结构的有限元运动微分方程如式[26-27]

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\ddot{u}} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\dot{u}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{18}$$

式中 M 为转子模型的质量矩阵,J 为陀螺矩阵, 当不考虑应力硬化及旋转软化时,K 为只包含几何刚 度部分的转子刚度矩阵;f 为作用在转子上的外部激励向量。

只考虑转子不平衡力作为振动激励时,其在某 节点x,y两方向的分量为

$$f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} me_0 \Omega^2 \cos\Omega t \\ me_0 \Omega^2 \sin\Omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cos\Omega t \\ F_0 \sin\Omega t \end{bmatrix}$$
(19)

针对支承刚度非对称转子系统,建立有限元离 散的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵,在MATLAB中 利用自编程序完成转子系统振动特性求解。

计算得到算例轴对称转子系统前四阶临界转速

和稳态不平衡响应幅频特性曲线,并与ANSYS计算结果进行对比,如表2和图6所示,可见两种方法求 解结果一致性较好。

 Table 2
 Comparison of critical speeds of obtained by the

	two	o metnods		(HZ)
Critical speed	$\boldsymbol{\omega}_{1\mathrm{B}}$	$\boldsymbol{\omega}_{1\mathrm{F}}$	$\omega_{2B}$	$\omega_{2\mathrm{F}}$
This paper	31.74	32.04	97.51	214.70
ANSYS	31.70	31.99	97.85	215.91
Relative error/%	0.14	0.14	0.31	0.56



Fig. 6 Comparison of amplitude-frequency curves obtained by the two methods

# 3 结果与讨论

## 3.1 算例支承刚度非对称转子系统动力特性

图 7 为解析方法求得支承刚度对称与非对称两种情况下的 Campbell 图。可见,转速为0时,刚度非 对称转子系统共有四阶不同的模态频率,且第一、三 阶模态频率与支承刚度对称时的相同。

将算例数据代入式,可得转子系统稳态不平衡 响应,包括幅频特性和相频特性曲线,分别如图8和 图9所示。由图8可见,刚度非对称转子系统稳态响 应幅值曲线出现3处峰值,相较支承刚度对称时,转 子系统临界转速增多,且反进动临界转速处出现响 应峰值。由图9可知*x*,*y*方向振动相位均变化5次, 每次发生π的突变;突变处横轴转速对应于正进动临 界转速、反进动临界转速以及反共振转速;在临界转 速处*x*,*y*相位差同时突变,而反共振点处只有单方向 的相位差发生变化。

考虑转子不平衡激励下转子系统涡动特性时, 需要将两方向运动合成,形成转子系统在*xoy*平面的 运动特性。设沿*x*,*y*方向的振动响应相位分别为 $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,两方向振动相位差  $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ,基于两正交方 向上同频率简谐振动合成理论得到转子轴心轨迹与 *x*,*y*方向振动的关系如表 3 所示。可见,转子系统稳 态不平衡响应相位差决定其涡动特性。结合图9得到 相位差 $\Delta \varphi$ 随转速的变化曲线如图10所示。可见,转子在



Fig. 7 Campbell diagram of the rotor system



Fig. 8 Amplitude-frequency curves of the rotor system

(202.2rad/s, 218.3rad/s)、(692.3rad/s, 694.5rad/s)两转 速区间内反进动涡动。注意到,两区间的边界均为 反共振转速,此时转子在x或y向振动幅值为0,只沿 另一方向做简谐运动,这种特殊的涡动状态是正反 进动涡动的中间状态。 利用 Newmark-β法直接求解方程,得到支承刚 度非对称转子转速在反进动区间前(180rad/s)、区间 内(210rad/s)和区间后(240rad/s)时稳态响应归一化 转子轴心轨迹,见图11。可见,转子在反进动转速区 间外逆时针进动,即正进动,而在区间内顺时针进 动,即反进动。这验证了前文反进动区间结论的正 确性。



Fig. 9 Phase-frequency curves of the rotor system

Table 3	Properties	of com	nosite	axis	orbit
Table 5	1 roperties	or com	posite	anis	ULDIU

$\Delta \varphi$	Axis orbit	Rotation direction	Shape of the orbit
$\pi/2, -3\pi/2$	Right ellipse	Clockwise	$\frac{y}{\sqrt{x}}$
$-\pi/2, 3\pi/2$	Right ellipse	Anti-clockwise	
$0, \pm \pi$	Straight line	١	١
Else	Oblique ellipse	\	١







asymmetric support stiffness

## 3.2 力学机理分析

## 3.2.1 进动状态的变化机理

转子系统进动轨迹可以视为x,y两方向运动的 合成,而轨迹的特性取决于两方向的相位。因此,支 承刚度非对称转子进动状态异于轴对称转子的原因 在于不平衡响应相频特性。

为简化分析,先不计转子系统转盘偏摆运动即 陀螺力矩影响,此时强迫振动状态下系统微分方 程为

$$m\ddot{x} + k_x x = F_0 \cos\Omega t$$
  

$$m\ddot{y} + k_y y = F_0 \sin\Omega t$$
(20)

或

$$M\ddot{u} + Ku = F \tag{21}$$

式中质量矩阵 $M = \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}$ , 刚度矩阵 $K = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \end{bmatrix}$ , 广义坐标向量 $u = \begin{bmatrix} x, y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ , 广义力向量 $F = \begin{bmatrix} F_0 \cos\Omega t, F \sin\Omega t \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 。

显然,此时运动微分方程中质量、刚度矩阵均为 对角矩阵,x,y方向振动不耦合,即转子系统在两方 向的运动可视作两个独立的线性系统,其振动特性 只取决于各自的刚度质量特性。对于轴对称转子,x, y方向两线性系统结构参数相同,在同一转速达到临 界转速、相位突变。因此在整个转速范围内,轴对称 转子x,y方向响应的相位差始终保持不变,转子始终 保持正进动状态。支承刚度非对称使转子系统的对 称性丧失,两方向刚度质量特性不同,某一方向提前 达到临界转速后发生重心转向,相位突变,导致转子 反进动。

当计入转盘偏摆运动即陀螺力矩影响时,轴对称转子 x,y方向响应的相位差整个转速范围内仍保持同步,转子一直同步正进动;支承刚度非对称转子两方向稳态响应的相位差在临界转速处同时突变, 不会引起  $\Delta \varphi$  的改变,但在反共振转速处,只有某一方向振动相位差发生变化, $\Delta \varphi$  发生突变,进而转子进动状态改变,当 $\Delta \varphi = -\pi/2$ 或 $3\pi/2$ 时出现同步反进动状态。

进动状态改变导致转子系统临界转速个数变 化。从图6、图7可知,对于只正进动的轴对称转子而 言,当转速达到Campbell图中等转速线与正进动动 频线的交点对应转速时,代表激励频率与系统特征 值频率相同,转子响应陡增,即转速达到临界转速。 支承刚度非对称转子由于存在反进动涡动状态,在 Campbell图中三个上述交点处均会出现响应陡增的 情况,有三阶临界转速。

第2期

第43卷

### 3.2.2 轴心轨迹的变化机理

为简化分析,同样先讨论不计陀螺力矩的转子 系统。由于此时x,y方向振动相互独立且取决于各 自质量刚度特性,当 $k_x \neq k_y$ 时,两方向的响应幅值便 不同,合成的轴心轨迹即为椭圆。

转子系统计入陀螺力矩时,刚度、陀螺矩阵如 式、所示,均存在非对角项,即四个广义自由度间同 时存在弹性和惯性耦合,刚度矩阵的非对角项 k<sub>14</sub>, k<sub>41</sub>,k<sub>23</sub>,k<sub>32</sub>决定弹性耦合程度,而陀螺矩阵中的 J<sub>p</sub>决 定惯性耦合程度,进一步影响不平衡响应。

定义转动惯量倍数 α<sub>1</sub>表示当前转子转动惯量 较原始转子系统的倍数;定义支承刚度非对称系 数 α<sub>k</sub>为

$$\alpha_k = \frac{k_x - k_y}{k_x + k_y} \tag{22}$$

以衡量支承x, y方向支承刚度非对称程度, 当 $k_x$ 相较 $k_x$ 越大,  $\alpha_k$ 越接近1; 定义响应偏差系数 $\alpha_{res}$ 为

$$\alpha_{\rm res} = \left| \frac{u_x - u_y}{u_x + u_y} \right| \tag{23}$$

以衡量转子在x,y方向不平衡响应幅值差异程 度,其中 $u_x,u_y$ 分别为x,y方向响应幅值, $\alpha_{res}$ 越接近于 1时两幅值差异越大,轴心轨迹椭圆的离心率越大。 图 12出了算例转子系统添加 1Ns/m 线性支承阻尼后 前两阶临界转速下 $\alpha_{res}$ 随 $\alpha_J$ 和 $\alpha_k$ 的变化曲线。可见, 转子系统在前两阶临界转速时稳态响应轴心轨迹椭 圆的离心率随转子转动惯量的增大而减小,随支承 刚度非对称程度的增大而增大。





#### 3.3 影响参数分析

利用自编有限元法对算例中支承刚度非对称转 子系统振动特性进行分析。图 13 给出对应的 Campbell 图,可见与解析解相似,在 0 转速下模态频率数目 增加,相较轴对称转子,正进动模态频率增大而反进 动模态频率不变。值得注意的是,与轴对称转子不 同,第三、四阶反进动模态频率随转速的增加而增 加,如图中 N3 B和 N4 B所示。

图 14 和图 15 分别给出了支承刚度非对称工况 下转子系统在盘心节点的幅频特性曲线和相频特性 曲线。由图 14 可知,相较轴对称转子,曲线峰值增 多,且反进动临界转速处出现峰值,即转子不平衡力 激起了反进动涡动。由图 15 可知,转子系统响应相 位突变次数增多且出现了两正交方向振动相位非同 步变化的情况。以上规律与解析解结论一致,相互 验证。



Fig. 13 Campbell diagram of the rotor system with asymmetric support stiffness



Fig. 14 Amplitude-frequency curves for the node in the center of the disk

3.3.1 支承刚度非对称系数的影响

由上文可知,支承刚度非对称的程度会对转子 系统振动特性产生影响。图16给出了k<sub>y</sub>一定而k<sub>x</sub>变 化时,即不同 α<sub>k</sub>下转子系统第一、三阶模态正反进动 动频线。可见, $\alpha_k$ 增大时,正进动动频线上移明显而 反进动动频线变化不显著,两者逐渐分离。这表明 转子系统反进动模态频率取决于刚度较小的支承刚 度,而正进动模态频率取决于较大的刚度,支承刚度 非对称程度的增大使转子系统在两正交方向上质量 刚度特性差异增大,从而使正反进动模态频率差距 增大。另外, $\alpha_k = 0.1$ 时,图中各阶动频线走向仍与 轴对称转子的相同;而当 $\alpha_k$ 较大时,第一阶正进动、 第三阶反进动动频线走向反转。即支承刚度非对称 程度越大会使转子系统模态频率曲线随转速变化规 律更为复杂。



Fig. 15 Phase-frequency curves for the node in the center of the disk



Fig. 16 Curves for modal frequency with rotation rate for different  $\alpha_k$ 

图 17 给出了支承阻尼为 1Ns/m 时,不同 α<sub>k</sub>下盘 心节点的稳态不平衡响应幅频曲线。可见,α<sub>k</sub>增大 时,第一阶正进动和第三阶反进动临界转速增大,而 前两阶反进动临界转速减小,刚度非对称转子临界 转速与轴对称转子的差距越大,进行避开共振的设 计会更为困难。此外,响应峰值对α<sub>k</sub>的变化不敏感。



Fig. 17 Amplitude-frequency curve of the node in the center of the disk for different  $\alpha_k$ 

3.3.2 支承阻尼的影响

阻尼会对转子系统振动特性产生影响。图18给 出了转子系统支承刚度为k<sub>x</sub> = 2k<sub>y</sub>时,不同支承阻尼 下的盘心节点稳态不平衡响应幅频特性曲线。可 见,支承阻尼增大,后三阶临界转速对应响应峰值减 小明显;而前两阶响应峰值对支承阻尼大小变化不 敏感(支承阻尼达到10<sup>3</sup>Ns/m量级时才显著减小)。 其原因是:系统前两阶模态振型节线位于转轴两端, 当激励频率接近此阶临界转速时,很难通过支点振 动耗散能量;而其它阶模态振型支点位移较大,支点 阻尼易耗散振动能量,减小振幅。



Fig. 18 Amplitude-frequency curve of the node in the center of the disk for different damping

支承阻尼由于改变了转子系统固有特性,对反进动区间跨度也有影响。图19给出了支承阻尼对0~2000rad/s内四个反进动区间跨度的影响。可见增大支承阻尼能减小甚至消除转子部分反进动区间。

3.4 ANSYS计算支承刚度非对称转子动力学特性 的可行性分析

采用与 3.3 节相同的有限元模型,借助 ANSYS 16.0 中 QR Damped 法求解系统特征值,与自编程序求 解结果对比如表4所示。可见,ANSYS得到转子系统 1000 rad/s转速下前5阶模态频率结果与本文结果最

(Hz)

N3 B

277.17

277.35

0.1



Fig. 19 Curves of backward precession interval length with damping

大相对误差仅为0.3%,一致性好。因此,工程人员可 以直接运用 ANSYS 对支承刚度非对称转子系统的特 征值频率进行计算分析。

图 20 给出了在弹性支承处给定 50Ns/m 线性阻 尼时, ANSYS采用 Full法谐响应求解结果与本文计算



Modal

This paper

ANSYS

Relative error/%

Fig. 20 Amplitude-frequency curves of the node in the center of the disk obtained by the two methods

## 4 结 论

通过本文研究,得到以下结论:

(1)支承刚度非对称使转子系统的对称性丧失, 在非旋转态时重频现象消失;在升降速过程中,出现 共振峰值的临界转速增多,对应的相位突变次数也 增多。

(2)支承刚度非对称转子系统在两正交方向上 质量刚度特性不同,会使稳态响应发生两方面的变 化:其一是两方向响应相位非同步变化,导致转子反 进动涡动;其二是两方向稳态响应幅值不同,合成椭 圆形轴心轨迹,前两阶临界转速下椭圆离心率随陀 螺力矩的增大而减小,随刚度非对称程度的增大而 增大。

(3)支承刚度非对称性增大时,转子系统临界转 速值会与对称转子的显著不同,因此在航空发动机 转子动力学设计中应给予重视;增大支承阻尼能有 效降低转子稳态不平衡响应峰值,减小甚至消除转 子反进动区间,即有利于降低支承刚度各向异性对 转子系统动力学特性的不利影响。

结果的对比。可见,两种方法得到的临界转速大小

一致性较好,误差不大于0.15%;两种方法得到盘心

x, y方向在各个临界转速下的稳态响应峰值一致性好,

最大误差为0.96%。在反进动临界转速处,ANSYS计

算结果出现响应峰值,与自编程序结果一致。因此,

ANSYS计算支承刚度非对称转子系统时,不仅能正

 Table 4
 Comparison of natural frequency at 1000 rad/s

obtained by the two methods

N2 B

84.62

84.67

0.1

N2 F

220.34

220.45

0.1

N1 F

34.6

34.7

0.3

确判断转子进动状态,而且准确获取响应峰值。

N1 B

31.3

31.3

0.1

(4)将解析解、自编三维有限元程序和ANSYS转 子动力学求解模块相互对比,验证了ANSYS用于刚 度非对称转子系统模态特性和稳态不平衡响应求解 时的准确性,前5阶模态频率最大误差为0.3%,稳态 响应峰值最大误差为0.96%,工程人员可以直接运用 ANSYS对支承刚度非对称转子系统的动力学问题进 行计算分析。

**致** 谢:感谢国家自然科学基金、国家科技重大专项的 资助。

## 参考文献

- [1] Childs D. Turbomachinery Rotor Dynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis [M]. New York: Wiley, 1993.
- Smith D M. The Motion of a Rotor Carried by a Flexible Shaft in Flexible Bearings [J]. Proceedings of the Royal Society, 1933, 142(846): 92-118.

- [3] Ginsberg J. Engineering Dynamics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- [4] 顾家柳,丁奎元,刘启洲.转子动力学[M].北京:国 防工业出版社,1985.
- [5] Lee C W. Vibration Analysis of Rotors [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [6] 张连祥,赵晓宇.支承非对称转子系统动力学分析 [C].大连:第11届全国转子动力学学术讨论会, 2014.
- [7] Morton P G. Influence of Coupled Asymmetric Bearings on the Motion of a Massive Flexible Rotor [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1967, 182(1): 255-280.
- [8] Parkinson A G. The Vibration and Balancing of Shafts Rotating in Asymmetric Bearings [J]. Journal of Sound and Vibration, 1965, 2(4): 477-501.
- [9] 廖明夫, 刘永泉, 王四季, 等. 中介轴承对双转子振 动的影响[J]. 机械科学与技术, 2015, 32(5): 641-646.
- [10] Prohl M A. A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors[J]. Transactions of the ASME, 1945, 12(3): 142-148.
- [11] Lund J W. Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings[J]. Journal of Engineering for Industry, 1974, 96(2): 509-517.
- [12] Bansal P N, Kirk R G. Stability and Damped Critical Speeds of Rotor-Bearing Systems [J]. Journal of Engineering for Industry, 1975, 97(4): 1325-1332.
- [13] 钟一谔,何衍宗,王 正,等.转子动力学[M].北 京:清华大学出版社,1987.
- [14] 何洪庆,张小龙,沈达宽,等.涡轮泵转子的临界转速研究(Ⅱ)非均匀支承转子临界转速的传递矩阵法
  [J]. 推进技术, 1999, 20(1): 38-45. (HE Hong-qing, ZHANG Xiao-long, SHEN Da-kuan, et al. Study on Critical Rotational Speed of Turbopump Rotors (Ⅱ) Transfer Matrix Method for Non-Homogeneous Support Rotors[J]. Journal of Propulsion Technology, 1999, 20 (1): 38-45.)
- [15] 李全通, 蒲秋洪, 杨俐骏, 等. 不对称转子临界转速的计 算方法[J]. 燃气涡轮试验与研究, 2000, 13(3): 31-35.
- [16] 王 黎,韩 磊,韩清凯,等.各向异性支承的分布 质量转子系统的稳定性分析[J].机械设计,2008,25

(5): 15-17.

- [17] Ruhl R L, Booker J F. A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems[J]. Journal of Engineering for Industry, 1972, 94(1): 128-132.
- [18] Kenzou N N. Response in Passing Through Critical Speed of Arbitrarily Distributed Flexible Rotor System, Part 2: Case with Gyroscopic Effect [J]. Bulletin of JSME, 1983, 26(217): 1205-1212.
- [19] Genta G. Whirling of Unsymmetrical Rotors: a Finite Element Approach Based on Complex Coordinates [J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 124(1): 27-53.
- [20] Stephenson R W, Rouch K E. Modeling Rotating Shafts Using Axisymmetric Solid Finite Elements with Matrix Reduction[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1993, 115(4): 484-489.
- [21] ANSYS Incorporation. Mechanical APDL Rotordynamic Analysis Guide[M]. USA: Ansys Incorporation, 2017.
- [22] 洪 杰,马艳红,张大义. 航空燃气轮机总体结构设 计与动力学分析[M]. 北京:北京航空航天大学出版 社,2014.
- [23] Semenov S V, Nikhamkin M S, Sazhenkov N A, et al. Condition Monitoring of Aircraft Engine Rotor System with Stiffness Anisotropy of Rotor Supports. Comparative Analysis of Accelerometers Mounting Schemes [C]. Lyon: International Conference on Condition Monitoring of Machinery in Non-Stationary Operation, 2014.
- [24] Semenov S V, Nikhamkin M S, Korepanova O V, et al. Experimental Investigation of Rotor Dynamics in Aircraft Engine with Two-Axis Stiffness Anisotropy of Supports
   [C]. Petersburg: 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, 2014.
- [25] 温保岗,王美令,任红军,等. 鼠笼局部断裂的刚度 特性及其转子动力学特性分析[J]. 动力学与控制学 报,2018,16(6):514-519.
- [26] 彭 刚,李 超,曹 冲,等.冲击激励转子系统动力学响应及安全性设计[J].推进技术,2018,39(5): 1111-1121. (PENG Gang, LI Chao, CAO Chong, et al. Dynamic Response and Safety Design of Rotor System with Impact Excitation [J]. Journal of Propulsion Technology, 2018, 39(5): 1111-1121.)
- [27] 洪杰,栗天壤,王永锋,等.叶片丢失激励下航空 发动机柔性转子系统的动力学响应[J].航空动力学 报,2018,33(2):257-264.

(编辑:梅 瑛)