配置点谱方法求解非均匀介质内辐射传热问题 *

李新宇[1]，赵家资[1]，胡　杨[1]，孙亚松[1]，马　菁[2]

（1. 西北工业大学 动力与能源学院，陕西 西安 710072；
2. 长安大学 汽车学院，陕西 西安 710064）

摘　要：发动机内的燃气等高温介质随着组分和浓度的变化，会引起折射率在空间上的非均匀分布，导致辐射能束沿着曲线传播，其相应的辐射传热过程也更为复杂。为了避免射线追踪方法的复杂计算、提高计算效率，提出了配置点谱方法求解二维非均匀介质内辐射传热问题。在求解过程中，角向采用离散坐标法处理，空间采用配置点谱方法处理。通过将三种非均匀介质内辐射传热问题的配置点谱方法结果与文献结果进行对比分析，发现配置点谱方法可以在较少的节点数下，获得准确、有效的计算结果。并且，采用配置点谱方法求解三种算例的计算时间消耗较少，均在20min以内。这将为进一步开展发动机复杂结构内高温燃气辐射快速仿真提供基础。

关键词：高温热辐射；非均匀介质；辐射强度；配置点谱方法；热传递

中图分类号：V231.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1001-4055（2021）11-2515-07

DOI：10.13675/j.cnki. tjjs. 200830

Collocation Spectral Method to Solve Radiative Heat Transfer in Inhomogeneous Medium

LI Xin-yu[1]，ZHAO Jia-zi[1]，HU Yang[1]，SUN Ya-song[1]，MA Jing[2]

（1. School of Power and Energy，Northwestern Polytechnical University，Xi'an 710072，China；
2. School of Automobile，Chang'an University，Xi'an 710064，China）

Abstract：With changing of composition and concentration of high-temperature gas in an aero-engine，the refractive index is inhomogeneous. The heat ray goes along a curved path. As a result，the corresponding radiative heat transfer process in the inhomogeneous medium is more difficult than that in the uniform medium. To avoid the complicated computation of the curved ray tracing method and improve the calculation efficiency，a collocation spectral method（CSM）was proposed to solve the radiative heat transfer problem in two-dimensional inhomogeneous medium. In the process of solving，the discrete ordinates method is adopted to discretize the angular term，and the spatial domain is discretized by the CSM. Three different cases of radiative heat transfer in an inhomogeneous medium are chosen. The CSM results are compared with available results in references. The comparisons indicate that the CSM has good accuracy and efficiency even using very litter nodes. Furthermore，the calculational times of these three cases by using CSM are less than 20 minutes. The CSM will provide a basis for rapid simulation of high-temperature gas radiation in the complex structure of the aero-engine.

Key words：High temperature thermal radiation；Inhomogeneous medium；Radiative intensity；Collocation spectral method；Heat transfer

* **收稿日期**：2020-10-20；**修订日期**：2021-01-13。

基金项目：国家自然科学基金（51976173；51976014）；陕西省重点研发计划（2018SF-387；2020GY-200）；江苏省自然科学基金（BK20201204）；太仓市基础研究计划（TC2019JC01）；中央高校基本业务费（3102019OMS701；300102229305）。

作者简介：李新宇，硕士生，研究领域为高温介质热辐射传热。

通讯作者：孙亚松，博士，副教授，博士生导师，研究领域为高温介质传热、两相流传热传质。

引用格式：李新宇，赵家资，胡　杨，等. 配置点谱方法求解非均匀介质内辐射传热问题[J]. 推进技术，2021，42(11)：2515-2521.（LI Xin-yu，ZHAO Jia-zi，HU Yang，et al. Collocation Spectral Method to Solve Radiative Heat Transfer in Inhomogeneous Medium[J]. *Journal of Propulsion Technology*，2021，42(11)：2515-2521.）

1 引 言

热辐射作为传热的三种基本方式之一，广泛应用于各种高温工业系统的燃烧室、换热设备中[1]。目前，随着航空发动机等高效动力装置中的燃烧室温度进一步提升，准确预测其高温热辐射传输影响，对其热防护结构的设计至关重要[2]。

航空发动机燃烧室内高温燃气属于参与性介质，热射线在其传输过程中会发生吸收、发射和散射的现象。另外，由于高温燃气的组分和浓度分布不均，其折射率随着空间会发生变化。热射线在传输过程中遵循 Fermat 原理沿着曲线传播，传输过程较为复杂。其控制方程将存在角向微分项，导致求解难度加大。传统求解热辐射问题主要分为两类：一类基于射线追踪法。常见的基于射线追踪原理方法有：蒙特卡罗法（MC）[3]、离散传递法（DTM）[4]及多网格蒙特卡罗法（MGMC）[5]等。研究者应用这些方法解决了一维到多维的变折射率问题，但这些方法计算量大且求解过程复杂，往往非常耗时且消耗大量计算资源。由于其计算精度高，一般作为可行性的数值方法及高效性的检验标准，具有参考价值。另一类利用各种数值方法求解辐射传递方程。近些年来发展用于求解非均匀介质内辐射问题的数值方法有：有限体积法（FVM）[6-7]、有限元方法（FEM）[8]、无网格方法（MLM）[9-10]、谱方法（SM）[11-12]、积分矩方法（IMM）[13]等。使用这些方法在求解低维问题做了大量工作，且能够取得较好结果；而对于多维问题的求解效果不是很理想，往往存在数值不稳定性，这是因为辐射传递方程具有强对流特性，所以需要进行方法的改进工作[14-15]。

谱方法具有无穷阶收敛速度及高精度特点，无色散误差和耗散误差，可在较少的节点数下获得高阶计算精度。目前，已在流体力学[16]，磁流体力学[17]等学科领域广泛应用。

本文将利用配置点谱方法（CSM）的上述优点，分析非均匀介质内高温热辐射的数值特性，构建相应的高温热辐射模型，求解二维非均匀参与性介质内辐射传热问题，并通过三个典型算例来检验该模型的计算精度，校验其可行性和有效性。

2 数值模型和求解过程

2.1 辐射传递方程

在直角坐标系下，对于二维非均匀参与性介质的辐射传递方程为

$$\begin{aligned}&\mu\frac{\partial I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega})}{\partial x}+\eta\frac{\partial I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega})}{\partial y}+\\&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\xi\left(\mu\alpha+\eta\beta\right)I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}\right)\right]+\\&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\beta\cos\varphi-\alpha\sin\varphi\right)I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}\right)\right]+\\&\left(\kappa_{\mathrm{a}}+\kappa_{\mathrm{s}}\right)I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}\right)=n^2\kappa_{\mathrm{a}}I_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{r})+\\&\frac{\kappa_{\mathrm{s}}}{4\pi}\int_{4\pi}I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}'\right)\Phi\left(\boldsymbol{\Omega}',\boldsymbol{\Omega}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}'\end{aligned}\tag{1}$$

式中 $I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega})$ 为辐射强度，其是空间位置 $\boldsymbol{r}$ 和方向 $\boldsymbol{\Omega}$ 的函数；n 是介质的折射率，随着空间变化；κ_{a} 和 κ_{s} 分别是介质的吸收和散射系数；θ 和 φ 分别是极角和方位角；$I_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{r})$ 是黑体辐射强度；$\Phi(\boldsymbol{\Omega}',\boldsymbol{\Omega})$ 是入射方向 $\boldsymbol{\Omega}'$ 到出射方向 $\boldsymbol{\Omega}$ 的散射相函数，本文考虑线性各向异性散射，其表达式为

$$\Phi(\boldsymbol{\Omega}',\boldsymbol{\Omega})=1+a_1\left(\mu\mu'+\eta\eta'+\xi\xi'\right)\tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{\Omega}'$，$\boldsymbol{\Omega}$ 为入射和辐射方向向量，μ，η 和 ξ 为方向余弦，它们之间的关系式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}&=\mu\boldsymbol{i}+\eta\boldsymbol{j}+\xi\boldsymbol{k}=\\&\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{3}$$

式中 a_1 为线性各项异性系数。

α 和 β 是介质折射率的空间导数，即

$$\alpha=\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x}\tag{4}$$

$$\beta=\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial y}\tag{5}$$

对于不透明、漫反射和漫发射壁面，辐射边界条件为

$$I(\boldsymbol{r}_{\mathrm{w}},\boldsymbol{\Omega})=n^2\varepsilon_{\mathrm{w}}I_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{w}})+\frac{1-\varepsilon_{\mathrm{w}}}{\pi}\int_{\boldsymbol{n}_{\mathrm{w}}\cdot\boldsymbol{\Omega}'<0}I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}')\left|\boldsymbol{n}_{\mathrm{w}}\cdot\boldsymbol{\Omega}'\right|\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}',\quad \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{w}}>0\tag{6}$$

2.2 角向离散

辐射传递方程是角度-空间高度耦合的方程，在求解过程中需要对角度进行离散。本文采用离散坐标法对角度空间进行离散。将方程（1）写成半离散形式的辐射传递方程，使用角度分段常数求积方法进行立体角的离散。在离散过程中，将角度上的方位角 φ 和极角 θ 分别离散成 N_φ 和 N_θ 份，有

$$\varphi^m=\left(m-1/2\right)\Delta\varphi,\quad m=1,2,\cdots N_\varphi\tag{7}$$

$$\theta^n=\left(n-1/2\right)\Delta\theta,\quad n=1,2,\cdots N_\theta\tag{8}$$

式中 $\Delta\varphi=2\pi/N_\varphi$，$\Delta\theta=\pi/N_\theta$。对于每一个离散的方向，其对应的权值为

$$w_\varphi^m=\int_{\varphi^{m-1/2}}^{\varphi^{m+1/2}}\mathrm{d}\varphi=\varphi^{m+1/2}-\varphi^{m-1/2}\tag{9}$$

$$w_\theta^n = \int_{\theta^{n-1/2}}^{\theta^{n+1/2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta = \cos\theta^{n-1/2} - \cos\theta^{n+1/2} \tag{10}$$

$$\varphi^{m+1/2} = \left(\varphi^m + \varphi^{m+1}\right)/2 \tag{11}$$

$$\theta^{n+1/2} = \left(\theta^n + \theta^{n+1}\right)/2 \tag{12}$$

此时,方程(1)可离散为

$$\begin{aligned}&\mu\frac{\partial I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}^{m,n}\right)}{\partial x} + \eta\frac{\partial I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}^{m,n}\right)}{\partial y} + \\ &\frac{1}{\sin\theta^n}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\xi\left(\mu\alpha + \eta\beta\right)I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}^{m,n}\right)\right] + \\ &\frac{1}{\sin\theta^n}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\beta\cos\varphi - \alpha\sin\varphi\right)I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}^{m,n}\right)\right] + \\ &\left(\kappa_a + \kappa_s\right)I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}^{m,n}\right) = n^2\kappa_a I_b\left(\boldsymbol{r}\right) + \\ &\frac{\kappa_s}{4\pi}\sum_{m'=1}^{N_\varphi}\sum_{n'=1}^{N_\theta} I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}^{m',n'}\right)\Phi\left(\boldsymbol{\Omega}^{m',n'},\boldsymbol{\Omega}^{m,n}\right)w_\varphi^{m'}w_\theta^{n'}\end{aligned} \tag{13}$$

相应的角向微分项可离散为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin\theta^n}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\xi\left(\mu\alpha + \eta\beta\right)I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}^{m,n}\right)\right] = \\ &\frac{\chi_\theta^{m,n+1/2}I^{m,n+1/2} - \chi_\theta^{m,n-1/2}I^{m,n-1/2}}{w_\theta^n}\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin\theta^n}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\beta\cos\varphi - \alpha\sin\varphi\right)I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}^{m,n}\right)\right] = \\ &\frac{\chi_\varphi^{m+1/2,n}I^{m+1/2,n} - \chi_\varphi^{m-1/2,n}I^{m-1/2,n}}{w_\varphi^m}\end{aligned} \tag{15}$$

则 $\chi_\theta^{m,n+1/2}$ 和 $\chi_\varphi^{m+1/2,n}$ 处理为

$$\chi_\theta^{m,n+1/2} - \chi_\theta^{m,n-1/2} = \frac{w_\theta^n}{\sin\theta^n}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\xi\left(\mu\alpha + \eta\beta\right)I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}^{m,n}\right)\right] \tag{16}$$

$$\chi_\theta^{m,1/2} = \chi_\theta^{m,N_\theta+1/2} = 0 \tag{17}$$

$$\chi_\varphi^{m+1/2,n} - \chi_\varphi^{m-1/2,n} = \frac{w_\varphi^m}{\sin\theta^n}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\beta\cos\varphi - \alpha\sin\varphi\right)I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}^{m,n}\right)\right] \tag{18}$$

$$\chi_\varphi^{1/2,n} = \chi_\varphi^{N_\varphi+1/2,n} = \frac{\beta}{\sin\theta^n} \tag{19}$$

根据迎风思想,辐射强度的上下游关系式可表示为

$$\begin{aligned}\chi_\varphi^{m+1/2,n}I^{m+1/2,n} = {}&\max\left(\chi_\varphi^{m+1/2,n},0\right)I^{m,n} - \\ &\max\left(-\chi_\varphi^{m+1/2,n},0\right)I^{m+1,n}\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\chi_\varphi^{m-1/2,n}I^{m-1/2,n} = {}&\max\left(\chi_\varphi^{m-1/2,n},0\right)I^{m-1,n} - \\ &\max\left(-\chi_\varphi^{m-1/2,n},0\right)I^{m,n}\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\chi_\theta^{m,n+1/2}I^{m,n+1/2} = {}&\max\left(\chi_\theta^{m,n+1/2},0\right)I^{m,n} - \\ &\max\left(-\chi_\theta^{m,n+1/2},0\right)I^{m,n+1}\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\chi_\theta^{m,n-1/2}I^{m,n-1/2} = {}&\max\left(\chi_\theta^{m,n-1/2},0\right)I^{m,n-1} - \\ &\max\left(-\chi_\theta^{m,n-1/2},0\right)I^{m,n}\end{aligned} \tag{23}$$

综上所述,方程(13)可改写为

$$\mu^{m,n}\frac{\partial I^{m,n}\left(\boldsymbol{r}\right)}{\partial x} + \eta^{m,n}\frac{\partial I^{m,n}\left(\boldsymbol{r}\right)}{\partial y} + \delta^{m,n}\left(\boldsymbol{r}\right)I^{m,n}\left(\boldsymbol{r}\right) = S^{m,n}\left(\boldsymbol{r}\right) \tag{24}$$

式中 $\delta^{m,n}\left(\boldsymbol{r}\right)$ 和 $S^{m,n}\left(\boldsymbol{r}\right)$ 分别为

$$\begin{aligned}\delta^{m,n}\left(\boldsymbol{r}\right) = {}&\kappa_a + \kappa_s + \\ &\frac{1}{w_\theta^n}\max\left(\chi_\theta^{m,n+1/2},0\right) + \frac{1}{w_\theta^n}\max\left(-\chi_\theta^{m,n-1/2},0\right) + \\ &\frac{1}{w_\varphi^m}\max\left(\chi_\varphi^{m+1/2,n},0\right) + \frac{1}{w_\varphi^m}\max\left(-\chi_\varphi^{m-1/2,n},0\right)\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}S^{m,n}\left(\boldsymbol{r}\right) = {}&n^2\kappa_a I_b + \\ &\frac{\kappa_s}{4\pi}\sum_{m'=1}^{N_\varphi}\sum_{n'=1}^{N_\theta} I\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}^{m',n'}\right)\Phi\left(\boldsymbol{\Omega}^{m',n'},\boldsymbol{\Omega}^{m,n}\right)w_\varphi^{m'}w_\theta^{n'} + \\ &\frac{1}{w_\theta^n}\max\left(-\chi_\theta^{m,n+1/2},0\right)I^{m,n+1} + \frac{1}{w_\theta^n}\max\left(\chi_\theta^{m,n-1/2},0\right)I^{m,n-1} + \\ &\frac{1}{w_\varphi^m}\max\left(-\chi_\varphi^{m+1/2,n},0\right)I^{m+1,n} + \frac{1}{w_\varphi^m}\max\left(\chi_\varphi^{m-1/2,n},0\right)I^{m-1,n}\end{aligned} \tag{26}$$

2.3 空间离散

利用配置点谱方法进行空间离散求解。在离散过程中,选用Chebyshev多项式作为基函数,Chebyshev Gauss-Lobatto(CGL)节点作为离散节点

$$\alpha_j = \cos\frac{\left(2j+1\right)\pi}{2N+2},\quad j = 0,1,\cdots N \tag{27}$$

任意光滑函数 $u(\alpha)$ 可以近似表示为

$$u(\alpha) = \sum_{j=0}^{N} u\left(\alpha_j\right)h_j\left(\alpha\right) \tag{28}$$

相应的微分表达式为

$$u'\left(\alpha_i\right) = \sum_{j=0}^{N} u\left(\alpha_j\right)D_{ij}\left(\alpha\right),\quad i = 0,1,\cdots N \tag{29}$$

插值函数 h 和微分矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的具体表达式见文献[18]。

因此,采用配置点谱方法离散后的辐射传递方程为

$$\begin{aligned}&\mu^{m,n}\frac{2}{\left(x_2 - x_1\right)}\sum_{p=0}^{N_x}\boldsymbol{D}_{i,p}^{\alpha}\boldsymbol{I}_{p,j}^{m,n} + \eta^{m,n}\frac{2}{\left(y_2 - y_1\right)}\sum_{k=0}^{N_y}\boldsymbol{D}_{j,k}^{\alpha}\boldsymbol{I}_{i,k}^{m,n} + \\ &\boldsymbol{\delta}_{i,j}^{m,n}\boldsymbol{I}_{i,j}^{m,n} = \boldsymbol{S}_{i,j}^{m,n}\end{aligned} \tag{30}$$

式中 x_1, x_2 和 y_1, y_2 是物理空间的坐标;$\boldsymbol{D}^{\alpha}$ 是微分矩阵;N_x 和 N_y 是 x 和 y 方向上配置点的个数。

方程(30)可进一步写成矩阵的形式,即

$$\boldsymbol{AI} + \boldsymbol{IB} + \boldsymbol{C}.*\boldsymbol{I} = \boldsymbol{D} \tag{31}$$

式中矩阵运算 $\boldsymbol{C}.*\boldsymbol{I}$ 表示矩阵元素之间点乘。

相应的辐射边界条件也可进行离散。以图1中

w_1壁面的辐射边界条件为例，其离散表达式为

$$I_{0,j}^{m,n}=\varepsilon_{w}I_{bw}+\frac{\left(1-\varepsilon_{w}\right)}{\pi}\sum_{\substack{m'=0\\ \mu^{m',n'}<0}}^{N_{\varphi}}\sum_{n'=0}^{N_{\theta}}I_{0j}^{m',n'}\mu^{m',n'}w_{\varphi}^{m'}w_{\theta}^{n'},$$
$$j=0,1,\cdots N_{y};\quad \mu^{m,n}<0 \tag{32}$$

壁面辐射热流表示为

$$q\left(r_{w}\right)=\int_{4\pi}\left(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}_{w}\right)I\left(\boldsymbol{r}_{w},\boldsymbol{\Omega}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}=\sum_{m=1}^{N_{\varphi}}\sum_{n=1}^{N_{\theta}}\left(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}_{w}\right)I\left(\boldsymbol{r}_{w},\boldsymbol{\Omega}\right)w_{\varphi}^{m}w_{\theta}^{n} \tag{33}$$

3 结果与讨论

为了检验基于配置点谱方法的热辐射模型对求解非均匀参与性介质内辐射传热问题的可行性及精度。首先，进行网格无关性测试，确定求解此类问题的最优网格数。然后，分别选取三个不同算例进行分析讨论，检验热辐射模型的准确性。最后，给出在计算上述三个算例所需计算时间，检验热辐射模型的有效性。

3.1 网格无关性测试

如图1所示，考虑介质折射率为线性分布$n=1+2(x+y)/H$，四个壁面发射率$\varepsilon_w=1$，底边的温度$T_{w1}=1000$K，其它壁面温度为$T_{w2}=T_{w3}=T_{w4}=0$K，介质吸收系数为$\kappa_a=0$，散射系数$\kappa_s=1$，各向同性散射。选择下壁面无量纲辐射热流（$q_{w1}/\sigma T_{w1}^4$）与文献[9]结果进行分析比较。

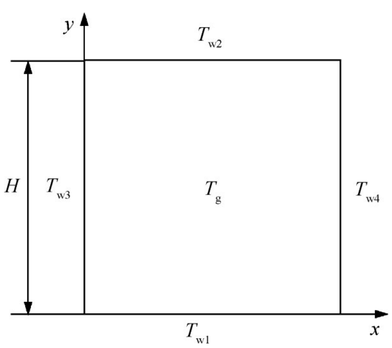


Fig. 1 Two-dimensional rectangular medium and the coordinate system

为了更加定量地进行精度分析，定义积分平均相对误差ε_{error}为

$$\varepsilon_{error}=\frac{\int_{H}\left|\left(\phi(x)-\phi_{ref}(x)\right)\right|\mathrm{d}x}{\int_{H}\phi(x)\mathrm{d}x} \tag{34}$$

式中$\phi(x)$是本文求解结果，$\phi_{ref}(x)$是参考基准的结果。

表1列出了不同网格数下，积分平均相对误差ε_{error}，迭代次数和CPU运行时间。从表1可以看出，下壁面无量纲辐射热流与文献结果之间的平均积分相对误差均在1×10^{-3}量级。综合考量计算精度、迭代次数和计算时间等因素，选取$N_x=10$，$N_y=10$，$N_\theta=24$，$N_\varphi=12$作为空间和角度上的离散节点数。

Table 1 Effect of the number of collocation pointes and discrete directions for errors, iterations and CPU time

N_x, N_y	N_θ, N_φ	ε_{error}	Iterations	CPU time/s
5×5	16×8	5.46×10^{-3}	60	3.31
5×5	24×12	5.42×10^{-3}	85	14.77
5×5	32×16	5.42×10^{-3}	111	50.38
10×10	16×8	4.47×10^{-3}	52	25.54
10×10	24×12	4.46×10^{-3}	55	111.32
10×10	32×16	4.46×10^{-3}	55	372.77
15×15	16×8	4.12×10^{-3}	85	97.00
15×15	24×12	4.12×10^{-3}	80	544.35
15×15	32×16	4.12×10^{-3}	85	1363.14
20×20	16×8	3.94×10^{-3}	111	249.59
20×20	24×12	3.94×10^{-3}	131	1442.75
20×20	32×16	3.94×10^{-3}	133	3352.27

3.2 线性折射率介质内各向同性散射

如图2所示，考虑三组壁面发射率（$\varepsilon_w=1.0$，$\varepsilon_w=0.5$，$\varepsilon_w=0.1$）对下壁面无量纲辐射热流量的影响，并与文献结果进行对比。从图中可以看出，配置点谱方法对于不同壁面发射率的变折射率介质辐射传热问题与MLPG[9]结果吻合良好，且两者之间的积分平均相对误差分别为0.41%，0.72%，2.8%。另外，随着壁面发射率增加，下壁面无量纲辐射热流增大。由方程(6)可知，当壁面发射率较大时，壁面向外辐射热量大于其它冷壁面传入的热量。因此，无量纲辐射热流较大。需要指出的是：与均匀介质内热辐射的下壁面无量纲辐射热流呈对称分布[19]不同，而本算例中线性折射率介质内下壁面无量纲辐射热流非对称分布。这是由于非均匀介质内热射线沿曲线传播导致的。

3.3 非线性折射率介质内各向异性散射

此算例中，折射率分布$n(x)=5[1-0.9025(x/H)^2]^{0.5}$，与$y$方向无关。四个壁面为冷壁面$T_{w1}=T_{w2}=T_{w3}=T_{w4}=0$K，介质温度$T_g=1000$K，壁面发射率$\varepsilon_w=1$，各项异性散射系数$a_1=1$。图3给出了两种情况（1）$\kappa_a=10$，$\kappa_s=0$；（2）$\kappa_a=\kappa_s=0.5$下的无量纲辐射热流分布。与文献[3]中给出使用$4\times10^5$能束进行追踪的MC结果进行比

较，两者结果吻合良好，且积分平均相对误差分别为0.56%和1.21%。

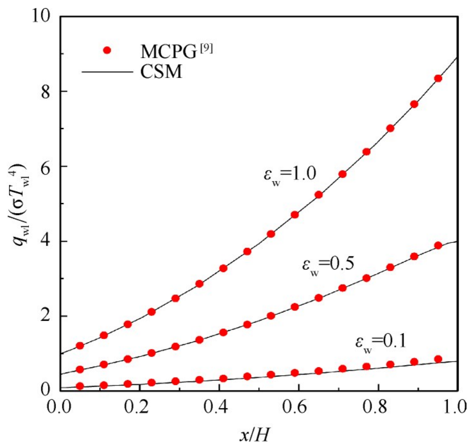


Fig. 2　Dimensionless net wall radiative heat flux on the bottom wall with different emissivity

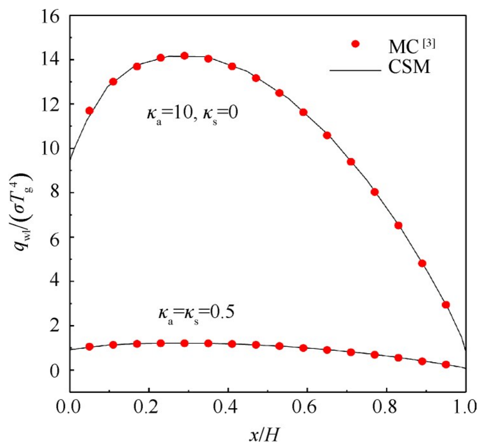
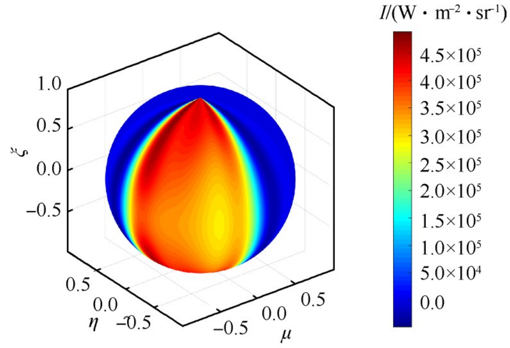


Fig. 3　Dimensionless net wall radiative heat flux on the bottom wall with absorbing, emitting and scattering media

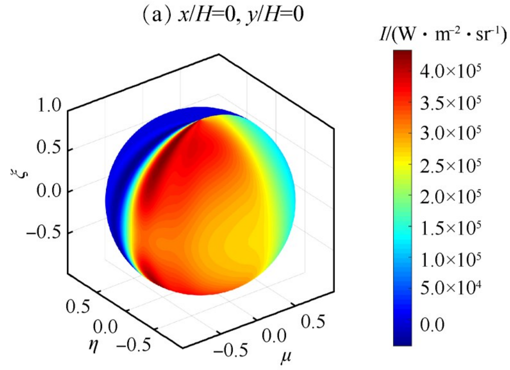
为了更加定量地分析该热辐射传递过程，图4给出了κ_a=10且κ_s=0时，4个不同位置点的辐射强度在角度空间上的分布图。对比图4(a)和图4(d)发现，只有1/4球面上存在辐射强度。这是由于黑体冷壁面边界造成的。另外，对比图4(b)和图4(c)发现：图4(b)中的辐射强度大，这再次验证了图3中的无量纲辐射热流曲线趋势图。

3.4　非线性折射率介质内无散射

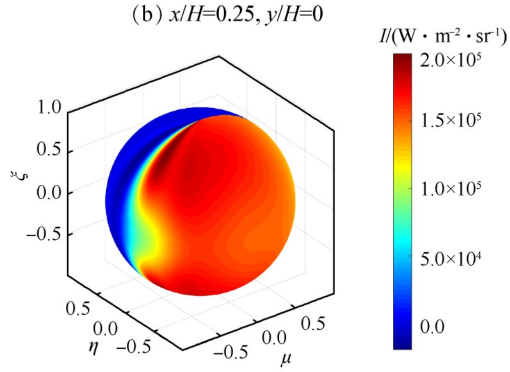
考虑参与性介质无散射，利用配置点谱方法求解辐射平衡问题，即确定四个壁面的温度，参与性介质温度由辐射平衡决定。四个壁面的温度为T_{w1}=1000K，T_{w2}=T_{w3}=T_{w4}=0K，介质内折射率分布为$n(x,y)=5[1-0.4356(x^2+y^2)/H^2]^{0.5}$，吸收系数$\kappa_a$=10，壁面发射率(1)$\varepsilon_w$=0.5，(2)$\varepsilon_w$=1.0。图5给出在$x/H$=0.325处沿$y$方向无量纲温度分布。通过与文献[3]的MC结果



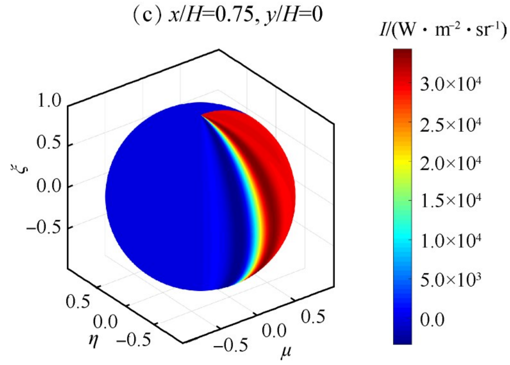
(a) x/H=0, y/H=0



(b) x/H=0.25, y/H=0



(c) x/H=0.75, y/H=0



(d) x/H=1, y/H=0

Fig. 4　Angular distributions of radiative intensity at four locations on the bottom wall

对比分析发现，壁面发射率为ε_w=0.5和ε_w=1.0的积分平均相对误差分别小于0.1%和0.19%。图6进一步给出了温度分布云图。从图中可以看出，温度场分布光滑，无振荡现象。表明CSM在求解二维非线性折射率介质内热辐射问题有较好的计算效果。

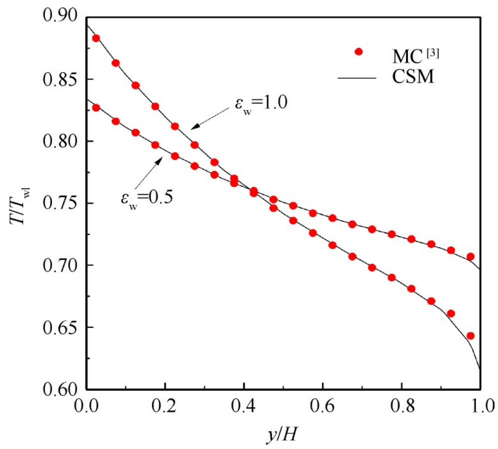
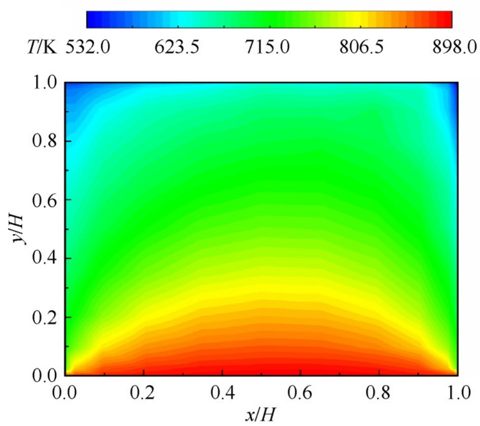
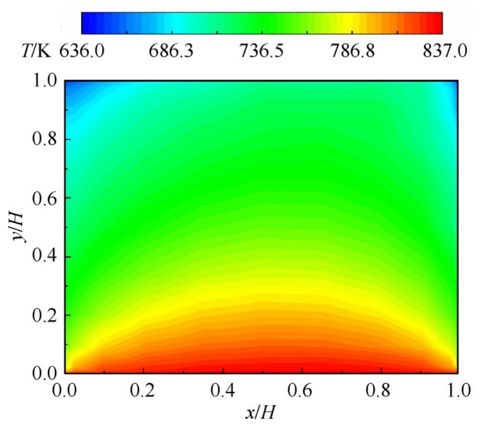


Fig. 5　Dimensionless temperature distribution along the *y* direction at *x*/*H*=0.325



(a) Temperature distribution of the wall emissivity ε_w=0.5



(b) Temperature distribution of the wall emissivity ε_w=1.0

Fig. 6　Temperature distributions on the two-dimensional rectangular enclosure

3.5　CPU 运行时间

表 2 列出了文中所有算例的 CPU 计算时间。从表中可以看出，所有算例消耗计算机资源都较少，所需计算时间都很短，不超过 20min。

Table 2　CPU time

Case	Parameter	CPU time/s
1	ε_w=1.0	111.32
	ε_w=0.5	222.30
	ε_w=0.1	1015.09
2	κ_a=10, κ_s=0	27.43
	κ_a=κ_s=0.5	69.36
3	ε_w=0.5	213.88
	ε_w=1.0	151.67

4　结　论

本文采用配置点谱方法对高温二维非均匀介质内的辐射换热问题进行了研究，分析了壁面发射率、吸收系数、散射系数、非均匀折射率分布等参数对结果的影响，可以得到以下结论：

（1）发展了配置点谱方法成功应用于求解非均匀介质内辐射传递问题。

（2）三组壁面发射率所得无量纲热流分布结果与无网格方法对比，最大积分相对误差 2.8%，最小为 0.41%。

（3）与文献中模拟能束数目为 4×10^5 的 MC 所得基准解对比，计算误差最大为 1.21%。

（4）配置点谱方法求解二维非均匀介质内辐射传热所需计算资源较少，花费的计算时间均较短，在上述三个算例中均不超过 20min。

致　谢：感谢国家自然科学基金、陕西省重点研发计划、江苏省自然科学基金、太仓市基础研究计划、中央高校基本业务费的资助。

参考文献

[1]　谈和平，夏新林，刘林华，等．红外辐射特性与传输的数值计算—计算热辐射学[M]．哈尔滨：哈尔滨工业大学，2006.

[2]　刘友宏，任浩亮．辐射传热对平板气膜冷却性能影响[J]．推进技术，2017，38(3)：588-596.（LIU You-hong，REN Hao-liang. Effects of Radiation Heat Transfer on Film Cooling Performance of Flat Plate[J]. *Journal of Propulsion Technology*，2017，38(3)：588-596.）

[3]　Liu L H. Benchmark Numerical Solutions for Radiative Heat Transfer in Two-Dimensional Medium with Graded Index Distribution[J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*，2006，102(2)：293-303.

[4]　Krishna N A，Mishra S C. Discrete Transfer Method Applied to Radiative Transfer in a Variable Refractive Index Semitransparent Medium [J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*，2006，102 (3)：

432-440.

[5] Sarvari S M. Multi-Grid Monte Carlo Method for Radiative Transfer in Multi-Dimensional Graded Index Media with Diffuse-Specular-Gray Boundaries[J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2018, 119(1): 61-73.

[6] Liu L H. Finite Volume Method for Radiation Heat Transfer in Graded Index Medium[J]. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 2006, 20(1): 59-66.

[7] Asllanaj F, Fumeron S. Modified Finite Volume Method Applied to Radiative Transfer in 2D Complex Geometries and Graded Index Media [J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2010, 111(2): 274-279.

[8] Zhang L, Zhao J M, Liu L, et al. Hybrid Finite Volume/Finite Element Method for Radiative Heat Transfer in Graded Index Media[J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2012, 113(14): 1826-1835.

[9] Liu L H. Meshless Method for Radiation Heat Transfer in Graded Index Medium[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2006, 49(1): 219-229.

[10] Wang C, Sadat H, Dez V L, et al. Meshless Method for Solving Multidimensional Radiative Transfer in Graded Index Medium [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36(11): 5309-5319.

[11] Sun Y S, Li B W. Chebyshev Collocation Spectral Approach for Combined Radiation and Conduction Heat Transfer in One-Dimensional Semitransparent Medium with Graded Index[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, 53(7): 1491-1497.

[12] Wei L Y, Qi H, Ren Y T, et al. A Modified Spectral Method for Simulating Arbitrary Directional Radiative Intensity in Participating Media with Graded Refractive Index[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2017, 106: 167-176.

[13] 朱克勇，黄　勇，赵　瑢. 二维梯度折射率介质内各向异性散射热辐射传递的积分矩方法[J]. 工程热物理学报，2013，34(6): 157-160.

[14] Asllanaj F, Fumeron S. Modified Finite Volume Method Applied to Radiative Transfer in 2D Complex Geometries and Graded Index Media [J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2010, 111(2): 274-279.

[15] Sarvari S M H. Variable Discrete Ordinates Method for Radiation Transfer in Plane-Parallel Semi-Transparent Media with Variable Refractive Index [J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2017, 117(1): 36-44.

[16] Luo Z, Jiang W. A Reduced-Order Extrapolated Crank-Nicolson Finite Spectral Element Method for the 2D Non-Stationary Navier-Stokes Equations about Vorticity-Stream Functions [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2020, 147: 161-173.

[17] Luo X H, Li B W, Zhang J K, et al. Simulation of Thermal Radiation Effects on MHD Free Convection in a Square Cavity Using the Chebyshev Collocation Spectral Method[J]. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 2014, 66(7): 792-815.

[18] Zhou R R, Li B W. Chebyshev Collocation Spectral Method to Solve Radiative Transfer Equation in One-Dimensional Cylindrical Medium[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2017, 79: 1206-1217.

[19] Liu L H. Finite Element Simulation of Radiative Heat Transfer in Absorbing and Scattering Media[J]. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 2004, 18(4): 555-557.

（编辑：史亚红）