

蜂窝状薄壁管拉伸时的收缩分析^{*}

南楠, 韦宝禧

(北京动力机械研究所 高超声速冲压发动机技术重点实验室, 北京 100074)

摘要: 为研究蜂窝材料拓扑结构与其整体力学性能的关系, 从非平面 Vertex 模型的势能形式出发, 结合蜂窝薄壁管拉伸时的轴对称特征, 通过变分法得到了管拉伸时母线满足的控制方程, 证实了边界效应是蜂窝状薄壁管受拉时产生收缩的原因, 并结合控制方程的若干特解, 考察了非平面 Vertex 模型中材料参数对管弯曲程度的影响。结果表明, 非平面 Vertex 模型中表征夹角势强度的参数决定了材料的整体抗弯性, 而距离管端最近的3层元胞是管拉伸时的主要收缩区。最后进一步探讨了蜂窝薄壁管曲率与收缩幅度之间的非线性关系, 揭示了构型曲率是蜂窝材料泊松比的影响因素之一。

关键词: 蜂窝材料; Vertex 模型; 收缩; 变分法; 边界效应

中图分类号: V45 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-4055 (2021) 08-1883-05

DOI: 10.13675/j.cnki. tjjs. 190865

Analysis of Shrinkage of Honeycomb Thin-Wall Tube During Stretching

NAN Nan, WEI Bao-xi

(Science and Technology on Scramjet Laboratory, Beijing Power Machinery Institute, Beijing 100074, China)

Abstract: In order to study the relationship between the topology structure of honeycomb materials and its overall mechanical properties, starting from the potential energy form of the non-planar Vertex model, the governing equation for the cable on the tube surface was obtained by the variational method, considered with the axisymmetric characteristics of the honeycomb thin-wall tube. The results reveal that the boundary effect is the cause of the shrinkage when the honeycomb thin-wall tube is pulled. Through several special solutions of the governing equation, the effects of material parameters in non-planar Vertex model on the bending degree of the tube were investigated. The results show that the parameter representing the strength of the face angle potential energy in the non-planar Vertex model determines the overall bending resistance of the material, and the three-layer cells closest to the end of the tube are the main shrinkage region of the tube during stretching. In the end of this paper, the nonlinear relationship between the curvature of the honeycomb thin-wall tube and the degree of the shrinkage is further discussed, and it is revealed that the curvature of the configuration is one of the factors influencing the Poisson's ratio of the honeycomb material.

Key words: Honeycomb materials; Vertex model; Shrinkage; Variational method; Boundary effect

1 引言

在很多现代飞行器设想中, 轻质、可变形柔性材

料起到了至关重要的作用, 是诸如可变形机身、机翼与一体调节式发动机进气道得以成功实现的基础^[1]。金属及合金类材料一直是传统机械设备中不可或缺

^{*} 收稿日期: 2019-12-16; 修订日期: 2020-05-26。

通讯作者: 南楠, 博士, 工程师, 研究领域为组合循环发动机总体技术。E-mail: mechanicsnan@163.com

引用格式: 南楠, 韦宝禧. 蜂窝状薄壁管拉伸时的收缩分析[J]. 推进技术, 2021, 42(8):1883-1887. (NAN Nan, WEI Bao-xi. Analysis of Shrinkage of Honeycomb Thin-Wall Tube During Stretching[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2021, 42(8):1883-1887.)

的重要基础性材料,但在面向这类新型飞行器时,变形控制导致的结构复杂度与飞行器的重量、结构强度较难同时满足设计要求,复杂的机械变形结构也会提高设备的维护成本,降低运行可靠性^[2]。与传统材料相比,生物组织经历了上亿年的演化,其面对复杂环境时高度的自适应性与灵活性促使仿生学得以蓬勃发展,师法自然,基于仿生学的大量智能材料相继出现。由此,复合式、智能化的仿生材料被认为是解决这一问题的有效途径^[3]。其中,蜂窝状材料具有低密度、高吸能的同时,拥有良好的连续变形能力与较高的气动荷载性,早在 20 世纪 40 年代,便凭借其优良的性能开始崭露头角。现如今,蜂窝状材料已广泛应用于机翼机身蒙皮、卫星舱体、减震换热设备等航空航天领域^[4-5]。

伴随着现代工业对智能化柔性材料的渴求,蜂窝状材料的研究迎来了新的发展高峰。新的蜂窝设计不断涌现。研究表明,组合有正六边形元胞与三角形元胞的 Kagome 蜂窝比单一元胞蜂窝材料具备更高的面内刚度、散热性能与面外载荷能力^[6];通过精巧的蜂窝设计,具有内凹型元胞的蜂窝材料与同向、反向手性蜂窝材料均可表现出负泊松比,十字型蜂窝还可呈现出零泊松比性质^[7-9]。为了促进新型功能性蜂窝材料的设计,相关的数值计算方法与理论分析手段也取得了较快发展。鉴于蜂窝材料的非均匀性,通常先应用等效理论模型得到近似的弹性模量,再通过有限元方法对蜂窝材料进行数值计算。常见的等效模型有夹板理论、等效板理论及蜂窝板理论等^[10]。另一方面,由于生物上皮组织中大量存在着蜂窝状细胞组织结构,这种组织结构在动物胚胎发育、组织成型的过程中起到了关键作用。为了理解蜂窝状上皮组织的力学行为,受到早期人们研究肥皂泡沫的启发,Vertex 模型被大量应用到这类蜂窝状组织材料的研究中,成为近些年来发展的热点^[11]。

不同于连续介质模型的有限元模拟,Vertex 模型无需预先给定材料的本构关系,而是从能量的角度出发,对构成蜂窝元胞的线元和面元分别赋予不同形式的能量,通过元胞间共用的顶点及顶点间的连接关系构建整个拓扑网络,蜂窝材料的构型可通过这种拓扑网络中顶点的位置坐标信息描述,而材料构型的变化,则可由能量最小化方法,对赋予在拓扑网络上的总能量求极值得到。由于 Vertex 模型能够方便地对蜂窝状材料各组成部分实施建模,从而可快速得到组织整体的构型变化,该模型已成功应用于胚胎成型、搜索新型元胞构型等问题^[12-13]。此外,

Vertex 模型亦可用于软物质的玻璃态与流变行为等问题的研究^[14]。典型的 Vertex 模型可以处理蜂窝材料二维平面(俯视、剖视)的构型变化问题,也可通过增加元胞厚度方向顶点的方式处理三维蜂窝构型。最近,非平面 Vertex 模型被用于研究蜂窝面板内嵌有收缩环时的屈曲行为^[15],该模型在传统二维 Vertex 模型基础上,通过引入与元胞夹角相关的势能作为蜂窝组织在三维空间里变形的限制,从而能用更少的顶点处理蜂窝状平板三维构型的变化。随后,该模型被进一步用于研究蜂窝状薄壁管侧壁上内嵌收缩环时管的构型变化^[16],研究表明,当蜂窝状薄壁管侧壁上内嵌收缩环时,环内部壁面会隆起并存在有临界塌缩的现象。

本文将非平面 Vertex 模型的元胞能量简化为能量密度,随后,将该能量密度施加于圆管母线,从变分原理出发,得到了圆管母线拉伸时所应满足的控制方程。通过对圆管母线控制方程若干特解的研究,探讨了蜂窝圆管拉伸时,模型抗弯参数对母线构型变化的影响,并进一步考察了蜂窝圆管初始构型曲率在管拉伸收缩时起到的作用。

2 方 法

Vertex 模型通过多边形近似蜂窝结构,以多边形的 n 个顶点 $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ 作为多个蜂窝元胞的交汇点,对于正六边形蜂窝结构 $n = 6$,两个相邻蜂窝元胞之间存在一条公共边,这些顶点及它们之间由公共边组成的拓扑网络视为材料整体,材料的构型特点及其变化情况可由顶点的位置坐标描述。决定这些顶点位置变化的物理量,是定义在整张拓扑网络上的势能函数 E 。对于一个由二维面元组成的拓扑网络(如图 1 所示),非平面 Vertex 模型势能的无量纲形式可表示为^[15-16]

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (A_{\alpha} - 1)^2 + G \sum_i D_i + \frac{B}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (1 - \mathbf{N}_{\alpha} \cdot \mathbf{N}_{\beta}) \quad (1)$$

式中希腊字母表征多边形的编号,其中 β 表示与 α 相邻的多边形编号,下标 i 表示公共边的编号。 A 表示元胞面元面积, D 表示公共边长度, $\mathbf{N}$ 表示元胞面元上的单位法向量。上式右侧第一项反映了材料的抗压缩能力。以第一项作为无量纲参照,上式第二、第三项中包含的参数 G 和 B 分别体现了蜂窝材料的抗拉与抗弯能力。其中,第三项包含的元胞面元法向量 $\mathbf{N}$ 可由面元的面积矢量 $\mathbf{A}$ 定义

$$A_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} \times v_k$$

$$A_\alpha = |A_\alpha| \quad (2)$$

$$N_\alpha = \frac{A_\alpha}{A_\alpha}$$

为便于简写,令 $v_n = v_0$,角标 k 按元胞顶点逆时针序排列,如图1所示。非平面 Vertex 模型势能形式 E 是对整体呈超弹性的蜂窝材料的唯象刻画,可用于研究蜂窝材料的拓扑特征对材料整体力学性能的影响^[16]。

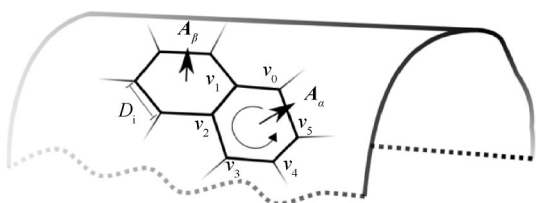


Fig. 1 Diagram of the adjacent hexagonal cells

根据最小作用量原理,稳定构型对应的势能处于势能最低的位置。由于势能 E 的自变量仅为拓扑网络中每个顶点的坐标,可通过牛顿法沿势能梯度方向迭代搜索势能最低时各个顶点的位置坐标。此外,在计算构型前,需令初始设置的蜂窝结构公共边长度为 $\sqrt[4]{4/27}$ (对应的面元面积为1),而后缩放初始构型至系统能量最低,以达到释放系统初始构型预应力的目的。如图2所示的蜂窝状圆管,在释放预应力后,可通过调整圆管两端顶点位置并加以固定的方式拉伸圆管,再次实施能量最小化过程即可得到拉伸后圆管的构型。如图2所示,当保持圆管端部形状拉伸时,蜂窝状薄壁圆管会向管中心收缩。

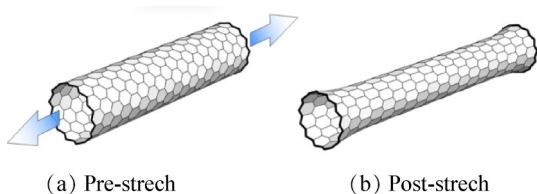


Fig. 2 Configuration of the thin-wall tube containing 247 hexagonal cells

3 结果与讨论

为了从理论上研究蜂窝薄壁圆管拉伸时收缩的情况,需引入连续性假设,即假设圆管表面连续且光滑。本节用上标星号表示管变形前的几何特征,如图3所示,考虑到蜂窝状薄壁圆管的轴对称特征,用

初始管长 L^* ,管径 R^* 和管拉伸变形后的长度 L 作为圆管拉伸前后的几何限制,进而在轴坐标系下,圆管拉伸收缩问题可以由圆管母线线形 $r(x)$ 概括,即圆管拉伸后,母线 $r(x)$ 由初始时的直线变为曲线。

非平面 Vertex 模型的势能决定了圆管母线受拉时的线形,此时,通过变分法得到母线 $r(x)$ 所满足的控制方程,再结合恰当的边界条件,可求解母线的变形情况。由于 Vertex 模型属于离散系统,在视母线线形连续光滑的前提下,由 Cauchy-Born 准则可将 Vertex 模型势能做均质化处理,以简化系统自由度^[17]。即令曲线 $r(x)$ 上每一点的能量近似于非平面 Vertex 模型的势能密度。将非平面 Vertex 模型的势能(式(1))按元胞重新划分,每个元胞的势能可表示成

$$\Xi = \frac{1}{2} (A_\alpha - 1)^2 + \frac{G}{2} Q_\alpha + \frac{B}{2} \sum_\beta (1 - N_\alpha \cdot N_\beta) \quad (3)$$

式中 β 表示与元胞 α 相邻的元胞编号。 Q_α 表示元胞 α 的周长。如图3所示,设拉伸前蜂窝元胞边长为(公共边)的初始长度为 l^* ,相应的元胞面元面积为 $A^* = \frac{3\sqrt{3}}{2} l^{*2}$,考虑到圆管轴对称的特点,引入单元的轴向变化率 $\kappa_1 = \frac{L}{L^*}$ 与周向变化率 $\kappa_2 = \frac{r(x)}{R^*}$,由几何关系可知,拉伸后元胞面元面积 A_α 与周长 Q_α 分别为

$$A_\alpha = \kappa_1 \kappa_2 A^* \quad (4)$$

$$Q_\alpha = \left(4 \sqrt{\frac{1}{4} \kappa_1^2 + \frac{3}{4} \kappa_2^2} + 2 \kappa_1 \right) l^* \quad (5)$$

由于非平面 Vertex 模型不考虑元胞厚度,此时母线转角 θ 满足 $\theta = \frac{dr(x)}{dx}$,仅考虑小变形,有

$$1 - \cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2} \quad (6)$$

将式(4),式(5)与式(6)代入式(3)中,并将元胞能量 Ξ 均化为能量密度 ρ ,有

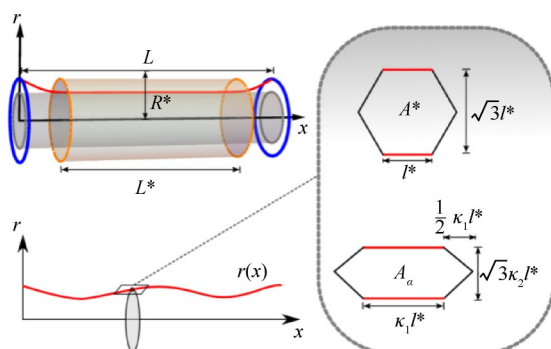


Fig. 3 Schematic diagram of tubular shape and honeycomb cell before and after stretching

$$\rho = \frac{1}{2} \left[(\kappa_1 \kappa_2 A^* - 1)^2 + G \left(4 \sqrt{\frac{1}{4} \kappa_1^2 + \frac{3}{4} \kappa_2^2 + 2 \kappa_1} \right) l^* + B \left(\frac{dr(x)}{dx} \right)^2 \right] / \kappa_1 l^* \quad (7)$$

将该能量密度沿管长区域 $[0, L]$ 积分可得到母线所对应的总能量 $\int_0^L \rho dx$, 由变分原理可知, 实际母线线形 $r(x)$ 应满足 $\delta \int_0^L \rho dx = 0$, 整理后可得圆管拉伸时母线所满足的控制方程

$$B \frac{d^2 r(x)}{dx^2} - \frac{3G\xi_2 r(x)}{\sqrt{3r(x)^2 + (R^* \kappa_1)^2}} - \xi_1^2 \kappa_1^2 r(x) + \xi_1 \kappa_1 = 0 \quad (8)$$

式中 $\xi_1 = A^*/R^*$ 与 $\xi_2 = l^*/R^*$ 是与圆管拉伸前构型相关的几何参数。

考虑圆管沿拉伸方向的镜面对称性, 有边界条件

$$r(0) = R^* \quad (9)$$

$$\dot{r}(L/2) = 0 \quad (10)$$

根据南楠等计算圆管时使用的 Vertex 模型几何与材料参数^[16], 有 $l^* = 0.523$, $L^* = 14.9$, $R^* = 1.9$ 和 $G = 0.254$ 。将参数带入控制方程(式(8))并联立边界条件(式(9),(10)), 可求得该方程的数值解。接下来, 通过这种方式, 研究模型拉伸过程中母线的形状变化及参数 B 对母线形状的影响。

圆管母线 $r(x)$ 不同程度的拉伸是由拉伸后的管长 L 体现的, 具体反映在边界条件中。首先, 设 $B = 0.2$, 并令 L 分别为 15.9, 16.9, 17.9 和 18.9, 即对应的拉伸率分别为 6.7%, 13.4%, 20.1%, 26.8%, 此时圆管母线线形如图 4 中实线所示。为验证圆管母线控制方程(式(8))的有效性, 使用相同的参数对上述四种圆管的拉伸情况进行 Vertex 模型仿真计算, 拉伸率从低到高分别对应于图 4 中的 Case 1~4, 并对 Vertex 模型计算结果的圆管母线进行了拟合(由图 4 虚线表示), 可以看出, 随着蜂窝薄壁圆管的伸长, 圆管母线 $r(x)$ 向管中心收缩, 这与 Vertex 模型计算的结果相符, 意味着材料呈正泊松比特性。对于这类材料, 当管两端的形状保持不变拉伸时, 会迫使圆管在靠近端部的区域产生弯曲变形。

更进一步, 考察管长 L 分别为 18, 20 两种情况下, 非平面 Vertex 模型参数 B 对于收缩程度的影响, 结果如图 5 所示。可以看到, 在取不同 B 值时(0.15,

0.2, 0.25 与 0.3), 远离圆管边界的母线收缩情况一致, 而靠近圆管处, 随着模型参数 B 的增加, 母线则略显平坦, 这表明在非平面 Vertex 模型的势能形式中, 衡量相邻元胞间夹角势项作用强度的物理量 B 与圆管的抗弯能力相关, B 越大, 蜂窝材料整体的抗弯能力就越强。还可以观察到, 圆管母线主要在 $x < 4$ 区域内弯曲, 考虑到蜂窝元胞的初始边长 l^* 为 0.523, 该区域内可容纳大致 3 个元胞, 即蜂窝状薄壁圆管拉伸时受边界影响的弯曲变形主要由靠近管端的三层元胞的弯折实现。

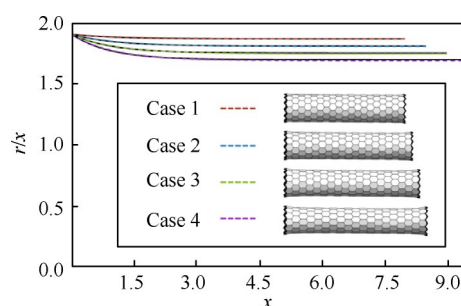


Fig. 4 Solutions of $r(x)$ and the numerical results of Vertex model under the same conditions

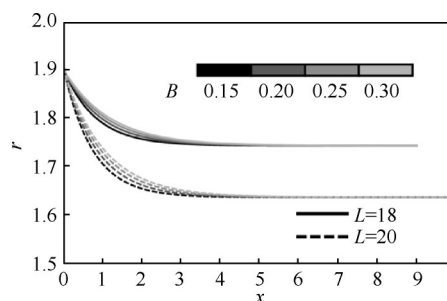


Fig. 5 Effect of the parameter B on $r(x)$

观察母线的控制方程(式(8)), 材料的元胞构型特点由表征元胞的初始边长 l^* 体现, 而参数 L^* 及 R^* 仅反映了圆管初始构型的几何大小, L^* 及 R^* 的改变不影响材料的局部性质。由此, 通过改变蜂窝圆管的半径 R^* , 可以进一步探讨圆管曲率($1/R^*$)对于管拉伸后构型变化的影响。定义圆管收缩幅度为 $\Delta R = r(0) - r(L/2)$, 在其他材料参数不变的情况下, 令圆管拉伸率为 40% ($L = 20.86$), 收缩幅度 ΔR 同初始圆管半径 R^* 及材料参数 B 的关系如图 6 所示。可以看出, 圆管曲率与管拉伸时的收缩幅度呈非线性关系, 当 R^* 较小时, 材料参数 B 不对圆管收缩幅度 ΔR 产生显著影响, 在 R^* 较大时, B 越大收缩幅度 ΔR 越小, 且收缩幅度的差异可接近 40%。

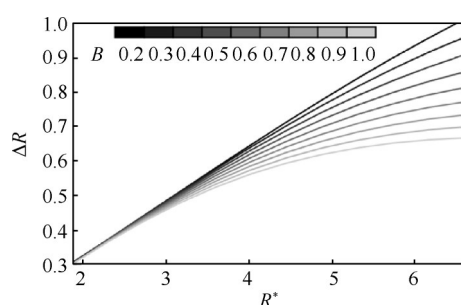


Fig. 6 Influence of the tube initial radius R^* on the degree of the shrinkage ΔR when the tube is stretched

4 结 论

基于能量计算、分析蜂窝薄壁结构的一大优势是可以对蜂窝材料的整体性能做快速计算验证,对新型材料的设计具有指导性价值。本文从非平面Vertex模型势能形式出发,推导出了圆管母线拉伸时满足的控制方程,通过对方程解的分析,得到了以下结论:

(1)非平面Vertex模型势能中,与相邻元胞夹角有关的项决定了蜂窝状材料的抗弯能力。夹角势的作用强度参数 B 越大,材料的抗弯能力就越强。

(2)蜂窝状圆管拉伸后的收缩行为由管的边界效应产生,即固定边界形状迫使圆管受拉时,管截面变形要与边界相协调,由此导致了圆管母线的收缩,收缩变形的影响范围是距离管端最近的3层元胞。

(3)进一步讨论了非平面Vertex模型参数及圆管初始几何构型对管拉伸时收缩的影响。研究表明,在蜂窝圆管拉伸率不变的情况下,圆管初始构型的曲率与管收缩程度之间呈非线性关系,揭示了构型曲率是蜂窝材料泊松比的影响因素之一,未来可对此做进一步的研究。

需要特别指出的是,本文所采取的理论分析方法也适用于服从其他势能形式的蜂窝状材料。注意到在本文的变分推导过程中,并没有预先假定材料的正泊松比性,这也为探讨具备不同能量形式、拓扑结构的蜂窝状材料的材料性质拓展了一条新的思路。

参考文献

[1] Sun J, Guan Q, Liu Y, et al. Morphing Aircraft Based on Smart Materials and Structures: A State-of-the-Art Review[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2016, 27(17): 2289–2312.

[2] 张 平. 中等尺度变形内变体飞机结构与变形技术研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2014.

[3] Megowan A M R, Cox D E, Lazos B S, et al. Biologically-Inspired Technologies in NASA's Morphing Project [C]. *San Diego: SPIE Smart Structures and Materials*, 2003.

[4] 彭海峰. 柔顺蜂窝蒙皮结构设计及研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2011.

[5] 吴金玺. 超弹性蒙皮拓扑构型研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2014.

[6] 王 博, 张 雄, 徐胜利. 2D周期蜂窝结构面内静动态压缩力学行为研究[J]. *力学学报*, 2009, 41(2): 274–281.

[7] 赵显伟. 可变形蜂窝结构的力学性能分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013.

[8] 张新春, 刘 颖, 李 娜. 具有负泊松比效应蜂窝材料的面内冲击动力学性能[J]. *爆炸与冲击*, 2012, 5: 30–37.

[9] 程文杰, 周 丽, 张平琴, 等. 零泊松比十字形混合蜂窝设计分析及其在柔性蒙皮中的应用[J]. *航空学报*, 2015, 36(2): 680–690.

[10] 李贤冰, 温激鸿, 郁殿龙, 等. 蜂窝夹层板力学等效方法对比研究[J]. *玻璃钢/复合材料*, 2012, S1: 11–15.

[11] Alt S, Ganguly P, Salbreux G. Vertex Models: From Cell Mechanics to Tissue Morphogenesis[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 2017, 372(1720).

[12] Fletcher A G, Cooper F, Baker R E. Mechanocellular Models of Epithelial Morphogenesis [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 2017, 372(1720).

[13] Gómez-Gálvez Pedro, Pablo V M, Antonio T, et al. Scutoids Are a Geometrical Solution to Three-Dimensional Packing of Epithelia[J]. *Nature Communications*, 2018, 9(1): 2960.

[14] Bi D, Lopez J H, Schwarz J M, et al. A Density-Independent Rigidity Transition in Biological Tissues[J]. *Nature Physics*, 2015, 11: 1074–1079.

[15] Murisic N, Hakim V, Kevrekidis I G, et al. From Discrete to Continuum Models of Three-Dimensional Deformations in Epithelial Sheets [J]. *Biophysical Journal*, 2015, 109: 154–163.

[16] Nan N, Hu G H. Morphology of Cylindrical Cell Sheets with Embedded Contractile Ring[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2019, 40(12): 1847–1860.

[17] Jerry Z Y, Weinan E. Generalized Cauchy-Born Rules for Elastic Deformation of Sheets, Plates, and Rods: Derivation of Continuum Models from Atomistic Models[J]. *Physical Review B*, 2006, 74(18).

(编辑: 张 贺)