

密集型空气雾化流场破碎特征数学模型研究^{*}

邓 甜¹, 陈 伟¹, 任兴明¹, 赵可馨¹, Gorokhovski M²

(1. 中国民航大学 中欧航空工程师学院, 天津 300300;

2. Laboratory of Fluid Mechanics and Acoustics, L' Ecole Centrale de Lyon, Lyon 69131, France)

摘 要: 低速液体射流在高速湍流气体作用下的气液同轴射流雾化流场是瞬态密集型喷雾场, 高速湍流中影响和控制雾化的因素很多。针对空气雾化流场液核分布与特征进行分析, 开发了模拟液核的随机浸入体模型, 结合大涡模拟方法对同轴射流空气雾化喷嘴下游流场进行数值模拟。模拟结果与实验结果对比表明: 随机浸入体模型可快速捕捉液核的长度和位置信息。当气液动量比 M 为3~10000时, 能够较准确地预测液核长度, 当 $M>10$ 时, 其预测结果远优于唯象模型; 该模型能够捕捉回流区、大尺度涡等流场结构。同时, 可以准确地预测喷嘴附近的液滴粒径, 特别是在气流速度较大($>60\text{m/s}$)时, 液滴平均直径预测误差 $<10\%$ 。

关键词: 雾化; 流场; 气液相界面; 数值模拟; 大涡模拟

中图分类号: V231.2+3

文献标识码: A

文章编号: 1001-4055 (2021) 02-0355-07

DOI: 10.13675/j.cnki.tjjs.190427

Mathematical Model of Breakup Characteristics in Dense Air Atomization Flow Field

DENG Tian¹, CHEN Wei¹, REN Xing-ming¹, ZHAO Ke-xin¹, Gorokhovski M²

(1. Sino-European Institute of Aviation Engineering, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China;

2. Laboratory of Fluid Mechanics and Acoustics, L' Ecole Centrale de Lyon, Lyon 69131, France)

Abstract: For the low-speed liquid injected into the high-speed strong turbulent gas flow in the same direction, the atomization is a transient-intensive spray, and there are many factors to affect and control the atomization. The distribution and characteristics of the liquid core in the air atomized flow field are analyzed. A random immersed boundary model to simulate the liquid core is developed. Combined with the large eddy simulation method, the numerical simulation of the downstream flow field of a coaxial jet air atomizing nozzle is carried out. The comparison between the simulation results and the experimental results shows that this random immersed boundary model can quickly capture the information of length and position of the liquid nucleus. When the gas-liquid momentum ratio M is 3~10000, the liquid core length can be predicted accurately. When $M>10$, the prediction result is much better than that of the phenomenological model. The model is capable of capturing flow field structures such as recirculation zones and large-scale vortices. The particle size of the droplets near the nozzle can be accurately predicted, especially when the gas velocity is large (bigger than 60 m/s). The average diameter prediction error of the droplets is less than 10%.

Key words: Atomization; Flow field; Air-liquid phase interface; Numerical simulation; Large eddy simulation

^{*} 收稿日期: 2019-06-20; 修订日期: 2019-10-10。

基金项目: 国家自然科学基金 (51506216; U1933110)。

通讯作者: 邓 甜, 博士, 讲师, 研究领域为航空发动机燃烧室、多相流流动。E-mail: dengtian.siae@foxmail.com

引用格式: 邓 甜, 陈 伟, 任兴明, 等. 密集型空气雾化流场破碎特征数学模型研究[J]. 推进技术, 2021, 42(2):355-361. (DENG Tian, CHEN Wei, REN Xing-ming, et al. Mathematical Model of Breakup Characteristics in Dense Air Atomization Flow Field[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2021, 42(2):355-361.)

1 引 言

空气雾化喷嘴是航空燃气轮机和超燃冲压发动机燃烧室常采用的喷嘴,其雾化效果直接影响气液掺混质量,是决定燃烧室性能的关键。然而,空气雾化流场是瞬态密集型喷雾场,不易观察和测量,而且高速湍流中影响和控制雾化的因素很多,因此,对其雾化机理的深入研究还非常有限。随着计算流体力学的蓬勃发展,数值模拟方法在研究雾化领域被广泛接受。其中,对气液两相边界的模拟和捕捉是学者们研究的方向之一。例如,Hirt等^[1]提出的VOF方法,其基本思想是将气液两相流体看成一个整体的混合流体,共用一个动量方程,运用体积分数来表示自由面。Sethian^[2]提出的Level Set方法,通过构建一个高阶函数的零等值面来表征气液两相界面的运动,并用这个高阶函数的代数值区间来区分气液两相,考虑了相界面的表面张力、剪应力和压力的影响。但是当韦伯数很大时,由于数值耗散和误差等原因,造成的该高阶函数数值求解过程中封闭界面内质量不守恒问题尚未被解决^[3]。Kim等^[4]采用添加平衡力的方法改进了直接数值模拟方法(DNS),该方法要求网格尺寸与破碎过程中的最小尺度相当。Pesk^[5]提出的浸入边界法(Immersed boundary method, IBM)将两相复杂边界看作N-S方程中的体力源,并且使用笛卡尔网格而不是按照物体的形状生成复杂贴体网格,但IBM法不适用于两相交界面发生合并或者破碎的情况。黄生洪等^[6]采用欧拉-拉氏方法进行气液两相流数值模拟,对压强分布的模拟结果与实验结果非常接近。但由于模型未考虑液滴的碰撞效应,造成部分区域压强值比实验值偏低23%。Deng等^[7]在进行非均匀流场射流破碎研究时采用实验与数值模拟结果对比分析的方法,准确分析了一次雾化射流破碎特征,但由于缺乏相关模型,二次雾化特征仅能通过实验手段进行研究。欧拉混合模型(Eulerian mixing model)将液滴看作与周围气体相互渗透、相互滑移的拟流体,并引入示踪方程^[8-10]。唯象模型(Phenomenological model)采用统计原理表征初始雾化特征。典型的唯象模型将液体射流用液体小球喷入计算域代替,液体小球尺寸等于喷口直径,之后再经历破碎过程,形成各种尺寸的小液滴。然而,由于雾化总是发生在距离喷嘴出口很近的位置,并且气液两相流场在极短的时间内变化剧烈,这种极其不稳定的过程反映在数值模拟中很容易造成在喷嘴附近几个网格内气液相互耦合过于强烈,导致局

部计算发散。王于蓝等^[11]使用ETAB(Enhanced tab)模型根据韦伯数大小来区别破碎状态,可以很好地模拟二次雾化过程,但因缺少专门的一次雾化结果相应的预测模型,文中认为燃油进入涡轮时已完成一次雾化。

尽管目前的雾化模型研究已经建立了相应的物理和数学模型,及相关数值计算方法,但这些模型和应用都是在低速流动条件下进行的。关于液体在高速气流中雾化过程的模型研究还很有限,因此需要开发更加准确的计算模型。

本文研究针对图1所示的低速射流在高速湍流气体作用下形成雾化流场的过程。靠近空气雾化喷嘴出口(红色虚线内),液体射流核心仿佛“浸入”周围的湍流气体中,且被大小不同的或与之相连或与之相离的液片包围,在接下来的二次雾化阶段,这些液片在高速湍流气流作用下破碎成更细小的液滴,从而形成气液掺混的雾化流场。

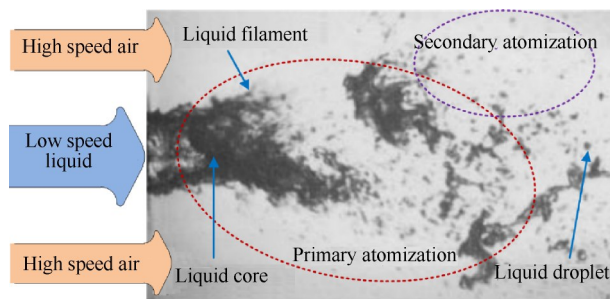


Fig. 1 Diagram of the liquid jet atomization process behind the nozzle

本文提出一种随机浸入体模型,将靠近喷嘴出口区域的液核看作具有随机结构的浸入式多孔体,并引入浸入力作为作用在气体流动上的分布力。应用液体射流的初始破碎机制作为雾化这个随机过程的全局变量,包括液体概率分布、液核的构型及其曲率。采用古典边界^[12]条件:假设边界无滑移,即粘性流体黏在界面两侧,并且界面为零质量、表面张力恒定。

2 液核的随机浸入体模型

假设射流核心外表面上液丝的破碎与碰撞过程远小于湍流时间尺度,且局部加速度取决于相界面的加速度。由此,本文构建的随机浸入体模型要解决三个问题:一是射流初始阶段仍然为连续相液体在流场中的分布概率,由此得到液核的位置信息;二是气液两相界面的外法向向量;三是气液两相界面的局部加速度,由二和三得到液核的表面形貌。此

外,还须建立液丝分离模型,即初始雾化液滴模型。

2.1 连续相液体分布模型

根据现代物理研究的普遍方法,在研究湍流、雾化、裂纹等破碎问题时,由于裂纹的每个扩展分支具有极大自由度,如今还难以预测其走向,因此分析此类问题时一般采用随机过程假设^[13]。建立如图2(a)所示的坐标系,射流方向为 x 轴正方向,射流喷嘴出口直径为 D_1 。喷嘴出口附近的液核具有不稳定的几何形状,为了模拟其分布,在出口设置与液体初始射流速度相等且质量为零的随机粒子,其随湍流气流向下运动,假设其在 y 轴方向(径向)随机运动,记录其运动轨迹,径向位置记为 $r_{s,x}$, s 表示随机(Stochastic)过程。对于每个随机粒子,沿着它的运动轨迹,横坐标为 x 时,径向位置与 x 轴之间,即长度为 $r_{s,x}$ 区间内是液体,图2(b)网格中绿色区域。

每个随机液体粒子具有一定的“生命周期” τ_1 。假设液核的破碎雾化由气液初始动压差 $|\rho_g u_{g,0}^2 - \rho_l u_{l,0}^2|$,射流的惯性表征 ρ_l 以及射流初始直径 D_1 三个参数决定,由量纲分析可知:

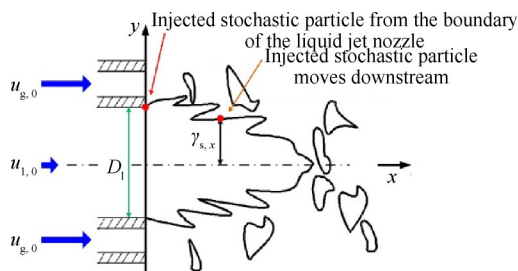
$$\tau_1^{-1} = \frac{1}{D_1} \sqrt{\frac{|\rho_g u_{g,0}^2 - \rho_l u_{l,0}^2|}{2\rho_l}} = \frac{u_{l,0}}{D_1} \sqrt{\frac{|M-1|}{2}} \quad (1)$$

式中 $u_{g,0}$ 和 $u_{l,0}$ 分别是喷嘴出口气体速度和液体速度, $M = (\rho_g u_{g,0}^2)/(\rho_l u_{l,0}^2)$ 为气液动量比。同时,每个粒子具有恒定的轴向(x 方向)速度,记为对流速度 u_s ,如式(2)。假设粒子径向位置 $r_{s,x}$ 通过级联过程逐步改变,则某个粒子下一时刻位置由上一时刻位置与随机分布函数 α 相乘而得。其中, $0 \leq \alpha \leq 1$,如式(3)所示。

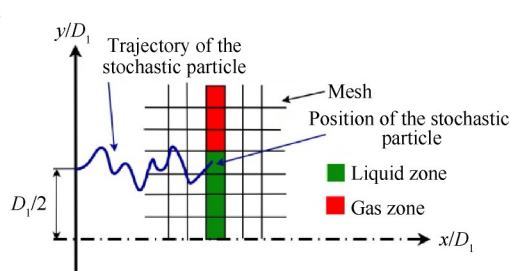
$$u_s = \frac{\sqrt{\rho_g} u_{g,0} + \sqrt{\rho_l} u_{l,0}}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_l}} \quad (2)$$

$$r_{s,x} + u_s \Delta t = \alpha r_{s,x} \quad (3)$$

连续射入50个随机粒子,根据每个粒子的运动轨迹,统计各个网格节点绿色出现的概率,从而得到



(a) Injection trajectory and parameter definition of random particles



(b) Method for defining the probability of liquid in a grid node

Fig. 2 Schematic of simulation of the liquid core

空间内各网格节点是液体的概率 $P_l(\mathbf{x}, t)$,即每个网格节点粒子存在的概率。对于某网格节点,若 $P_l(\mathbf{x}, t) = 0$,则该点处于气流场中;若 $P_l(\mathbf{x}, t) = 1$,则其处于液体射流核心;若 $0 < P_l(\mathbf{x}, t) < 1$,则其处于液丝或液片形成区域。

图3为采用上述方法得到的3个随机粒子的运动轨迹,进而可得喷嘴出口下游液体的分布概率,如图4所示。其中红色区域表示 $P_l(\mathbf{x}, t) = 1$,为连续相液体存在区域,即液核区域,且红色区域的长度即为液核的长度;其它颜色区域表示 $0 < P_l(\mathbf{x}, t) < 1$,为液丝或液片形成区域。

将采用上述随机模型得到的液核长度,与实验结果和唯象模型的计算结果^[14-16]进行对比,如图5所示,其中 L 为液核长度, D_1 是喷嘴出口液体射流直径。红色实线为本文提出的随机模型计算结果,蓝色虚线为Lasheras等的唯象模型模拟结果,方块和三角符号为两组实验结果。可以看到,当射流进口气液动量比 $M > 10$ 以后,唯象模型很难准确预测液核长度,而随机模型的模拟结果与实验吻合情况良好。

2.2 气液两相界面的外法向向量模型

相界面的外法向方向仍采用前文所述从喷嘴出口射入随机粒子的方法,这些粒子向下游 x 轴正方向运动过程中,每个时刻运动方向具有随机性。假设每个随机粒子被单位球体包围,且这个单位球体跟随粒子一起向下游运动。如果该球体表面存在布朗运动,那么在每个时刻,就可以根据布朗运动的位置得到中心粒子到该位置的矢量半径 $\mathbf{n}_i(\mathbf{x}, t)$,以这个矢量半径方向为每个时刻的外法向方向,如图6所示。

矢量半径 $\mathbf{n}_i(\mathbf{x}, t)$ 可由随机数纬度角 θ 和经度角 ϕ 决定

$$\mathbf{n}_i = \begin{cases} n_x = \cos(\theta)\cos(\phi) \\ n_y = \sin(\theta) \\ n_z = \cos(\theta)\sin(\phi) \end{cases} \quad (4)$$

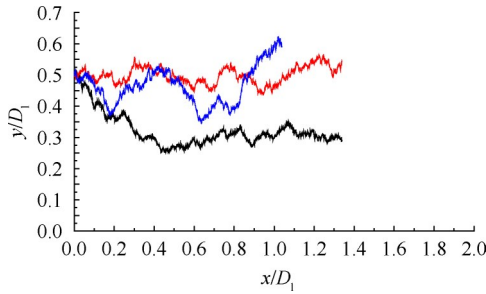


Fig. 3 Movement trajectory of different random particles

$$(u_{g,0}=60\text{m/s}, u_{l,0}=0.52\text{m/s})$$

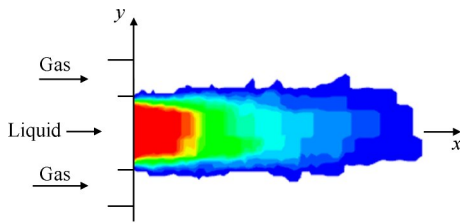


Fig. 4 Probability distribution of liquid downstream of the nozzle outlet (red zone: $P_1(x, t)=1$; blue zone: $P_1(x, t)=0.01$)

$$(u_{g,0}=60\text{m/s}, u_{l,0}=0.52\text{m/s})$$

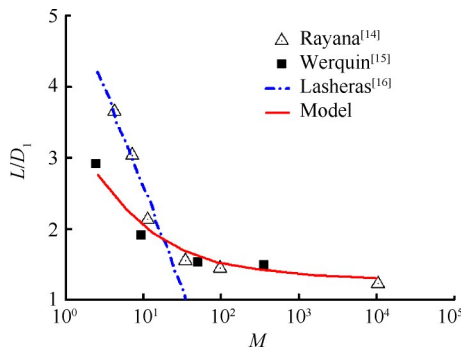


Fig. 5 Comparison between measured and computed length of the liquid core

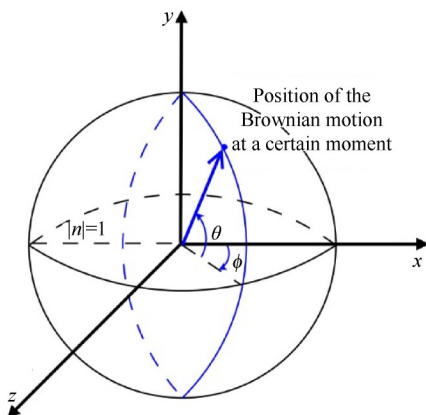


Fig. 6 Diagram of the external normal vector obtained from the position of the Brownian motion

2.3 气液两相界面的局部加速度模型

在液丝和液片形成区域,对于某个网格节点,它或者处于气流场(图7中点A),或者处于液核(点B),

或者处于两相交界面(点C,即 $P_1 \neq 0$)。对于本文研究的空气雾化流场,液体射出喷嘴后很快即在其表面发生破裂,并产生液丝或液片,且雾化区域内分布着大量细密的液滴,所以最常见的是最后一种情况。相界面在流场内某点处的加速度 $\dot{u}_s(\mathbf{x}, t)$ 可以通过计算该网格点前后时刻相界面速度之差得到,如式(5)所示

$$\dot{u}_s n_i = \frac{u_s^{n+1} n_i - \langle u_i \rangle^n}{\Delta t} \quad (5)$$

式中 $u_s^{n+1} n_i$ 是 $n+1$ 时刻相界面对流速度。如果该网格点处于连续液相($P_1(\mathbf{x}, t) = 1$),则上一时刻速度满足关系式(6);如果该网格点处于气液两相区域(即 $0 < P_1(\mathbf{x}, t) < 1$),则上一时刻速度须满足关系式(7)。

$$\langle u_i \rangle^n = u_s^n n_i \quad (6)$$

$$\langle u_i \rangle^{n+1} = (1 - P_1) \langle u_i \rangle^n + P_1 u_s^{n+1} \quad (7)$$

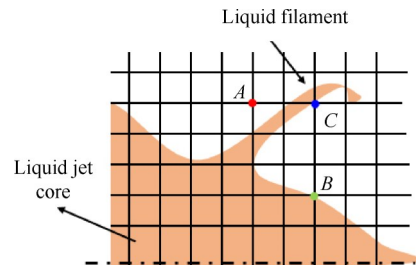


Fig. 7 Diagram of the grid nodes in the gas phase or liquid phase in the primary atomization region

2.4 初始雾化液相离散相模型

Kolmogorov 理论^[17]指出在一个自相似过程中,描述这个过程的变量是呈对数正态分布的。因此,可以假设初始雾化液滴粒径尺寸分布 $f(r)$ 为对数分布,进而,遇到大粒径液滴的概率正比于遇到其所生成的小液滴的概率,即 $f(r_1 + r_2) \approx f(r_1) f(r_2)$ 。初始雾化形成的大液滴是从液核上剥离出来的液丝形成的,因此,可以利用产生液丝的 Rayleigh-Taylor 不稳定波长(λ_{RT})作为初始液滴粒径分布的特征尺寸,因此粒径的尺寸分布函数为

$$f(r) = \frac{1}{\lambda_{RT}} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_{RT}}\right) \quad (8)$$

对于液滴的初始速度,假设其运动方向与与相界面外法向是相同的^[16],当液丝形成液滴时,在两相界面存在卷吸速度,该速度大小取决于气液相的动量平衡。

3 随机浸入体模型预测结果验证

利用上述随机浸入体模型,对文献[18]中的平板射流雾化流场进行数值模拟。喷嘴出口为原点,射流方向为 x 方向,液体射流直径 $D_l = 0.02\text{m}$,气体射流直径 $D_g = 0.04\text{m}$,以气体射流直径 D_g 为分母进行无量纲化,确定计算域为 $L_x = 7, L_y = 15, L_z = 2$ 。其中 $y = 7.5$ 为射流中心线。气体射流速度为 $20\sim 90\text{m/s}$,液体射流速度为 $0.173\sim 0.78\text{m/s}$,气液动量比 M 为16。

3.1 数值方法与网格划分

对于雾化流场中的湍流气体,采用大涡模拟方法(Large eddy simulation, LES),空间采用非均匀四阶

紧致差分格式^[12],时间采用四阶 Runge-Kutta 格式^[19],以及Thompson-Giles的边界条件^[20-21]。假设喷嘴出口边界使用代表各向同性湍流的宽带强迫,流入处的纵向平均速度剖面是边缘光滑的顶帽结构。在流入边界处,给出了流入特征变量的时间变化,用内偏导数求解流出特征变量的方程。连续液相采用本文开发的随机浸入体模型。

采用结构化网格并进行无关性验证。网格数分别为: $96 \times 121 \times 16$; $96 \times 245 \times 32$; $133 \times 245 \times 32$ 。图8是气体平均速度分布,数据表明 $96 \times 245 \times 32$ 与 $133 \times 245 \times 32$ 的计算结果接近。考虑节约计算时间,后续计算均基于 $96 \times 245 \times 32$ 网格。

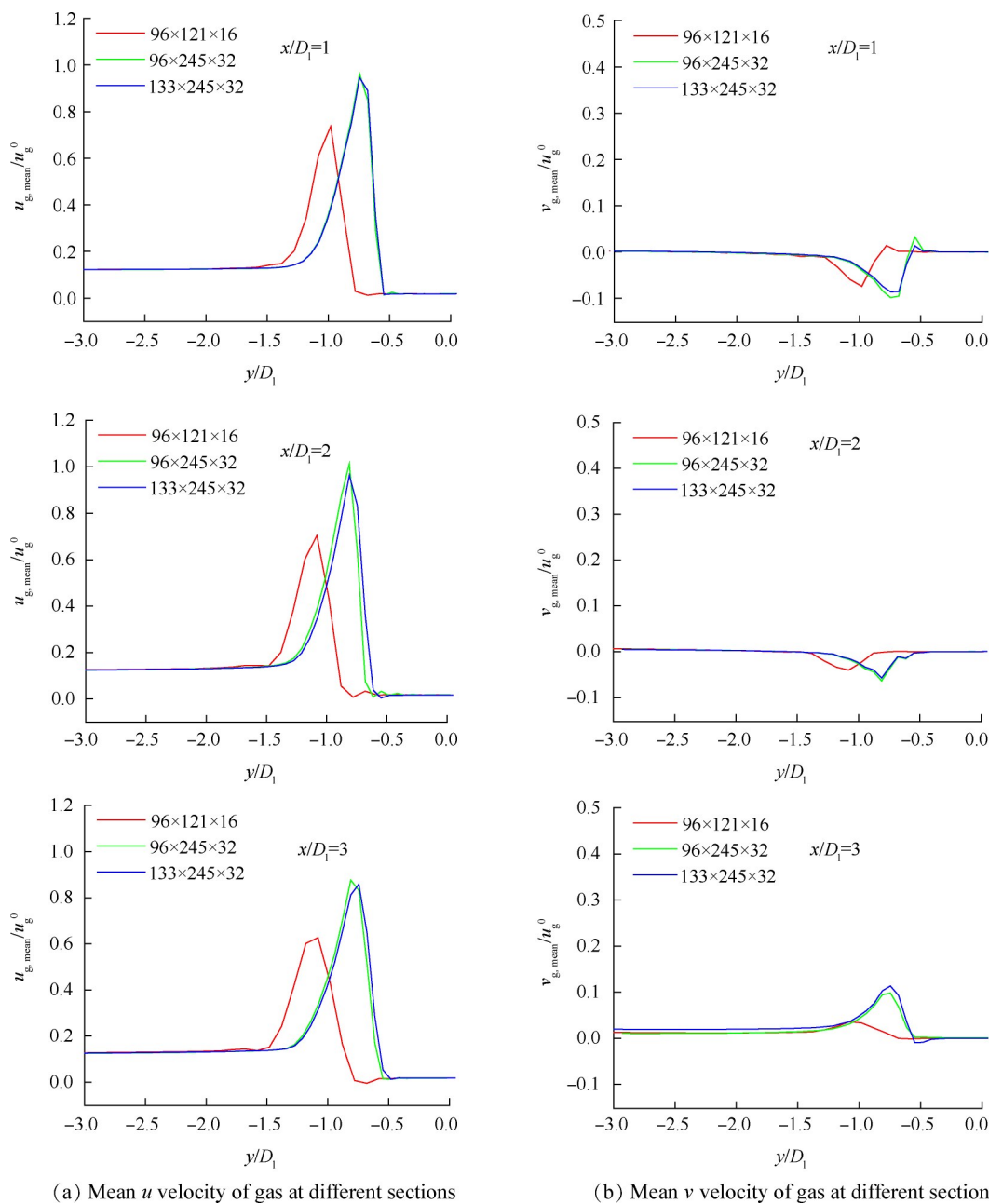


Fig. 8 Average velocity profile of the gas phase at different axial positions

3.2 数值模拟结果与分析

当气流速度为 60m/s, 液体速度为 0.52m/s, 气液动量比 $M=16$ 时, 液滴位置尺寸和速度分布如图 9 所示。从图中可以看出, 液核拖曳气流在液核前端形成回流区, 并且在下游形成 10~200 μm 的液滴带。液核周围气流的速度梯度非常显著, 并且液核的下游出现大尺度涡结构。喷嘴附近区域主要由大液滴填充, 同时存在较小的剥离液雾, 这与文献[18]实验结果相吻合。图 10 为气液动量比 $M=16$, 而气体射流速

度从 20m/s 到 90m/s 变化时, 在 $x/D_1 = 1.5, y/D_1 = 0.5$ 位置, 破碎液滴平均直径的模拟结果与实验结果的对比。可以看出, 当气体射流速度 $>60\text{m/s}$ 时, 液滴平均直径 d_{10} 的相对误差 $<10\%$, 平均索特直径 d_{32} 相对误差也较小。并且, 当气液动量比 M 保持不变时, 液滴的平均直径 d_{10} 和平均索特直径 d_{32} 均随着射流气体速度增加而减小。可见, 本文所提出的模型可以较准确地预测这种密集型雾化流场喷嘴附近的液滴粒径。

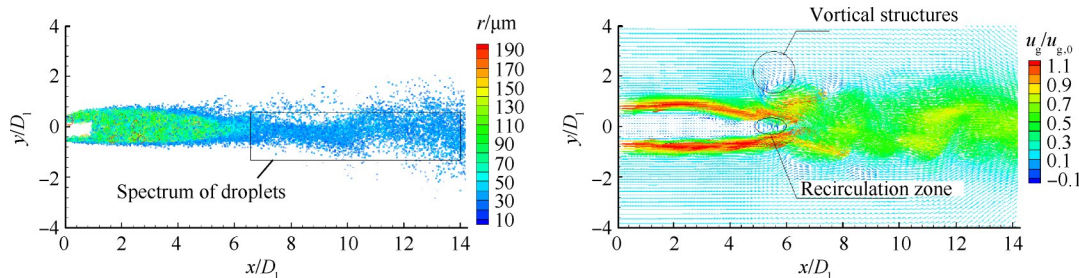


Fig. 9 Droplet position, size and velocity ($u_{g,0}=60\text{m/s}$, $u_{l,0}=52\text{m/s}$, $M=16$)

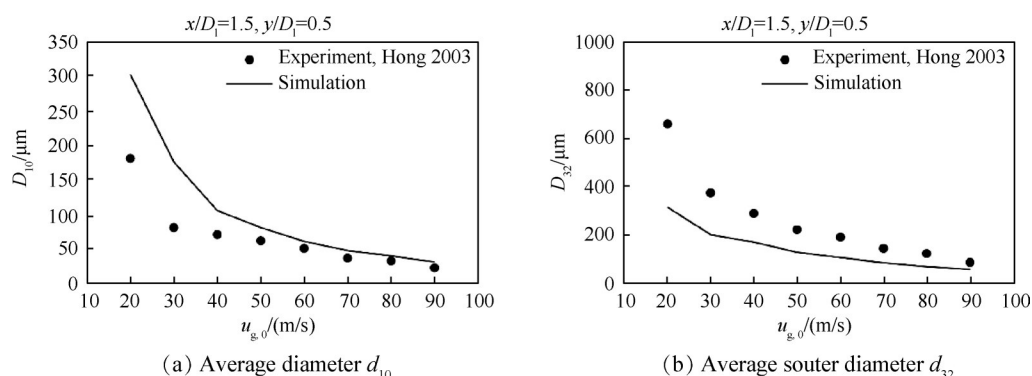


Fig. 10 Comparison of diameters between model calculations and experimental results of Hong^[18] ($x/D_1=1.5, y/D_1=0.5, M=16$)

4 结 论

本文开发了适合于高速气流空气雾化流场模拟的随机浸入体模型, 利用该模型模拟了平板射流雾化流场, 并将计算结果与实验结果进行对比, 得出如下结论:

(1) 引入随机粒子模型, 通过计算液体分布的概率 $P_l(\mathbf{x}, t)$ 得到液核的长度和位置信息。与实验对比表明, 当气液动量比 M 为 3~10000 时, 该模型能够较准确地预测液核长度, 特别是当 $M>10$ 时, 其预测结果远优于唯象模型。

(2) 本文提出的模型能够捕捉液核前端的回流区、液核后面的大尺度涡等流场结构。同时, 可以准确地预测密集型雾化流场喷嘴附近的液滴粒径, 特别是在气流速度较大 ($>60\text{m/s}$) 时, 预测的液滴平均直

径误差 $<10\%$ 。

致 谢: 感谢国家自然科学基金的资助。

参考文献

- [1] Hirt C W, Nichols B D. Volume of Fluid Method for the Dynamics of Free Boundaries [J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, 39(1): 201–225.
- [2] Sethian J A. Level Set Methods and Fast Marching Method[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [3] Sussman M, Smereka P, Osher S. A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow [J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 114(1): 146–159.
- [4] Kim D, Herrmann M, Moin P. The Breakup of a Round Liquid Jet by a Coaxial Flow of Gas Using the Refined Level Set Grid Method [C]. *Florida: 59th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics*, 2006.

- [5] Peskin C S. Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart[J]. *Journal of Computational Physics*, 2015, 25(3): 220-252.
- [6] 黄生洪, 徐胜利, 刘小勇. 煤油超燃冲压发动机两相流场数值模拟(I)数值校验及总体流场特征[J]. 推进技术, 2004, 25(6): 484-490. (HUANG Sheng-hong, XU Sheng-li, LIU Xiao-yong. Numerical Investigation on Two Phase Flow of a Kerosene-Fueled Scramjet with 3D Cavity (I) Numerical Calibration and Characteristics of General Flow [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2004, 25(6): 484-490.)
- [7] Deng T, Chen W, Ren X-M, et al. Experiment on the Breakup of Liquid Jets in Different Cross-Airflows [J]. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2019, (7): 1-13.
- [8] Saffman P G. On the Boundary Condition at the Surface of Porous Medium [J]. *Studies in Applied Mathematics*, 1971, 50(2): 93-101.
- [9] Joseph D D, Lundgren T S, Jackson R, et al. Ensemble Averaged and Mixture Theory Equations for Incompressible Fluid-Particle Suspensions [J]. *International Journal of Multiphase Flow*, 1990, 16(1): 35-42.
- [10] Lundgren T S. Slow Flow Through Stationary Random Beds and Suspensions of Spheres [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1972, 51(2): 273-299.
- [11] 王于蓝, 穆 勇, 卢海涛, 等. 涡轮级间燃油雾化特性数值研究[J]. 推进技术, 2019, 40(4): 825-834. (WANG Yu-lan, MU Yong, LU Hai-tao, et al. Numerical Study on Fuel Atomization Characteristics in Turbine Stages [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2019, 40(4): 825-834.)
- [12] Lele S K. Compact Finite Difference Schemes with Spectral-Like Resolution [J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, 103(1): 16-42.
- [13] Sornette. Critical Phenomena in Natural Science [M]. Berlin: Springer, 2000.
- [14] Rayana F B. Contribution à L'étude Des Instabilités Interfaciales Liquide-Gaz en Atomisation Assistée et Tailles de Gouttes [D]. Grenoble: Institut National Polytechnique de Grenoble, 2007.
- [15] Werquin O. Diagnostics de Scalaires Par Plan Laser dans des Jets Diphasiques Denses [D]. Rouen: Energétique Rouen, 2001.
- [16] Lasheras J, Villermaux E, Hopfinger E. Break-Up and Atomization of a Round Water Jet by a High-Speed Annular Air Jet [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1998, 357: 351-379.
- [17] Kolmogorov A N, Levin V, Hunt J C R, et al. Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence [J]. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 1991, 434(1): 15-17.
- [18] Hong M. Atomisation et Mélange dans Les Jets Coaxiaux Liquide-Gaz [D]. Grenoble: Institut National Polytechnique de Grenoble, 2003.
- [19] Carpenter M H, Gottlieb D, Abarbanel S. The Stability of Numerical Boundary Treatments for Compact High-Order Finite-Difference Schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, 108(2): 272-295.
- [20] Thompson K W. Time-Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems [J]. *Journal of Computational Physics*, 1990, 89(2): 439-461.
- [21] Giles M B. Nonreflecting Boundary Conditions for Euler Equation Calculations [J]. *AIAA Journal*, 1990, 28(12): 2050-2058.

(编辑:史亚红)