拉压不同模量凹腔陶瓷导流块动力固有模态特性研究*

汪颖异1,李范春1,马雪松2,林 聪

(1. 大连海事大学 船舶与海洋工程学院, 辽宁 大连 116026;

2. 北京动力机械研究所 高超声速冲压发动机技术重点实验室, 北京 100074)

摘 要:为了研究拉压不同模量(以下简称双模量)凹腔陶瓷导流块的动力特性,将陶瓷导流块等效成一根双模量材料简支 Euler 梁,从而得出凹腔火焰稳定器在双模量材料下的振动情况,保证该结构在高温状态下稳定。以双模量简支 Euler 梁为研究对象,通过二次开发,实现了 Ansys 平台分析具有该类材料属性结构动力特性的功能。将得到的前三阶固有频率与文献中推得的频率计算公式所得的固有频率进行了分析对比,得到的误差除了第一阶外都大于5%,发现文献所得结果有缺陷。将得到的各阶频率及振型曲线与已知的经典弹性理论的频率与振型曲线进行对比,说明材料的双模量属性对固有频率的影响很大,对振型曲线并没有影响。通过振型及材料属性分布图能直观地观察到材料的拉压区域,说明材料的拉压区域不能仅分为两个区域,振型阶次越高分区也越复杂。

关键词: 双模量; 动力特性; 陶瓷导流块; 二次开发; 固有频率; 振型; 材料属性分布图 中图分类号: C414.3⁺3 文献标识码: A 文章编号: 1001-4055 (2019) 02-0424-07

DOI: 10.13675/j. cnki. tjjs. 180038

Dynamic Natural Mode Characteristics Analysis of Cavity Ceramic Diversion Block with Different Modulus in Tension and Compression

WANG Ying-yi¹, LI Fan-chun¹, MA Xue-song², LIN Cong¹

(1. Ship Architecture and Ocean Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China; 2. Science and Technology on Scramjet Laboratory, Beijing Power Machinery Institute, Beijing 100074, China)

Abstract: In order to study the dynamic characteristics of the ceramic diversion block with different modules in tension and compression (the following is referred as bi-modulus), the ceramic diversion block was equivalent to a simply supported Euler beam with bi-modulus, thus, the vibration of the cavity flame stabilizer with bi-modulus material was obtained to ensure that the structure is stable at high temperature. Taking simply supported Euler beam as a research project, the function of analyzing dynamic characteristics of materials which have these material properties has come true in Ansys by secondary development. After comparing the initial three frequencies which were gained from finite element method and the analytical formula in a literature respectively, errors were gained. Except for the first-order frequency, errors are all more than 5%, so the analytical formula in literature has some flaws. Comparing the frequency and vibration mode curve of each order with these which were gained in classical elastic theory, it shows that the bi-modulus property of material has a great influence on the natural frequency and has no effect on the vibration mode curve. The tensile and compressive zones of the material can be visually observed through the vibration mode curves and material property distribution diagrams, indicating that the zones of tension and compression of the material cannot be divided into only two. The

^{*} 收稿日期: 2018-01-16; 修订日期: 2018-03-13。

基金项目: 国家自然科学基金(5100906)。

higher the vibration mode, the more complex the zone is.

Key words: Bi-modulus; Dynamic characteristic; Ceramic diversion block; Secondary development; Natural frequency; Vibration mode; Material property distribution diagram

1 引 言

火焰稳定器是一种用以在燃烧设备中保持火焰 稳定的装置,凹腔火焰稳定器装置(其结构组成如图 1所示)目前在超燃冲压发动机上被广泛应用。由于 其在高温状态下工作,对于其的耐高温性和稳定性 具有相当高的要求,因此具有高温稳定性的陶瓷材 料作为其导流块是一个不二的选择。目前一些学者 对于凹腔火焰稳定器有一定的研究,蔡尊等实验研 究了凹腔主动喷注对点火过程的影响[1],用数值仿真 进一步研究了凹腔主动喷注的强迫点火方案[2]。杜 玲等利用应力求张量法对于凹腔火焰稳定器组件界 面的适配性进行了应力应变分析[3]。对于陶瓷导流 块来说,在经典弹性理论中,通常认为其材料的拉伸 和压缩弹性模量相等,但是目前包括陶瓷在内的很 多材料呈现出拉压弹性模量不等的性质,甚至有些 材料的拉压弹性模量相差很大。这时候如果再使用 经典弹性理论就会给计算结果带来很大误差,因此 对于双模量的研究就应运而生。

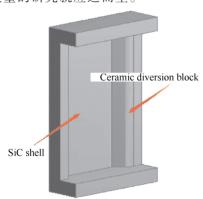


Fig. 1 Cavity substructure

双模量概念最先由 Timoshenko^[4]在 20 世纪 40 年代提出,20 世纪 70 年代以后,以 Ambartsumyan^[5]为首的力学家在进行理论和实验研究之后,将这个概念应用到了弹性理论中,由此不同拉压模量弹性理论逐渐进入人们的视角。近年来也有诸多海外学者研究了关于拉压弹性模量不等材料的问题,得到了不少研究成果。Khan K等使用迦辽金时域方法研究了双模量对圆板这种层合结构频率响应的影响,得出了正负半周幅度的变化^[6]。Khan A H等研究了双模量的双层复合板在周期激励下的非线性受迫振动特

性,利用打靶法得出双模量造成打靶迭代中解的偏 差,从而导致收敛失败的结论[7]。Xie等提出了用于 分析在复杂三维应力状态下双模量材料结构的本构 方程[8]。Radostin等用理论分析和数值模拟研究了 非线性声波在线性耗散双模量介质中的传播[9]。 Katicha 等根据 IDT 式样呈现的拉压模量比确定了 IDT式样中的双模量应力分布[10]。国内对于双模量 问题也进行了研究,杜玲等以陶瓷梁为例,验证了应 力球张量法适用于单双向应力状态下不同模量计 算,为对于双模量的有限元计算奠定了基础[11-12]。张 洪武等对具有双模量的材料建立了平面静力问题的 参变量变分原理[13]。姚文娟等对拉压不同模量梁提 出了中性轴判定定理,并推导出了中性层计算表达 式及应力的解析式[14]。王明慧等分析了拉压不同模 量材料在自由振动情况下的应力和应变问题,并且 给出了应力与应变的解析式[15]。

虽然对于双模量的问题有大量的研究,但是主要集中于静力学问题,对动力学问题的研究还有一定的欠缺,并且得出的结论有一定的局限性。对于陶瓷导流块这种具有明显双模量特性的材料进行动力特性的研究变得更加迫切。针对这样的情况,本文将陶瓷导流块等效成一根简支 Euler梁,以此为例,通过对商用有限元软件的二次开发,进行了双模量 Euler梁的动力特性分析,并且得到了前三阶材料属性分布图、振型图以及固有频率,验证了目前解析解的局限性,同时也提出了进行双模量材料的动力分析的方法,为后续对于整个凹腔火焰稳定器的研究奠定基础。

2 理论推导

2.1 同模量时经典理论下 Euler 梁的自由振动

对于 Euler-Bernoulli 简支梁^[16],如图 2,其横向自由振动的微分方程为

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

式中 m 为单位长度分部质量, EI 为弯曲刚度。 上述振动方程为四阶常系数线性偏微分方程, 用分 离变量法求其解为

$$y(x,t) = (A\sin ax + B\cos Ax + C\sin ax + D\cos ax)(E\sin \omega x + F\cos \omega t)$$
(2)

式中 ω 为横向振动频率,常数A,B,C,D取决于

边界条件, E, F取决于运动初始条件。

将边界条件代入可得简支梁的固有频率为

$$\omega_{j} = a^{2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \left(\frac{j\pi}{l}\right)^{2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$
 (3)

式中 $a^2 = \frac{\omega^2 \rho A}{EI}$

最后求得第i阶谐调固有振型为

$$\varphi_j(x) = A_j \sin \frac{j\pi x}{l}$$
 $(j = 1, 2, 3, \cdots)$ (4)

式中待定常数4.由运动的初始条件确定。



Fig. 2 Simply supported beam

2.2 双模量时 Euler 梁的自由振动

目前为止,有些学者推导了双模量简支梁的频率计算公式[17],这些公式是将材料的拉压模量分为上下两个分区并且是基于 Euler 梁理论即引入了平面假设得到的,公示推导过程如下。

梁的横截面如图 3 所示, h_1 和 h_2 分别为上下两条 边到中性轴的距离,并且 $h_1 + h_2 = h$,h 为梁高。当 $E^+ = E^-$ 时中性轴与z轴重合。

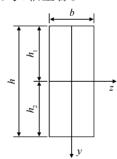


Fig. 3 Cross section diagram of beam

引入不同模量弯曲刚度 D_e

$$D_{e} = \frac{b}{3} \left(E^{+} h_{2}^{3} + E^{-} h_{1}^{3} \right) \tag{5}$$

式中 E^+ 为拉伸弹性模量, E^- 为压缩弹性模量。这里的 D_e 即为式(2)中的EI,将 D_e 代入式(2)可得振动方程

$$D_{e} \frac{\partial^{4} y}{\partial x^{4}} + m \frac{\partial^{2} y}{\partial t^{2}} = 0 \tag{6}$$

用分离变量法解微分方程,得到的固有频率为

$$\omega_j = \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{D_e I}{\rho A}} \tag{7}$$

3 简支梁的动力分析

3.1 有限元的二次开发

对于受力构件来说,每一点的应力状态都可以

用一个二阶对阵张量来表示,根据张量的性质,可以 将应力张量分解成两个张量之和。

$$\sigma_{ii} = \sigma_{ii} + \delta_{ii}\sigma_{m} \tag{8}$$

式中 σ_{ij} 称为应力偏张量,应力偏张量只使物体产生形状变化, $\delta_{ij}\sigma_{m}$ 称为应力球张量,其任何方向都是主方向,球应力状态的特点是在任何切平面上都没有切应力。且主应力均为平均应力

$$\sigma_{m} = \frac{1}{3} (\sigma_{1} + \sigma_{2} + \sigma_{3}) = \frac{1}{3} J_{1}$$
 (9)

式中 J₁ 是应力张量的第一不变量,与所取的坐标无关,对于一个确定的应力状态,它是单值。根据应力球张量的特点,定义拉压弹性模量,若

$$\sigma_{m} = \sigma_{1} + \sigma_{2} + \sigma_{3} \ge 0 \tag{10}$$

体积增大,发生拉伸变形,定义该点为拉伸弹性模量 E^+ ,若

$$\sigma_m = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 < 0 \tag{11}$$

体积减小,发生压缩变形,定义该点为压缩弹性模量 E^- 。

将梁上所有点的拉压弹性模量定义完成之后即得到了整个梁的拉压弹性模量。整个流程如图 4 所示。将图 4 所示的程序在 APDL 中进行编程,对拉压模量相等即 $E^+=E^-$,拉压模量比 $E^+/E^-=2/2.5$, $E^+/E^-=$

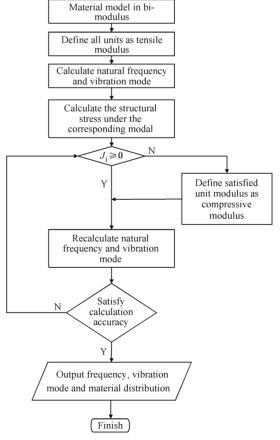


Fig. 4 APDL flow chart

2/3, E⁺/E⁻=2/4, E⁺/E⁻=2/5, E⁺/E⁻=2/6的简支梁分别进行模态分析,得到了前三阶拉压不同模量材料属性分布图,振型图以及频率。

3.2 同模量简支梁的动力分析

将梁的两侧面的中点进行位移约束。梁的边长为 $0.4\text{m} \times 5\text{mm}$,梁厚为 2mm,取弹性模量 E=20GPa,泊松比 $\mu=0.25$,密度 $\rho=2270\,\text{kg/m}^3$ 。由于 Euler 梁理论略去了剪切变形及转动惯量效应,因此为了得到准确的结果,本文所选取的梁尺寸的高跨比较小。当 E^+ 与 E^- 相等时,即 E^+ = E^- =20GPa,用图 4 所示的程序在 Ansys 中进行分析计算,得到前三阶频率分别为 $\omega_1=42.05\text{Hz}$, $\omega_2=168.07\text{Hz}$, $\omega_3=377.69\text{Hz}$ 。表 1 为 $E^+=E^-$ 时,有限元求得的自振频率与 Euler 梁理论所得的自振频率。

从表中可以看出,当 $E^* = E^-$ 时,用开发的动力分析模块所求得的自振频率与Euler梁理论所得的自振频率近似,并且误差都在0.3%以内,这说明开发的动力分析模块的可靠性,并且可以将该模块运用于双模量材料。

Table 1 Natural frequencies obtained by finite element method and Euler beam theory

Frequency/Hz	Euler	Finite element method	Error/%
ω_1	42.06	42.05	0.026
ω_{2}	168.24	168.07	0.104
ω_3	378.55	377.69	0.227

3.3 双模量简支梁的动力分析

3.3.1 小高跨比梁的动力分析

梁的约束、尺寸、泊松比和密度都与拉压模量相等时的梁一致,对 $E^+=20$ GPa, $E^-=25$ GPa即 $E^+/E^-=2/2.5$ 的情况,用图 4 的程序进行了分析。由于式(6)~(8)得出的结论引入了平面假设,略去了剪切变形和转动惯量效应,因此对于高跨比小的梁才能进行较准确的分析。表 2 和表 3 分别为 $E^+/E^-=2/2.5$ 时,式(7)求得的频率与有限元法得到的频率的对比。

从表中可以看出,当 E^+/E^- = 2/2.5 时,由动力分析模块求得的前三阶自振频率与式(7)求得的自振频率近似并且前两阶误差均在2%之内,第三阶误差也接近5%。由于式(7)是在Euler梁理论的基础上得出的,而随着阶数的增加,即使是在小高跨比的情况下,剪切变形以及旋转惯量效应会越发明显,导致计算误差增大。所以总体来说以上的计算满足工程需求。由此说明动力分析模块的准确性,可以将之运用于工程分析中。

Table 2 Comparison of analytical formula and finite element method in $E^+/E^-=2/2.5$

Frequency/Hz	Analytical formula	Finite element method	Error/%		
$\boldsymbol{\omega}_1$	45.231	44.394	1.85		
$\boldsymbol{\omega}_2$	180.924	177.4	1.94		
ω_3	378.55	398.72	5.33		

为了进一步验证有限元方法的准确性,将 E^+/E^- 2/2.5 时的情况进行验证。通过用经典弹性理论即式(3)计算 E=20 GPa 和 E=25 GPa 的频率以及通过有限元方法求解 $E^+/E^-=2/2.5$ 的频率进行比较讨论。由已知的弹性理论知识可知 $E^+/E^-=2/2.5$ 的频率一定在 E=20 GPa 和 E=25 GPa 的频率之间。E=20 GPa, $E^+/E^-=2/2.5$ 和 E=25 GPa 的前三阶频率图如图 5 所示。

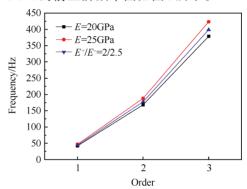


Fig. 5 Frequencies in the condition of $E^+/E^-=2/2.5$, E=20GPa and E=25GPa

从图 5 中可以看出, $E^*/E^-=2/2.5$ 的频率在 E=20GPa和 E=25GPa的频率之间,这与已知的弹性理论相同,由此说明用有限元法计算出的 $E^*/E^-=2/2.5$ 的频率是准确的,进一步验证了有限元法的准确性。

3.3.2 大高跨比梁的动力分析

梁的约束、泊松比和密度都与拉压模量相等时的梁一致,将梁的边长变为 $0.4\text{m} \times 0.025\text{m}$,梁厚为 0.01m,其高跨比相较于前文中的大但也是在 Euler梁理论适用的范围之内。用图 4 所给的动力分析模块将该尺寸的简支 Euler梁在 $E^+/E^-=2/3$, $E^+/E^-=2/4$, $E^+/E^-=2/6$ 情况下进行了动力分析,得到了前三阶频率,材料属性分布图以及振型图。图 6 为拉压模量比 $E^+/E^-=2/6$ 时的前三阶材料属性分布图,其中图 6 (a) ,6 (b) ,6 (c) 分别为第一阶,第二阶,第三阶的材料属性分布图。

式(7)提出的前提是将材料的拉压区域分为上下两个,可以从图6中看出,只有图6(a)也就是第一阶是将材料的拉压分区分为上下,第二阶和第三阶并不是简单地分为上下两个区域,振型阶次越高分

区越复杂。说明式(7)是有缺陷的,不能用于大多数的情况,只能精确地计算第一阶频率。从图6中可以明显地看出中性层发生了跳变,印证了文献[17]的猜想。同时通过图4的程序分析,计算得出了文献[17]中没有得到的二阶和三阶频率。由于表2所呈现的频率是在高跨比非常小并且拉压模量比接近于1的情况下得出的,基本可以忽略材料分区和中性层跳变的影响,所以由式(7)所求得的前两阶频率比较精确。由此可见得到理论解是相当困难的,用有限元方法计算更为有效。

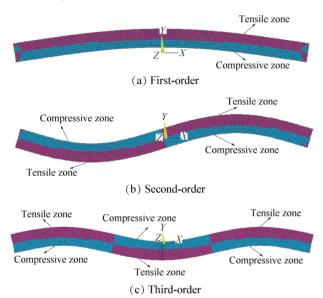


Fig. 6 Material distribution diagrams of modulus

对于 E⁺/E⁻ = 2/6的情况,其材料的前三阶振型图如图 7 所示,图 7(a),(b),(c)分别为第一阶,第二阶,第三阶的振型图。振型图与图 6 中的材料属性分布图——对应。由于其它拉压模量时材料属性分布图与图 6 类似,振型图与图 7 相同,在这里由于篇幅原因就不——给出。

由图7可以看出,有限元得到的振型曲线与经典解即式(4)得到的振型曲线几乎重合,这说明拉压模量不同对振型曲线几乎没有影响。

图 8 给出了用有限元法计算得到的拉压模量比为 2/3,2/4,2/5,2/6这四种情况的前三阶自振频率。

由图 8 可以看出,当拉压弹性模量发生变化时, 其频率的变化很大。随着 E*/E*的值减小,频率逐渐增大,并且随着阶数的增加频率增加的幅度增大。 由此可见拉压模量不同对于频率影响很明显。

4 大高跨比下双模量有限元解与解析解的对比

表 3 是拉压模量比为 E+/E==2/3, E+/E==2/4, E+/E==

2/5 和 E⁺/E⁻=2/6,由式(7)求得的频率与有限元法得到的频率的对比。图 9 为这四种模量比的前三阶频率误差图,能够更加清楚地看到误差的变化趋势。

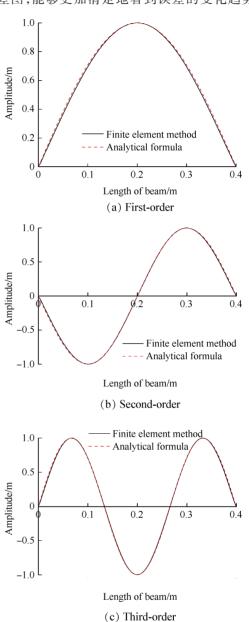


Fig. 7 Vibration mode curves of finite element method and analytic formula

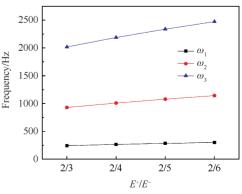


Fig. 8 Natural frequencies of different modulus ratios

Frequency/Hz	Analytical formula			Finite element method			Error/%					
	$E^+/E^- = 2/3$	$E^+/E^- = 2/4$	$E^+/E^- = 2/5$	$E^+/E^- = 2/6$	$E^+/E^- = 2/3$	$E^+/E^- = 2/4$	$E^+/E^- = 2/5$	$E^+/E^- = 2/6$	$E^+/E^- = 2/3$	$E^+/E^- = 2/4$	$E^+/E^- = 2/5$	$E^+/E^- = 2/6$
ω_1	245.6	289.3	334.6	379.4	243.5	264.6	283.2	300.1	0.87	8.53	15.35	20.9
$\boldsymbol{\omega}_2$	982.6	1157.2	1338.4	1517.4	929.5	1009.1	1078.8	1142.1	5.39	12.8	19.39	24.73
ω_3	2210.8	2603.7	3011.4	3414.2	2017.3	2188.2	2338	2473.1	8.75	15.96	22.63	27.56

Table 3 Comparison of analytical formula and finite element method

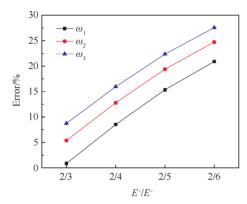


Fig. 9 Error in different modulus ratio

从表 3 中可以看出, 只有当 $E^+/E^- = 2/3$ 时, 第一 阶频率误差为0.87%,满足工程要求,其余拉压模量 比的频率误差均大于5%。因为当拉模量与压模量 相差不大时,其材料的第一阶拉压区域分为上下两 个区域,如图 6(a)所示,符合式(5)~(7)的前提条 件,但是,在二阶以上的情况,材料分区不是上下两 个分区,如图6(b),(c)所示,这些公式就不适用。并 且由图9可看出,随着拉压模量比的减小,这些公式 所计算的频率误差逐渐增大。这是在高跨比相对较 大的情况得出的频率,随着阶次的增加剪切变形和 旋转惯量效应会越来越明显,再加上由于分区不当, 导致式(7)得到的频率误差就会相当大。由此说明, 式(7)只能较准确地计算在拉模量与压模量相差不 大时的第一阶频率,而通过图4所示的研发的动力分 析模块可以准确地计算高阶的频率,体现出式(7)的 局限性以及动力分析模块的实用性。

5 结 论

通过本文研究,得出以下结论:

- (1)对于双模量简支梁来说,其材料仅仅分为上下两个区域不能反映二阶以上振型所对应的应力状态,也不能反映真实的结构动力特性,对于二阶以上的分区比较复杂,通常分为三个四个甚至更多,因此有限元法更为有效。
 - (2)当拉压模量不同时,梁的中性层不是平面而

是曲面,并且拉压模量相差越大其中性层的曲率就越大。

- (3)拉压模量对于自振频率的影响很大,并且拉 压模量比越接近于1,其频率越接近拉压模量相同时 的频率。拉压模量比越小,其频率就越大。
- (4)当拉压模量不同时其振型曲线几乎不发生变化,即拉压模量不同对于振型曲线基本没有影响, 因此振型曲线的解析式(5)仍然适用。

致 谢:感谢国家自然科学基金资助。

参考文献:

- [1] 蔡 尊, 王振国, 孙明波, 等. 超声速气流中凹腔主动喷注的强迫点火过程实验研究[J]. 推进技术, 2014, 35(12): 1661-1668. (CAI Zun, WANG Zhen-guo, SUN Ming-bo, et al. Experimental Study of Forced Ignition Process with Active Cavity Injection in a Supersonic Flow [J]. Journal of Propulsion Technology, 2014, 35(12): 1661-1668.)
- [2] 蔡 尊, 王振国, 李西鹏, 等. 基于超声速气流中凹腔主动喷注的强迫点火方案研究[J]. 推进技术, 2015, 36(8): 1186-1192. (CAI Zun, WANG Zhenguo, LI Xi-peng, et al. Investigation of Forced Ignition Scheme Based on Active Cavity Injection in a Supersonic Flow[J]. Journal of Propulsion Technology, 2015, 36 (8): 1186-1192.)
- [3] 杜 玲, 李范春, 马雪松, 等. 凹腔火焰稳定器组件界面的适配性研究[J]. 推进技术, 2016, 37(12): 2359-2365. (DU Ling, LI Fan-chun, MA Xue-song, et al. Suitability Investigation about Components Interface of Flame Holder with Cavity[J]. Journal of Propulsion Technology, 2016, 37(12): 2359-2365.)
- [4] Timoshenko. Strength of Materials, Part II: Advanced Theory and Problems [M]. Princeton: Van Nostrand, 1941.
- [5] Ambartsumyan. 不同模量理论[M]. 邬瑞锋,张允真, 译. 北京:中国铁道出版社,1986.
- [6] Khan K, Patle B P, Nath Y. Effect of Bimodularity on Frequency Response of Cylindrical Panels Using Galerkin Time Domain Approach [J]. Indian Academy of Sci-

- ences, 2010, 35(6): 721-737.
- [7] Khan A H, Patel B P. Periodic Response of Bimodular Laminated Composite Cylindrical Panels with and Without Geometric Nonlinearity [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2014, 67: 209-217.
- [8] Xie W H, Peng Z J, Meng S H, et al. GWFMM Model for Bi-Modulus Orthotropic Materials: Application to Mechanical Analysis of 4D-C/C Composites [J]. Composite Stretures, 2016, 150:132-138.
- [9] Radostin A, Nazarov V, Kiyashko S. Propagation of Nonlinear Acoustic Waves in Bimodular Media with Linear Dissipation [J]. Wave Motion, 2013, 50(2): 191-196.
- [10] Katicha S W, Flintsch G W. Bimodular Analysis of Hot-Mix Asphalt [J]. Road Materials and Pavement Design, 2010, 11(4): 917-946.
- [11] 杜 玲, 李范春, 郭雪莲, 等. 基于应力球张量法的不同模量陶瓷梁有限元分析[J]. 推进技术, 2015, 36 (8): 1229-1235. (DU Ling, LI Fan-chun, GUO Xue-lian, et al. Finite Element Analysis of Ceramic Beam

- with Different Modulus Based on Stress Balls Tensor Method [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2015, 36(8):1229-1235.)
- [12] 杜 玲, 李范春. 受均布载荷的双模量陶瓷简支梁的有限元计算[J]. 推进技术, 2016, 37(7): 1356-1363. (DU Ling, LI Fan-chun. Finite Element Calculation of Simply Supported Beam with Biomodulus Ceramic Subjected to Uniform Load [J]. Journal of Propulsion Technology, 2016, 37(7): 1356-1363.)
- [13] 张洪武,张 亮,高 强.拉压不同模量材料的参变量变分原理和有限元方法[J].工程力学,2012,29 (8):22-27.
- [14] 姚文娟, 叶志明. 不同拉压模量连续梁的解析解[J]. 力学季刊, 2011, 32(1): 68-73.
- [15] 王铭慧,赵永刚.拉压弹性模量不等材料简支梁的线性振动问题[J].甘肃科学学报,2014,26(5):10-13.
- [16] 姚熊亮.结构动力学[M].哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2007.
- [17] 刘相斌, 宋宏伟. 不同模量弯曲梁的自由振动[J]. 大连民族学院学报, 2007, 9(5): 104-107.

(编辑:史亚红)