

# 带冠涡轮叶片振动特性的子区间组合分析方法\*

刘继兴<sup>1</sup>, 张大义<sup>1</sup>, 王存<sup>1</sup>, 洪杰<sup>1,2</sup>

(1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;  
2. 先进航空发动机协同创新中心, 北京 100191)

**摘要:** 为准确计算分析带冠涡轮叶片振动特性的非确定性问题, 将区间组合法与有限元法相结合, 发展了适用于复杂结构振动特性的区间求解方法, 并建立了基于商用有限元软件的区间振动特性求解流程。考虑工况温度、叶冠接触状态和榫头约束角刚度的分散性, 对带冠涡轮叶片的模态特性和振动响应进行了求解, 研究得到了典型结构、载荷等非确定性参数对叶片振动特性的影响规律。研究结果表明, 与蒙特卡洛法相比, 该方法可使计算效率提高10倍以上, 计算结果的相对误差不大于50%, 获得振动特性的区间结果更为可靠, 并且该方法无需对非确定性参数的概率分布进行假设, 具有良好的工程应用前景。

**关键词:** 叶片; 非确定性; 区间方法; 有限元法; 振动特性

**中图分类号:** V232.4      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1001-4055 (2017) 10-2323-08

**DOI:** 10.13675/j.cnki.tjjs.2017.10.019

## Sub-Interval Combination Method for Dynamical Characteristics of Shrouded Turbine Blades

LIU Ji-xing<sup>1</sup>, ZHANG Da-yi<sup>1</sup>, WANG Cun<sup>1</sup>, HONG Jie<sup>1,2</sup>

(1. School of Energy and Power Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China;  
2. Collaborative Innovation Center of Advanced Aero-Engine, Beijing 100191, China)

**Abstract:** In order to analysis the uncertain problems of dynamical characteristics of shrouded turbine blades accurately, an interval method for complex structures combined by interval theory and finite element method has been presented. The solution procedure for the interval dynamical characteristics is given based on the commercial finite element software. Taking the dispersion of operation temperature, contact status of the shrouds and angular stiffness of firtree root into account, the modal characteristics and vibration response of a shrouded turbine blade are studied, and as a consequence the effects of typical uncertain parameters of structures and loads on the vibration characteristics of blade are obtained. The results show that the computational efficiency can be improved more than 10 times, and the relative error of the calculated results is less than 50% compared with Monte Carlo method, in particular the results obtained by the interval method are more reliable. Moreover it is not necessary to get the information about the probability distribution characteristics for the uncertain parameters by this developed method, which indicates a better engineering application prospect compared to most probabilistic methods.

**Key words:** Blades; Uncertainty; Interval method; Finite element method; Dynamical characteristics

\* 收稿日期: 2016-10-01; 修订日期: 2016-12-28。

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (51575022)。

作者简介: 刘继兴, 男, 硕士生, 研究领域为航空发动机振动控制。E-mail: jixing\_liu@163.com

通讯作者: 张大义, 男, 博士, 副教授, 研究领域为航空发动机结构强度振动。E-mail: dayi@buaa.edu.cn

## 1 引言

叶片振动带来的高周疲劳破坏是影响航空发动机结构可靠性的关键问题之一<sup>[1-3]</sup>,其原因之一是目前的叶片安全性评估方法均采用确定性设计,并依据经验选取一定的安全系数,作为对载荷、材料、制造、使用、分析等方面非确定性的补偿,由于不能合适的考虑非不确定性因素的影响,使预期的设计效果受到限制<sup>[4-6]</sup>。带冠叶片为航空发动机低压涡轮中常采用的一种结构形式,随着发动机工作循环数的增加,叶冠之间的磨损会逐渐增大,进而导致叶冠接触状态的非不确定性和叶片整体振动特性的分散性,这使得在带冠涡轮叶片的动力学设计中考虑非不确定性的影响尤为重要<sup>[7-9]</sup>。

目前,对于带有非不确定性参数的力学特性分析主要有概率法、模糊集合法和区间分析法<sup>[10-12]</sup>。概率法需要对非不确定性参数进行概率分布假设,按分布规律进行抽样,然后对每个样本进行确定性分析,得到目标函数的概率分布;模糊集合法采用隶属函数来描述物理量允许取值范围边界的逐渐过渡性,与概率法相比,确定隶属函数甚至更为困难,需要人为的确定隶属函数,主观性较强;区间分析方法对初始的信息量要求较低,仅需确定非确定参数的上下界,而对其分布规律没有要求,主要适用于“未知然而有界”的工程问题<sup>[13-15]</sup>。对于带冠涡轮叶片而言,由于其转速工况、尺寸公差以及服役时间等客观因素的限制,使得其结构参数和力学参数往往是在一定的区间之内变化的,即参数的非不确定性表现出“未知然而有界”的特征,而非不确定性参数的分布规律依赖于对大量样本的统计数据,往往很难获取,因此适用于引入区间理论对其非不确定性进行研究<sup>[8]</sup>。

为解决区间动力学方程的求解问题,邱志平<sup>[12]</sup>提出区间摄动法以及子区间摄动方法对结构力学特性的非不确定性进行分析,适用于非不确定性较小的区间问题;Rao<sup>[16]</sup>提出了基于单调目标函数的组合法和用于控制区间扩张的区间截断法,研究表明组合法可以更有效的得到准确的解区间;文献<sup>[17-19]</sup>提出了基于区间分解的子区间组合法,通过合适的子区间分解提高计算精度,降低计算量。

本文借鉴于上述工作,将区间组合法引入航空燃气轮机带冠涡轮叶片的振动特性分析,将其与有限元方法相结合,实现复杂叶盘结构的区间振动特性求解,并研究温度条件、叶冠接触刚度和榫头-榫槽配合角刚度具有区间分布特征时,带冠涡轮叶片

的固有特性以及响应特性,采用蒙特卡洛法验证该方法用于分析发动机叶片动力学问题的有效性和准确性。

## 2 区间理论与有限元法相结合的振动特性求解方法

### 2.1 变量的区间表示方法

对于两个实数  $\underline{a}, \bar{a} \in \mathbf{R}$ , 满足  $\underline{a} < \bar{a}$ , 则有界闭区间

$$\mathbf{a}^1 = [\underline{a}, \bar{a}] = \{a | \underline{a} < a < \bar{a}, a \in \mathbf{R}\} \quad (1)$$

为实区间数,简称区间<sup>[12]</sup>,其中  $\bar{a}$ ,  $\underline{a}$  分别为区间的上下界。也可以用中心区间表示法将区间  $\mathbf{a}^1$  记为

$$\mathbf{a}^1 = [\underline{a}, \bar{a}] = a^e \pm \Delta a e_{\Delta} \quad (2)$$

式中  $a^e = \frac{\underline{a} + \bar{a}}{2}$  为区间中点值,  $\Delta a = \frac{\bar{a} - \underline{a}}{2}$  为区间半径或离差,  $e_{\Delta} = [-1, 1]$  为标准化区间。

对任意  $m$  个元素均为实数的区间数  $\mathbf{a}_i^1 = [\underline{a}_i, \bar{a}_i] \in I(\mathbf{R}), (i = 1, 2, \dots, m)$  组成的向量

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} [\underline{a}_1, \bar{a}_1] \\ [\underline{a}_2, \bar{a}_2] \\ \vdots \\ [\underline{a}_n, \bar{a}_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

为区间向量,它表示  $\mathbf{R}^m$  中的一个  $m$  维超长方体。相似的,可以将区间向量  $\mathbf{a}^1$  记为

$$\mathbf{a}^1 = \mathbf{a}^e + \Delta \mathbf{a}^1 \quad (4)$$

式中  $\mathbf{a}^e = \{a_1^e, a_2^e, \dots, a_m^e\}^T$  为区间向量的中点,  $\Delta \mathbf{a}^1 = \{\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_m\}^T$  为区间向量的半径。

### 2.2 动力学区间分析理论

为了考虑带冠涡轮叶片结构和力学参数的非不确定性,将区间变量  $\mathbf{a}$  引入到动力学方程中,则  $n$  自由度系统的动力学方程可表示为

$$\mathbf{M}(\mathbf{a})\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) + \mathbf{C}(\mathbf{a})\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) + \mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{x}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{a}, t) \quad (5)$$

式中

$$\mathbf{M}(\mathbf{a}) = (m_{ij}(\mathbf{a})), \mathbf{C}(\mathbf{a}) = (c_{ij}(\mathbf{a})), \mathbf{K}(\mathbf{a}) = (k_{ij}(\mathbf{a})) \quad (6)$$

分别为质量、阻尼和刚度矩阵,是非不确定性参数(结构尺寸、弹性模量、环境温度、工作转速、榫头接触参数、叶冠接触参数等)的函数

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}, t) = (f_i(\mathbf{a}, t)) \quad (7)$$

为载荷列向量,对叶片而言,其激振力主要为气动力,与上游尾迹、来流畸变等有关,在工作过程中存在一定非不确定性<sup>[6]</sup>

$$\mathbf{x}(\mathbf{a}, t) = (\mathbf{x}_i(\mathbf{a}, t)), \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) = (\dot{\mathbf{x}}_i(\mathbf{a}, t)), \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) = (\ddot{\mathbf{x}}_i(\mathbf{a}, t)) \quad (8)$$

分别为单元中各节点自由度的位移、速度和加速度

$$\mathbf{a} = (a_i) \quad (9)$$

为具有非确定性的结构参数向量。

由于叶片结构参数的非确定性概率分布函数难以获取,采用区间数学方法对其进行描述

$$\mathbf{a} \in \mathbf{a}^1 = [\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}] = (a_i^1), a_i \in a_i^1 = [\underline{a}_i, \bar{a}_i], i = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

式中  $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_i)$ ,  $\underline{\mathbf{a}} = (\underline{a}_i)$  分别为非确定参数  $\mathbf{a} = (a_i)$  的上下界。根据区间数学知识,式(10)所表述的边界条件为  $m$  维超长方体边界,该边界条件可通过形位公差、极限工况、接触分析等方法获取。

因此,结构动力学分析即为对带有非确定性参数的动力学方程式(5)的求解,其中  $\mathbf{a}$  为区间向量  $\mathbf{a}^1$  中的所有可能值。

对固有频率  $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的求解即为无阻尼振动方程的广义特征值问题

$$\Gamma = \{\lambda(\mathbf{a}); \mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{x} = \lambda \mathbf{M}(\mathbf{a})\mathbf{x}, \mathbf{a} \in \mathbf{a}^1\} \quad (11)$$

对于叶片固有频率的分析通常只关心满足上式的各阶频率上下界

$$\lambda^1(\mathbf{a}) = [\underline{\lambda}(\mathbf{a}), \bar{\lambda}(\mathbf{a})] = (\lambda_i^1(\mathbf{a})) \quad (12)$$

式中

$$\bar{\lambda}(\mathbf{a}) = \max\{\lambda(\mathbf{a}); \mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{x} = \lambda \mathbf{M}(\mathbf{a})\mathbf{x}, \mathbf{a} \in \mathbf{a}^1\} \quad (13)$$

$$\underline{\lambda}(\mathbf{a}) = \min\{\lambda(\mathbf{a}); \mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{x} = \lambda \mathbf{M}(\mathbf{a})\mathbf{x}, \mathbf{a} \in \mathbf{a}^1\} \quad (14)$$

则求解固有频率  $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$  解区间的目标函数转化为求解满足式(11)的最大最小特征值。

对振动响应的求解即为求解满足动力学区间式(15)的所有解。

$$\Lambda = \{\mathbf{x}(\mathbf{a}, t); \mathbf{M}(\mathbf{a})\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) + \mathbf{C}(\mathbf{a})\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) + \mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{x}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{a}, t), \mathbf{a} \in \mathbf{a}^1\} \quad (15)$$

因此,叶片结构动力学响应的上下界为

$$\mathbf{x}^1(\mathbf{a}, t) = [\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t), \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t)] = (x_i^1(\mathbf{a}, t)) \quad (16)$$

式中

$$\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) = \min\{\mathbf{x}(\mathbf{a}, t); \mathbf{M}(\mathbf{a})\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) + \mathbf{C}(\mathbf{a})\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) + \mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{x}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{a}, t), \mathbf{a} \in \mathbf{a}^1\} \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) = \max\{\mathbf{x}(\mathbf{a}, t); \mathbf{M}(\mathbf{a})\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) + \mathbf{C}(\mathbf{a})\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) + \mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{x}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{a}, t), \mathbf{a} \in \mathbf{a}^1\} \quad (18)$$

### 2.3 子区间组合法

由于直接求解式(15)的计算量巨大,并往往存在严重的区间扩张问题,本文引入子区间组合法。如果实值函数  $f(x) = f(a_1, a_2, \dots, a_m)$  在定义域上具有单调性,则函数的值域可以由多个自变量的端点值代入求得。当区间函数  $F(\mathbf{a}^1)$  为单变量区间函数时,若  $F(\mathbf{a}^1)$  是  $\mathbf{a}^1$  的单调递增函数<sup>[20]</sup>,则函数的解区间为

$$F(\mathbf{a}^1) = [F(\underline{\mathbf{a}}^1), F(\bar{\mathbf{a}}^1)] \quad (19)$$

当多变量区间函数

$$F(\mathbf{a}^1) = F(a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1, a_{n+1}^1, a_{n+2}^1, \dots, a_{n+k}^1) \quad (20)$$

是区间  $a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1$  的单调递增函数,是

$a_{n+1}^1, a_{n+2}^1, \dots, a_{n+k}^1$  的单调递减函数时

$$F(\mathbf{a}^1) = [F(\underline{a}_1^1, \underline{a}_2^1, \dots, \underline{a}_n^1, \bar{a}_{n+1}^1, \bar{a}_{n+2}^1, \dots, \bar{a}_{n+k}^1), F(\bar{a}_1^1, \bar{a}_2^1, \dots, \bar{a}_n^1, \underline{a}_{n+1}^1, \underline{a}_{n+2}^1, \dots, \underline{a}_{n+k}^1)] \quad (21)$$

即对于满足单调性的区间函数,其上下限可以在区间变量的端点处取到。

在工程中,区间函数  $F(\mathbf{a}^1) = F(a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1)$  的单调性很难满足,但可以将非单调的区间变量  $a_i^1 (i = 1, 2, \dots, n)$  进行合适的子区间分解,得到满足计算精度的解。子区间分解有两种方法:基于单调性的子区间分解和等距子区间分解法。对于能够显式表达的区间函数,其分段单调性区间易于获取,可将区间变量分解为  $k$  个满足区间函数单调的子区间  $a_{ij}^1 (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k)$ ,进而对端点值求解可以获得准确的区间函数解区间。对于复杂结构系统,目标函数的单调性区间难以获取,无法对区间参数进行单调性子区间分解。但可根据计算精度要求,进行等距子区间分解,将区间变量分解为等长的  $k$  个子区间  $a_{ij}^1 (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k)$ 。从而对分解后的子区间端点值进行组合遍历求解,得到一组函数值,该组函数值的最大最小值即为区间函数的解区间上限和下限。

### 2.4 带冠涡轮叶片动力特性求解流程

在带冠涡轮叶片动力特性分析中,固有频率与振动响应对非确定性参数的函数关系复杂,为了满足计算精度要求,采用子区间组合法求解式(11)和式(15),整体流程如图1所示。

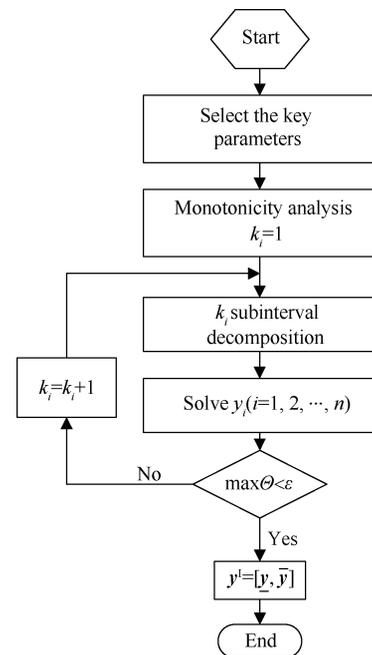


Fig. 1 Solving process for uncertain vibration characteristics

步骤1:通过结构响应的分散度与敏感度计算,确定叶片动力特性非确定性分析的 $m$ 个关键影响参数 $a_i^l(i=1,2,\dots,m)$ ,以及非确定性参数的变化范围。非确定区间参数的分散度(DIV)定义为

$$DIV = \frac{2\Delta a}{a^e} \times 100\% \quad (22)$$

式中 $\Delta a$ 为非不确定性参数的区间半径, $a^e$ 为设计状态值。

对于第 $n$ 阶结构响应对第 $m$ 个非不确定性参数的无量纲敏感度(SEN)定义为

$$SEN_{n,m} \approx \left| \frac{\Delta y_n(a_1^e, a_2^e, \dots, a_m^e) / y_n^e}{\Delta a_m / a_m^e} \right| \quad (23)$$

式中 $a_1^e, a_2^e, \dots, a_m^e$ 为各非不确定性变量的设计值, $y_n$ 为结构的第 $n$ 阶响应。

步骤2:利用有限元数值软件ANSYS分析目标函数(固有频率和振动响应)对非不确定性参数 $a_i^l$ 的单调性,对于不满足单调性的区间变量 $[a, \bar{a}]$ 进行 $k_i$ 等分,得到 $k_i$ 个等距子区间。

步骤3:对所有非不确定性变量的子区间端点值进行遍历组合求解,迭代求解次数为 $r = \prod_{i=1}^m (k_i + 1)$ (满足单调性的区间参数 $k_i = 1$ ),得到一组目标函数值 $y_i(i=1,2,\dots,r)$ 。

固有频率的求解直接在ANSYS中采用模态分析;振动应力的求解采用谐响应分析方法,为了避免大范围扫频,减小计算量,在各阶固有频率 $f_j$ 的邻域 $U(f_j, \delta)$ 内进行小范围扫频,得到各阶最大Von-Mises等效应力( $\sigma_{ij}$ )。步骤3的求解流程如图2所示。

步骤4:记

$$\Theta = \left\{ \theta_{ij} = \left| \frac{y(\underline{a}_{ij}^l) - y(\bar{a}_{ij}^l)}{0.5[y(\underline{a}_{ij}^l) + y(\bar{a}_{ij}^l)]} \right| \right\} \quad (24)$$

当

$$\max \Theta < \varepsilon \quad (25)$$

时,跳转至步骤5;否则增大 $k_i$ ,重复第步骤2和步骤3。

步骤5:通过求取目标函数的最值得到目标函数的解区间

$$y^l = [y, \bar{y}] = (y_i^l), y_i \in [y_i, \bar{y}_i], (i=1,2,\dots,r) \quad (26)$$

式中 $y_i^l = \min(y_i)$ ,  $\bar{y}_i = \max(y_i)$ ,  $(i=1,2,\dots,r)$ 。

前述步骤4中的判别条件 $\varepsilon$ 表示某一子区间上函数值的偏差率,在本文的研究中给定为 $\varepsilon = 1\%$ 。

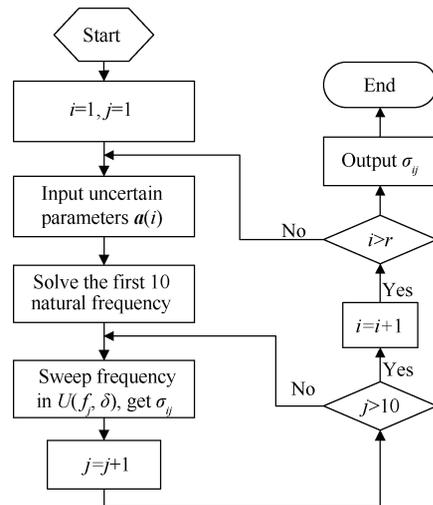


Fig. 2 Solving process for vibratory stress

### 3 带冠涡轮叶片振动特性区间分析

本文以叶盘结构系统为研究对象,考虑叶冠、榫头处接触参数的非不确定性特征,并将接触参数等效处理为叶片动力学计算的边界条件,建立叶片振动特性非不确定性分析的参数化模型,利用区间方法分析叶片的固有特性以及响应特性,并利用蒙特卡罗法验证子区间组合法求解的正确性。

#### 3.1 计算模型

针对某带冠涡轮叶片采用结构化网格建立有限元模型,单个叶片自由度数目为136698。叶片随机变量主要包括工况、材料、接触状态、结构尺寸等,其中温度、转速、材料特性等可在ANSYS中直接进行相应的参数设置,结构尺寸的参数化可通过节点位置变量实现,而叶冠与榫头处的接触状态变化较为复杂,采用图3所示的力学等效方法进行参数化建模。叶冠与榫头处的接触作用均采用接触刚度与等效阻尼进行模拟。叶冠约束通过在叶冠的两个接触面处分别施加法向和切向线弹簧,用于模拟叶冠接触作用带来的附加约束刚度;榫头处的约束非不确定性主要是角向刚度的非不确定性,采用周向弹簧1,2用于模拟接触变化对等效角刚度的影响,采用径向弹簧用于模拟接触变化对等效径向刚度的影响。

#### 3.2 单调性与敏感度分析

首先通过对非不确定性参数进行较为密集的等距取样(每个非不确定性参数的样本数超过50)进行分析其振动特性,研究各非不确定性参数对叶片振动特性的影响趋势,并采用分散度与敏感度对影响程度进行定量评估。叶片的前五阶振型分别为周向一阶弯曲、轴向一阶弯曲、二阶弯曲、一阶扭转和复合振型。

(1) 温度分布影响

为了简化计算, 给定叶片各点温度为平均温度, 并采用当量温度  $k_i$  进行无量纲化

$$k_i = t/t_d \quad (27)$$

式中  $t_d$  为设计点平均温度 989℃。

研究中,  $k_i$  变化范围给定为 [0.9, 1.1]。由各子区间的计算结果可以判断出第四阶固有频率和各阶振动应力与自变量温度之间, 均不满足单调性关系。

求得叶片动力特性分散度与敏感度如表 1 所示。可见温度对振动特性的影响较大, 固有频率敏感度最大值为 0.488, 振动应力敏感度最大值为 0.762。低阶振型为局部振型, 应变能分布较为集中, 而高阶振型主要为整体振型, 应变能分布较为均匀, 因此低阶固有频率对弹性模量敏感度较低, 而高阶相对较高。

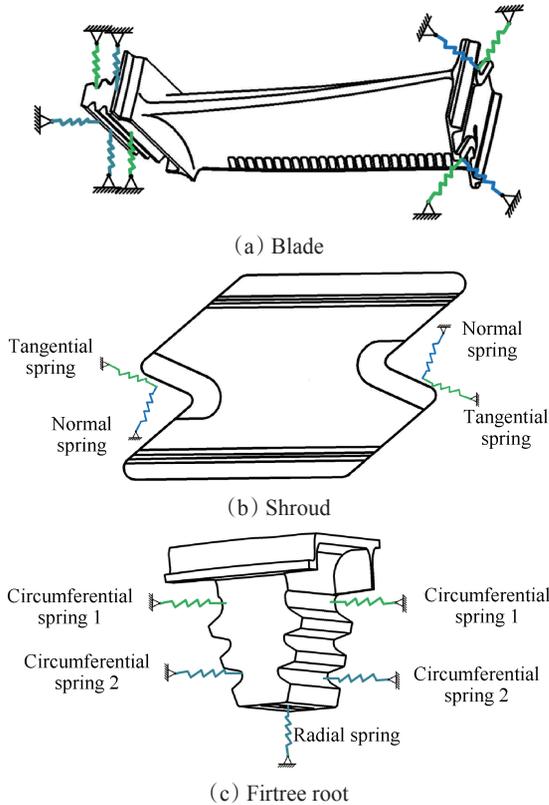


Fig. 3 Uncertain boundary constraint define for the shrouded turbine blade

Table 1 Effects of temperature on vibration characteristics

Order	1	2	3	4	5
DIV of Freq.	0.058	0.098	0.097	0.074	0.088
SEN of Freq.	0.288	0.488	0.485	0.369	0.438
DIV of VS	0.066	0.146	0.030	0.152	0.113
SEN of VS	0.332	0.732	0.151	0.762	0.509

Freq.-Frequency, VS-Vibratory Stress.

(2) 叶冠接触作用

叶冠接触参数的非确定性由几何参数、装配紧度、磨损程度等参数综合影响, 本文采用装配紧度来模拟叶冠约束刚度非确定性, 在叶片接触面处建立接触对, 通过提取接触面参数得到切向接触刚度<sup>[21]</sup>, 并基于 Mindlin 接触理论计算法向接触刚度<sup>[22]</sup>。在给定装配过盈量为 [0, 0.4] mm 时, 叶冠的法向接触刚度的变化区间为 [383, 889] N/mm, 切向接触刚度的变化区间为 [316, 735] N/mm。叶片振动特性是叶冠约束刚度的单调函数。

在考虑叶冠约束刚度时, 叶片动力特性分散度与敏感度如表 2。可见, 叶冠接触刚度对低阶模态频率影响较大, 其中第一阶固有频率敏感度为 0.358, 而振动应力的敏感度在第 2~5 阶处均较大。叶冠约束刚度对振动位移较大的低阶固有频率影响较大, 而对振动位移较小高阶振型影响较小, 因此低阶固有频率敏感度大, 高阶敏感度小。

Table 2 Effects of shroud stiffness on vibration characteristics

Order	1	2	3	4	5
DIV of Freq.	0.207	0.127	0.057	0.058	0.015
SEN of Freq.	0.358	0.220	0.098	0.100	0.025
DIV of VS	0.146	0.760	1.302	0.829	2.437
SEN of VS	0.185	0.964	1.651	1.051	3.090

(3) 榫头约束作用

考虑榫头接触影响, 采用静力学方法求得在不同转速时对应的角刚度与径向刚度, 确定周向弹簧的刚度变化区间为 [2500, 10000] N/mm。计算结果表明, 叶片振动特性与榫头角刚度满足单调性函数关系。

在考虑榫头约束刚度非确定性时, 叶片动力特性分散度与敏感度如表 3 所示。可见, 叶片振动应力对角刚度变化较为敏感, 其中第一阶为 0.254, 第五阶为 0.396。榫头角刚度约束主要影响周向振型, 因此对第一阶和具有周向成分第五阶振动应力影响较大。

Table 3 Effects of firtree root angular stiffness on vibration characteristics

Order	1	2	3	4	5
DIV of Freq.	0.075	0.007	0.045	0.001	0.024
SEN of Freq.	0.100	0.010	0.060	0.001	0.032
DIV of VS	0.191	0.025	0.072	0.072	0.297
SEN of VS	0.254	0.034	0.096	0.096	0.396

3.3 带冠涡轮叶片固有特性区间分析

由 3.2 节可知, 固有频率与温度不具有单调性关系, 因此采用前述等距子区间分解的组合法分析温

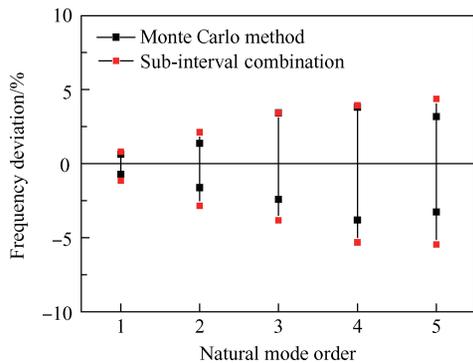
度单参数对各阶固有频率的影响,得到叶片各阶固有频率子区间组合法的解区间,并与按95%置信度得到的蒙特卡洛法解的分布区间对比如表4所示。

**Table 4** Effects of temperature uncertainty on natural frequency (Hz)

Order	Nominal frequency	Monte Carlo method		Sub-interval combination	
	$f_i^c$	$\bar{f}_i^m$	$f_i^m$	$\bar{f}_i^s$	$f_i^s$
1	727.2	732.0	722.3	733.3	719.1
2	1098	1114	1081	1114	1068
3	1529	1564	1493	1574	1471
4	2227	2267	2186	2275	2126
5	2691	2773	2608	2782	2549

Note: Nominal frequency is obtained while the temperature is the value for the cruise status.

由表4可知,各阶固有频率的子区间组合法的解包含了蒙特卡洛法的解;图4为两种方法计算结果的对比,图中频率偏差(Freq. Deviation)为解区间端点与标称频率(Nominal Freq.)的偏差百分比。



**Fig. 4** Effects of temperature uncertainty on natural frequencies

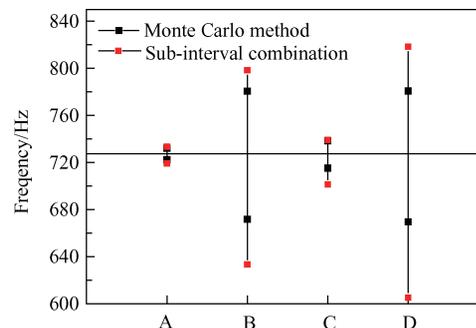
应用子区间组合法分别对温度、叶冠约束刚度、榫头角刚度单参数以及多参数非确定性对固有频率影响进行分析,得到叶片前三阶固有频率子区间组合法的解与按95%置信度得到的蒙特卡洛法的解区间比较如图5所示。表5给出了两种求解方法的CPU耗时对比。

**Table 5** CPU times comparison between Monte Carlo method and sub-interval combination method (h)

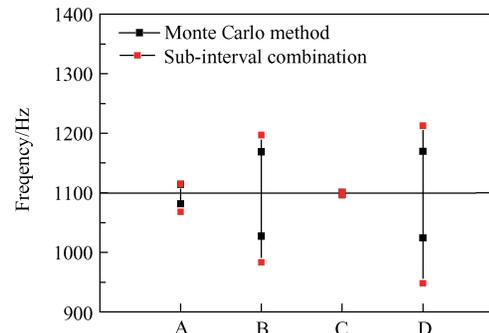
Method	Temperature influence	Multi-parameters influence
Monte Carlo	14	70
Sub-interval combination	0.15	0.62

可以看出:(1)子区间组用于叶片固有频率求

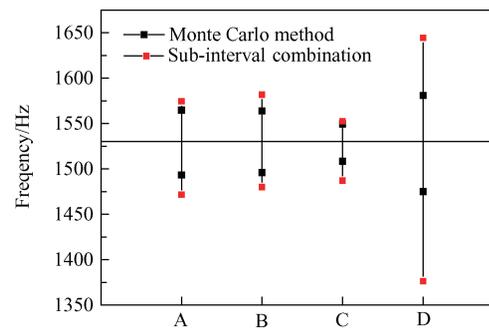
解时,其解区间包含蒙特卡洛法的结果,计算结果偏保守。分析单参数影响时,子区间组合法的解与蒙特卡洛法的解区间相差较小,而多变量影响时,区间结果的相差略大。这是由于区间方法旨在获得100%可靠的结果,而本文中蒙特卡洛的抽样分布是建立在95%置信度的基础上的,随着蒙特卡洛法抽样数的增大和置信度值的提高,蒙特卡洛结果将进一步趋近于本文结果。(2)采用子区间组合法分析温度单参数影响时,计算耗时仅为蒙特卡洛法的1.1%,分析多参数影响时,计算耗时为蒙特卡洛法的8.8%,说明子区间组合法用于带冠涡轮叶片固有频率求解能够大幅提高计算效率。(3)由于前三阶振型为整体振型,叶冠接触刚度对前三阶固有频率的影响较大,其次是温度和榫头角向刚度。



(a) First order



(b) Second order



(c) Third order

A-temperature, B-stiffness of shrouds, C-angular stiffness of the firtree root, D-multi parameters

**Fig. 5** Effects of uncertain parameters on natural frequencies

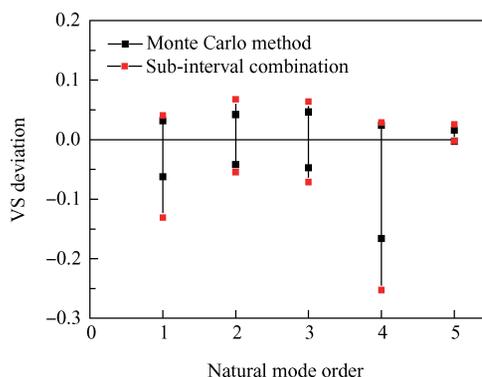
### 3.4 带冠涡轮叶片振动应力区间分析

由3.2可知,叶片振动应力与温度不满足单调性关系,而与叶冠约束刚度和榫头约束角刚度满足单调性关系。因此首先研究温度单参数对振动应力的影响,响应计算中结构阻尼比给定为0.03。其中蒙特卡洛法的抽样次数为1000次,得到两种非确定性方法的解区间如表6所示。

**Table 6 Effects of temperature uncertainty on vibration stress (MPa)**

Order	Nominal VS	Monte Carlo method		Sub-interval combination	
	$\sigma_i^c$	$\bar{\sigma}_i^m$	$\sigma_i^m$	$\bar{\sigma}_i^s$	$\sigma_i^s$
1	102.6	105.8	96.16	106.8	89.14
2	19.71	20.54	18.89	21.05	18.64
3	46.48	48.65	44.29	49.47	43.18
4	7.47	7.65	6.23	7.69	5.59
5	11.20	11.39	11.18	11.50	11.18

由表6可以看出,求解温度单参数对振动应力影响时,子区间组合法的解也包含蒙特卡洛法的解;图6所示为各阶振动应力解区间端点与标称应力的偏差百分比。

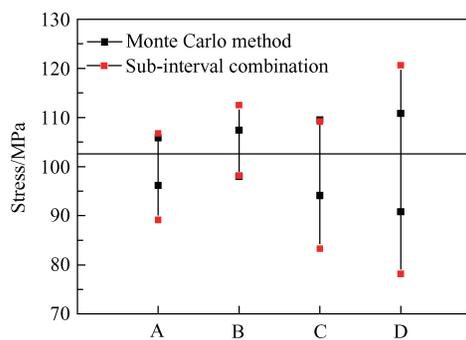


**Fig. 6 Effects of temperature uncertainty on vibratory stress**

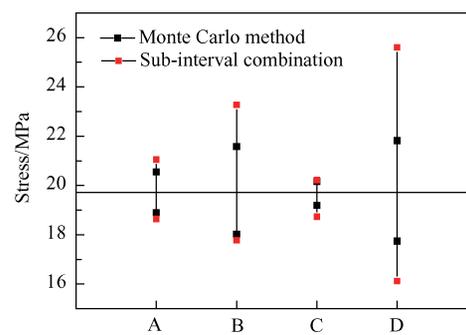
分别采用两种非确定性方法分析温度、叶冠约束刚度、榫头角刚度单参数以及多参数非确定性对各阶振动应力的影响。多参数分析时蒙特卡洛法的抽样次数为2500次,得到两种非确定性方法的前三阶振动应力结果如图7所示。

**Table 7 CPU times comparison between Monte Carlo method and sub-interval combination method (h)**

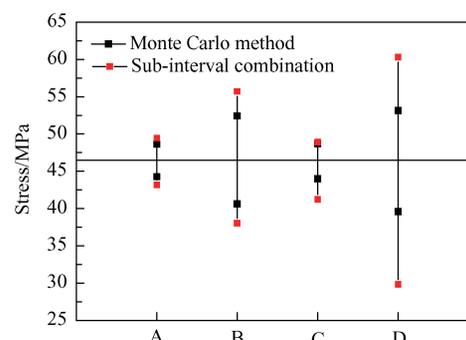
Method	Temperature influence	Multi-parameters influence
Monte Carlo	84	210
Sub-interval combination	0.92	3.5



(a) First order



(b) Second order



(c) Third order

A-temperature, B-stiffness of shrouds, C-angular stiffness of the firtree root, D-multi parameters

**Fig. 7 Effects of uncertain parameters on vibratory stress**

可以看出:(1)子区间组合法在分析叶片振动应力时较为保守,特别是在进行多变量分析时,由于1.5~2倍的区间扩张使得解区间的范围较大,在实际航空燃气轮机振动特性分析中,参数非确定性较小,保守估计能够提高设计可靠性。(2)振动应力分析的计算量较大,子区间组合法在进行单参数以及多参数振动应力非确定性分析中计算代价远小于蒙特卡洛法。(3)不同非确定性参数对各阶振动应力的影响不一致,多参数非确定性对振动应力的影响大于单个非确定性参数的影响。

## 4 结论

(1)将区间组合法与有限元法相结合,发展了适用于复杂结构的区间振动特性求解方法,并建立了

基于商用有限元软件的区间振动特性求解流程。

(2)与蒙特卡洛法求解结果的对比分析表明,本文方法可使计算效率提高10倍以上,相对误差不大于50%,获得的振动特性区间结果偏保守。

(3)对于具有高可靠性要求且非确定性较小的航空燃气轮机振动特性非确定性分析,本文方法避免了概率设计方法的概率假设与可靠性不足,能够获取100%可靠的解,且非确定性较小时保守分析能够满足工程需要,具有较好的工程应用前景。

(4)工况温度、叶冠接触状态和榫头约束角刚度是影响带冠涡轮叶片振动特性的敏感参数,并且这些参数对叶片振动特性的影响趋势非单调。采用本文方法计算表明,叶冠附加约束刚度的非确定性对叶片动力特性的区间分布特征影响最大,在工程设计中应重点通过相关结构参数的设计,降低其振动特性的分散度。

本文采用区间参数模型进行分析带有接触非线性的问题,在模型简化中存在一定的误差,在后续研究中将进一步开展关于带冠涡轮叶片振动应力的实验验证工作。

#### 参考文献:

- [ 1 ] Srinivasan AV. Flutter and Resonant Vibration Characteristics of Engine Blades[J]. *Engineering for Gas Turbines and Power*, 1997, 119(4): 742-775.
- [ 2 ] Dianyin Hu, Jianxing Mao, Rongqiao Wang, et al. Optimization Strategy for a Shrouded Turbine Blade Using Variable-Complexity Modeling Methodology [J]. *AIAA Journal*, 2016, 54(9): 2808-2818.
- [ 3 ] 陈璐璐, 张大义, 文敏, 等. 带凸肩风扇叶片振动特性及设计方法研究[J]. *推进技术*, 2015, 36(9): 1389-1394. (CHEN Lu-lu, ZHANG Da-yi, WEN Min, et al. Dynamical Effects of Shrouds on Fan Blade Vibration and Its Corresponding Design Method [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2015, 36(9): 1389-1394.)
- [ 4 ] 马艳红, 张大义, 洪杰, 等. 气流激励下叶片的高周疲劳概率寿命预估[J]. *推进技术*, 2009, 30(4): 462-467. (MA Yan-hong, ZHANG Da-yi, HONG Jie, et al. Prediction on High-Cycle Life of Blades Using Probability Method [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2009, 30(4): 462-467.)
- [ 5 ] 航空发动机设计手册第18册, 叶片轮盘及主轴强度分析[M]. 北京:航空工业出版社, 2001.
- [ 6 ] Zhang D, Hong J, Ma Y, et al. A Probability Method for Prediction on High Cycle Fatigue of Blades Caused by Aerodynamic Loads [J]. *Advances in Engineering Software*, 42(12): 1059-1073.
- [ 7 ] 徐可君, 江龙平, 陈景亮, 等. 叶片振动的非概率可靠性研究[J]. *机械工程学报*, 2002, 38(10): 17-19.
- [ 8 ] 杨鑫. 带冠涡轮叶片动力响应设计技术研究[D]. 北京:北京航空航天大学, 2008.
- [ 9 ] 杨鑫, 马艳红, 洪杰. 基于接触状态的叶冠预扭设计和磨损分析[J]. *燃气涡轮试验与研究*, 2008, 21(3): 35-39.
- [ 10 ] Kaminski M. Perturbation Based on Stochastic Finite Element Method Homogenization of Two-Phase Elastic Composites [J]. *Computers & Structures*, 2000, 78(6): 811-826.
- [ 11 ] Li Chen, Rao S S. Fuzzy Finite-Element Approach for the Vibration Analysis [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1997, 27(1): 69-83.
- [ 12 ] 邱志平. 非概率集合理论凸方法及其应用[M]. 北京:国防工业出版社, 2005.
- [ 13 ] 陈萌. 航空发动机转子系统动力学特性区间分析理论与方法研究[D]. 北京:北京航空航天大学, 2010.
- [ 14 ] Ma Y, Liang Z, Chen M, et al. Interval Analysis of Rotor Dynamic Response with Uncertain Parameters [J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2013, 332(16): 3869-3880.
- [ 15 ] Wang X, Qiu Z. Interval Finite Element Analysis of Wing Flutter [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2008, 21(2): 134-140.
- [ 16 ] Rao S S, Berke L. Analysis of Uncertain Structural System Using Interval Analysis [J]. *AIAA Journal*, 1997, 35(4): 725-735.
- [ 17 ] Stewart Mc William. Anti-Optimisation of Uncertain Structures Using Interval Analysis [J]. *Computers and Structures*, 2001, 79(4): 421-430.
- [ 18 ] 郭书祥, 吕震宙. 线性区间有限元静力控制方程的组合解法[J]. *计算力学学报*, 2003, 20(1): 34-38.
- [ 19 ] 张建国, 陈建军, 马孝松, 等. 不确定结构动力特征值区间分析的一种算法[J]. *应用力学学报*, 2006, 23(1): 96-100.
- [ 20 ] Moore R E, Kearfott R B, Cloud M J. Introduction to Interval Analysis [M]. *Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2009.
- [ 21 ] 洪杰, 杨鑫, 陈璐璐, 等. 基于接触状态分析的叶冠阻尼评估与改进设计[J]. *北京航空航天大学学报*, 2012, 38(5): 681-687.
- [ 22 ] Mindlin R D. Compliance of Elastic Bodies in Contact [J]. *Journal of Applied Mech. ASME*, 1949, 16.

(编辑:梅瑛)