

# 基于单纯B样条的航空发动机机载稳态模型研究\*

郑前钢, 张海波, 李永进

(南京航空航天大学 能源与动力学院, 江苏南京 210016)

**摘要:** 为了减小航空发动机稳态建模的模型误差、降低复杂度及提升其实时性, 提出了一种基于单纯B样条函数的航空发动机稳态模型建模方法。该函数是局部多项式基函数的线性组合, 因此求解该函数为线性回归问题, 通过运用广义最小二乘方法来求解B系数, 从而提高计算效率和提高模型精度。最后建立了基于该算法的二维和四维涡扇发动机稳态模型, 并分别与相同建模样本条件下的多输入多输出约简迭代最小二乘支持向量机稳态模型进行了比较, 表明了单纯B样条建模方法不仅继承了B样条的算法复杂度低、存储数据量小和实时性好等优点, 同时避免了最小二乘支持向量回归机不能拟合大样本数据的缺点, 且拟合效果优于最小二乘支持向量机。

**关键词:** 单纯B样条; 最小二乘支持向量回归机; 航空发动机稳态建模; 线性回归; 最小二乘

**中图分类号:** V2331      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1001-4055 (2015) 12-1887-08

**DOI:** 10.13675/j.cnki.tjjs.2015.12.019

## Research on Simplex B-Splines Algorithm in on-Board Steady-State Modeling of Turbofan Engines

ZHENG Qian-gang, ZHANG Hai-bo, LI Yong-jin

(Coll. of Energy and Power, Nanjing Univ. of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** The method based on the Simplex B-spline function has been proposed to reduce the fitting error and complexity, which can also improve the real-time characteristics in steady-state modeling of an aero-engine. As the function is comprised of local polynomial basis functions, linear regression and generalized least squares method can be applied to solve the B coefficients. In this way, the computing efficiency and the accuracy of the model are significantly improved. At last, the model verification results with this new method are compared with that of multi-input multi-output recursive reduced least squares support vector regression (MRR-LSSVR) in two- and four-dimensional steady-state modelling of the turbofan engine, respectively. It shows that the new modeling method has a lower complexity, less data capacity and higher performance of instantaneity. Furthermore, it can overcome the shortcomings of MRR-LSSVR that cannot well be applied for large sample sets. Moreover, while fitting discrete samples, it will be better than MRR-LSSVR.

**Key words:** Simplex B-splines; Least squares support vector regression; Steady-state modeling of the turbofan engine; Linear Regression; Least Squares

### 1 引言

航空发动机是多变量、强非线性和复杂的气动热力学系统,其稳定安全运行对发动机控制系统提

出了很高的要求<sup>[1]</sup>,为了对其进行良好的控制,首先必须建立一个良好的数学模型。利用数学模型代替真实发动机作为被控对象进行仿真研究,可节约大量昂贵的实验经费,还可以避免用真实发动机对控

\* 收稿日期: 2014-08-20; 修订日期: 2014-10-20。

基金项目: 航空科学基金 (20120652)。

作者简介: 郑前钢 (1990—), 男, 博士生, 研究领域为航空发动机建模与控制。E-mail: zh\_zhqg@163.com

制系统进行调试时可能产生的意外失控事故。目前一些先进的航空发动机控制、状态监视及诊断技术,如飞行/推进系统性能寻优控制<sup>[2,3]</sup>、发动机在线故障诊断<sup>[4]</sup>、解析裕度技术等,都是以高精度的机载发动机实时模型<sup>[5,6]</sup>为基础,而航空发动机稳态模型是机载发动机模型的关键。为此,本文主要研究机载航空发动机稳态模型建立方法,显然实时性和精度满足机载要求是该类模型需要解决的关键问题。

目前航空发动机稳态模型的方法有很多,较为流行的是分段线性插值<sup>[7~9]</sup>,神经网络和支持向量机等建模方法。分段线性插值建模方法的优点是简单且实时性好,但其需要存储的足够的插值表,随着模型的维数的增加,为了提高模型精度,它的存储量会呈指数爆发式增长;然而,对于航空发动机往往试验样本数据有限,或样本数据较为稀疏,此时通过分段线性插值得到的模型精度则难以保证。现今流行的神经网络<sup>[10]</sup>方法,虽然一定程度上避免了分段线性插值模型拟合精度不高的缺点,但其本质是用梯度算法导出的,因此优化训练过程极易陷入局部极值。而且,神经网络的结构设计(例如隐层节点数目的选择)依赖于设计者的先验知识和经验,缺乏严格的数学推导,这导致它容易出现过拟合现象,从而影响模型精度。支持向量机<sup>[11~13]</sup>克服神经网络陷入局部极值并且有效改善了过拟合问题。然而随着维数的增加和精度要求的提高,就必须增加样本采集量,而要提高模型的实时性,就必须增加支持向量机的稀疏性<sup>[14,15]</sup>,而由于算法特点,支持向量机稀疏性问题一直未得到良好的解决,这使得即使当输入变量维数不变时,随着样本数据增加,其实时性将难以得到保证。

B样条方法具有很强的非线性映射能力,其具有复杂度低、泛化能力强及实时性好等优点<sup>[16]</sup>。从现有的研究来看,还少见有B样条方法在航空发动机建模中应用的报道。多维B样条方法的形式主要是张量积样条<sup>[17]</sup>,张量积样条已经成功地应用于复杂非线性对象拟合或逼近问题,如飞机的机翼模型,内燃机的进、排气门的凸轮模型等。但张量积样条存在一个应用方面的缺点,即它只能针对有序的网格数据,而不能拟合随机样本数据点,这样就大大限制了其应用的灵活性。为此,本文在文献[18~21]的基础上,提出了基于单纯B样条的机载航空发动机稳态模型建模方法,不仅解决了张量积样条方法难以实现基于任意区域随机样本数据建模的问题,而且避免了流行的支持向量机方法在大样本数据情况下模

型训练实时性较差的问题。

## 2 单纯B样条理论

为了更加全面研究这问题,这里在文献[18~21]的基础上,对本文提出的单纯B样条建模方法进行详细阐述。

### 2.1 单纯B样条基础知识

#### 2.1.1 单纯和重心坐标

单纯B样条的基函数是定义是在单纯区域内,单纯的几何结构是 $n$ 维空间的非退化子集,例如2-单纯是三角形结构,3-单纯是四面体,单纯的定义如下:

让 $V$ 是由一组非退化的 $n+1$ 个点生成的 $n$ 维空间

$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \in R^n \quad (1)$$

那么称凸包 $V$ 为 $n$ -单纯 $t$

$$t = \langle V \rangle \quad (2)$$

因为单纯是凸包,所以对于单纯内的每个点都可以由单纯的顶点线性表示,对于单纯内的点 $x$ ,可以表示为

$$x = \sum_{i=0}^n b_i v_{p_i} \quad (3)$$

式中 $b(x) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ 是单纯内的点 $x$ 对于单纯顶点的重心坐标, $p_i$ 为顶点指数的排序即 $p_i < p_{i+1}$ 。对于定义域可以找到一组不重复覆盖的单纯组

$$\tau = \bigcup_{i=1}^J t_i, \quad t_i \cap t_j \in \{\emptyset, \tilde{t}\}, \quad \forall t_i, t_j \in \tau \quad (4)$$

最常用的不重复覆盖三角划分方法为Delaunay算法。

#### 2.1.2 样条空间

样条空间是给定的阶数 $d$ 和连续阶数 $C^r$ 并且定义在三角划分区域的样条函数 $s$ 所生成的函数空间,由Lai和Schumaker<sup>[12]</sup>的定义

$$S_d^r = \{s \in C^r(\tau); s|_{t_i} \in P_d, \forall t_i \in \tau\} \quad (5)$$

式中 $P_d$ 表示 $d$ 阶多项式,如 $S_3^1$ 表示为一阶连续的三阶样条空间。

#### 2.1.3 多维B样条

B单纯样条是由De Boor1987年提出,多维样条理论如下

$$(b_0 + b_1 + \dots + b_n)^d = \sum_{|k|=d} \frac{d!}{k!} b^k \quad (6)$$

式中 $k$ 称为多维系 $k = (k_0, k_1, \dots, k_n) \in N^{n+1}$ ,它的一范数 $|k| = k_0 + k_1 + \dots + k_n = d$ , $k!$ 为多维系数的阶

乘积  $k! = k_0!k_1! \cdots k_n!$ ,  $b^k$  等于  $b^k = \prod_{i=0}^n b_i^{k_i}$ , Lai 和 Schumaker 给出了一个非常重要的多维系数排序

$$k_{d,0,\dots,0} > k_{d-1,1,\dots,0} > \cdots > k_{0,0,\dots,1,d-1} > k_{0,0,\dots,d}$$

它的总排序数为  $\hat{d} = \frac{(d+n)!}{d!n!}$ 。

多维样条基函数  $B_k^d(b)$  可以定义如下

$$B_k^d(b) = \frac{d!}{k!} b^k \quad (7)$$

De Boor 在 1987 年证明了任何  $d$  阶多项式  $p(b)$  都可以写成由  $B_k^d(b)$  线性表示

$$p(b) = \sum_{|k|=d} c_k B_k^d(b) \quad (8)$$

式中  $c_k$  称为多维单纯样条的系数, 简称为 B 系数。

### 2.2 线性回归与 B 系数

已知观测数据  $(x(i), y(i))$ , 则输出可以写成

$$y(i) = f(x(i)) + r(i), i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

式(9)中,  $f$  为未知函数,  $r$  为残差, 由式(9)可知,  $f$  可由 B 样条函数表示, 故式(9)可以改写成

$$y(i) = \sum_{j=1}^J \sum_{|k|=d} c_k^j B_k^d(b) + r(i) \quad (10)$$

式中  $b(i)$  为  $x(i)$  所对应的单纯区域  $t_j$  的重心坐标。  $B_k^d(b)$  定义如(7)的基函数, 观察式(10)可知, 单纯 B 样条函数是由基函数线性组成, 因此, 此问题为线性回归问题, 将式(10)可进一步简化为

$$Y = Xc + r \in R^{N \times 1} \quad (11)$$

对于线性回归问题式(11)可以转换为求解其残差最小即

$$\begin{aligned} \min J &= (Y - Xc)^T (Y - Xc) \\ Hc &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $J = (Y - Xc)^T (Y - Xc)$  为广义最小二乘的目标函数,  $Hc = 0$  为单纯 B 样条函数的光滑条件, 式(12)称为带有等式约束的广义最小二乘问题。对于问题(12), 运用格朗日乘子得到 Karush-Kuhn-Tucher (KKT) 条件

$$\begin{bmatrix} X^T X & H^T \\ H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^T Y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中  $c$  为 B 系数,  $v$  为拉格朗日乘子, 综上所述, 单纯 B 样条逼近问题如式(9), 其问题本质为线性回归问题式(10), 它可以通过一般的广义最小二乘法式(12)和式(13)求解。

至此, 单纯 B 样条函数就此建立起来。该方法是由基函数线性组成, 基函数的局部多项式性质使得基函数具有良好的非线性拟合能力; 该函数的求解

为线性回归问题, 可以运用广义最小二乘来求解 B 系数, 因此不存在陷入局部极值和过拟合现象。

### 2.3 单纯 B 样条与张量积样条

张量积样条方法是常用的一种 B 样条方法, 这里将本文提出的方法与之做一比较, 以体现单纯 B 样条在样本数据区域方面的优势。

张量积样条的定义<sup>[17]</sup>如下:

定义 1 假设  $n$  元函数为  $\phi = f(x_1, \dots, x_n)$ , 其定义域为  $C[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ , 取 B 样条作为基函数, 在区间  $C[a_1, b_1]$ ,  $C[a_2, b_2]$ ,  $\dots$ ,  $C[a_n, b_n]$  上分别定义函数  $X_{M_1} = \{B_i^{x_1}(x_1)\}_1^{M_1}$ ,  $X_{M_2} = \{B_i^{x_2}(x_2)\}_2^{M_2}$ ,  $\dots$ ,  $X_{M_n} = \{B_i^{x_n}(x_n)\}_n^{M_n}$ 。则 B 样条函数可以定义为

$$S(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{M_1} \sum_{i_2=0}^{M_2} \cdots \sum_{i_n=0}^{M_n} c_{i_1, i_2, \dots, i_n} N_{i_1, p_1}(u_1) \times N_{i_2, p_2}(u_2) \cdots N_{i_n, p_n}(u_n) \quad (14)$$

Table 1 Comparison between tensor and simplex splines

Type	Local polynomial basis	General domains	Scattered data	Complexity fitting
Tensor	Yes	No	No	O(N)
Simplex	Yes	Yes	Yes	O(N)

表 1 给出张量积样条和单纯 B 样条算法比较。在表 1 中, 局部多项式定义如式(7)和式(14)的基函数。由于张量积样条函数和单纯 B 样条函数的估计参数都是 B 系数, 而且都是用最小二乘法来求解 B 系数, 因此在求解两种样条函数时它们的算法复杂度是一样的。在式(14)中, 由于前者是由基函数张量生成的, 而其基函数是定义在一维空间上的, 因此张量积样条函数只能针对于有序的网格数据, 而不能用于拟合更广泛的随机样本数据。后者是由基函数线性组合而成, 其基函数是定义在单纯区域上的(如式(7)), 因而它可以适用于拟合随机的样本数据。

### 2.4 单纯 B 样条方法特点的归纳

由此, 可将上述内容进行总结: 其一, 单纯 B 样条由局部多项式基函数组成, 这意味着在参数计算和评估时, 只需要计算多项式基函数对应的部分参数, 从而提高单纯 B 样条的计算效率; 其二, 单纯 B 样条是由多项式基函数线性组合构成, 而基函数定义在单纯区域上, 这使得它可以基于任意区域的随机样本数据进行模型拟合。其三, 单纯 B 样条具有参数模型的特点, 其算法复杂度只与其 B 系数相关, 而 B 系数只与函数结构相关, 这让它对于大规模样本数据量同样计算效率高。因此, 采用该方法可以提高机

载稳态模型精度和实时性,且具有更好的适应任意样本数据区域和大样本数据的拟合或建模能力。

### 3 建立单纯B样条航空发动机稳态模型

对于航空发动机稳态模型,设数学表达式为

$$Y=f(x) \tag{15}$$

不失一般性,本文以大推力涡扇发动机为例,如图2所示。该稳态模型输入量为高度H,飞行马赫数Ma,燃油流量WFB,喷管喉道面积A<sub>s</sub>。输出量可以选低压压气机转速PNF、高压压气机转速PNC、低压压气机喘振裕度SML、高压压气机喘振裕度SMH、发动机推力F、高压涡轮进口温度T<sub>4</sub>和风扇进口流量WA<sub>2</sub>,所以模型可以进一步表示为

$$Y=[PNF,PNC,SML,SMH,F,T_4,WA_2]^T=f\begin{pmatrix} x_H \\ x_{Ma} \\ x_{WFB} \\ x_{A_s} \end{pmatrix} \tag{16}$$

式(16)中x<sub>H</sub>, x<sub>Ma</sub>, x<sub>WFB</sub>及x<sub>A<sub>s</sub></sub>分别与H, Ma, WFB及A<sub>s</sub>相对应。

图1为涡扇发动机截面的示意图。图1中1截面为发动机进口,2截面为风扇进口,22截面为风扇出口,13和23截面分别为外涵道、内涵道进口,25截面为压气机进口,3截面为燃烧室进口,4截面为高压涡轮进口,42截面为高压涡轮出口,45截面为低压涡轮转子进口,46截面为低压涡轮出口,16截面为外涵道出口,6截面为内涵道出口及掺混室进口,7截面为加力燃烧室进口,75截面为加力燃烧室出口,8截面为尾喷管喉道,9截面为尾喷管出口。

建立单纯B样条航空发动机模型步骤如下:

步骤一:将定义域进行不重复覆盖的三角划分。以两个输入变量为例,如图2(图为定义域delau-nay三角划分),输入变量为WFB和A<sub>s</sub>,当H=9km, Ma=0.8时,WFB为PLA=40°~60°对应的稳态燃油流量,A<sub>s</sub>为设计点值的95%~115%。由式(1)可知,当输入为两个变量时,要将拟合区间全部覆盖所选的

单纯顶点必须大于等于3,考虑到拟合区间为方形,确定单纯的顶点为V<sub>0</sub>,V<sub>1</sub>,V<sub>2</sub>,V<sub>3</sub>,V<sub>4</sub>,在单纯顶点的基础上运用Delaunay算法将定义域划分出单纯区域t<sub>1</sub>,t<sub>2</sub>,t<sub>3</sub>和t<sub>4</sub>。

步骤二:确定单纯B样条函数。即在每个单纯域确定如下的单纯B样条函数

$$[SML,SMH,F,SFC,PNF,PNC,T_{45}]^T = f(x_H,x_{Ma},x_{WFB},x_{A_s}) = \sum_{|k|=d} c_k B_k^d(b) \tag{17}$$

要建立式(17)函数还得要通过试验确定局部多项式的次数。

步骤三:B系数的求解。即在整个定义区间有

$$[SML,SMH,F,SFC,PNF,PNC,T_{45}]^T = f(x_H,x_{Ma},x_{WFB},x_{A_s}) = \sum_{j=1}^J \sum_{|k|=d} c_k^j B_k^d(b) \tag{18}$$

在相邻单纯域之间文献[21]给出了连续方程如式(12)的等式约束方程。观察式(18)可知,单纯B样条函数随B系数呈线性变换,因此,B系数的求解问题为线性回归问题。而连续约束方程又是等式约束,因此可以运用拉格朗日乘子把问题转化为无约束极小化问题,最后将问题转化为广义最小二乘问题如式(13),由此求解出B系数。

### 4 数值仿真

为了检验单纯B样条应用到航空发动机建模的效果,本节采用单纯B样条建立二维和四维涡扇发动机稳态模型,并与支持向量机所建立的对应模型进行比较。多输入多输出约简迭代最小二次支持向量机(MRR-LSSVR)算法<sup>[5,15]</sup>能够将约简技术<sup>[11]</sup>及迭代策略<sup>[12]</sup>与标准最小二乘支持向量回归机<sup>[13]</sup>结合起来,并考虑多个输出变量对选择支持向量的综合影响,以对多输出目标贡献最大为筛选准则,选择更少且更优的支持向量来解决多输出问题,可以有效地缩短预测时间和增强稀疏性,因此,以下将与MRR-LSSVR方法建立的涡扇发动机稳态模型作比较。

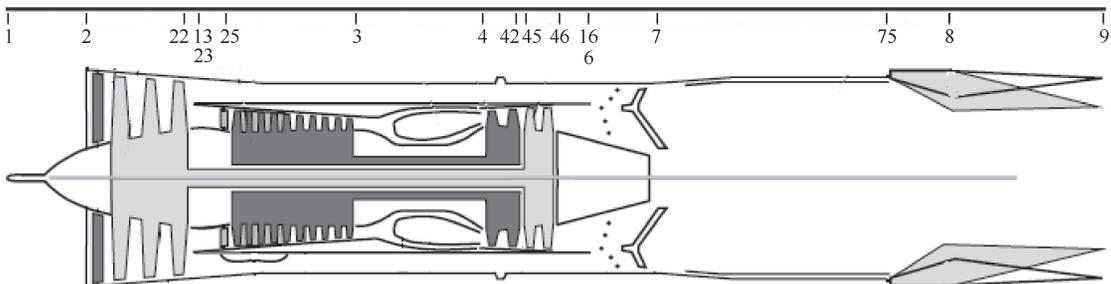


Fig. 1 Cross-section schematic of turbofan engine

4.1 两维涡扇发动机稳态模型

二维发动机稳态模型输入量取  $WFB$  和  $A_8$ , 输出变量与式(18)中一致, 即为  $PNF, PNC, SML, SMH, F, T_4$  和  $WA_2$ , 因此一个样本数据含有2输入7输出共9个参量。建模所需的样本数据是在  $H=9\text{km}, Ma=0.8$  时通过涡扇发动机部件级模型获取,  $WFB$  为  $PLA=40^\circ \sim 60^\circ$  对应的稳态燃油流量,  $A_8$  变化范围为设计点值的  $95\% \sim 115\%$ , 并获取相应的部件级模型的稳态输出量  $PNF, PNC, SML, SMH, F, T_4$  和  $WA_2$ , 以此作为样本数据。稳态建模时, 从拟合样本区域随机采集500个测试点和500个训练点。

定义域的 delaunay 三角划分如图2所示, 经过试验, 确定定义在单纯域上的局部多项式为5次。MRR-LSSVR 算法中支持向量机个数  $Q$  需要事先确定, 经过试验最终筛选支持向量机个数  $Q$  为250个, 此外, 训练时还需训练样本中的输入量进行归一化处理, 最后采用 Gaussian 核函数建立输入量与输出量之间的非线性关系, 经调试相关算法参数设置如下: 正则化参数  $\gamma=2^{18}$ , 高斯核参数  $\nu=1.4$ 。

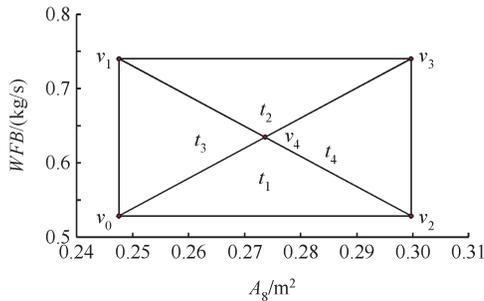


Fig. 2 The delaunay triangulation of the domain

表2给出了训练数据和测试数据都为500个数据点时测试和训练的最大相对误差(MRE, maximum relative error)与平均相对误差(ARE, average relative error), 从表2可以看出, 单纯B样条的最大训练和测试误差均小于0.01。从训练和测试结果可知, 其拟合效果明显优于MRR-LSSVR, 其中只有SMH的最大测试和训练误差比MRR-LSSVR稍大, 而其它的效果均小于MRR-LSSVR。

图3为  $F$  随  $A_8$  和  $WFB$  变化的单纯B样条拟合曲面。在图3中,  $X$ 轴为  $WFB$ ,  $Y$ 轴为  $A_8$ ,  $Z$ 轴为  $F$ 。使用 Delaunay 算法把定义域划分为四个不重复覆盖的单纯区域, 如图2。在每个单纯区域上定义一个B样条函数(式(8)), 相邻的单纯区域之间有个连续条件(式(12)的约束方程), 再由广义最小二乘式(12)和式(13)来求出B样条系数, 由此可求出单纯B样条函数。

Table 2 Comparison in training and testing error for MRR-LSSVR and simplex B-splines

Y	Type		Training error		Testing error	
	Math		MRE	ARE	MRE	ARE
PNF	MRR-LSSVR		0.0014	0.0004	0.0014	0.0004
	Simplex		0.001	0.0001	0.0011	0.0001
PNC	MRR-LSSVR		0.0008	0.0001	0.0009	0.0001
	Simplex		0.0008	0.0001	0.0008	0.0001
SML	MRR-LSSVR		0.0467	0.0089	0.048	0.0086
	Simplex		0.007	0.0014	0.0078	0.0015
SMH	MRR-LSSVR		0.0034	0.0011	0.004	0.0011
	Simplex		0.0039	0.0004	0.0039	0.0005
F	MRR-LSSVR		0.0025	0.0006	0.0025	0.0006
	Simplex		0.0025	0.0001	0.0028	0.0001
T <sub>4</sub>	MRR-LSSVR		0.0013	0.0003	0.0013	0.0003
	Simplex		0.0007	0.0001	0.0008	0.0001
WA <sub>2</sub>	MRR-LSSVR		0.003	0.0006	0.0024	0.0006
	Simplex		0.0021	0.0001	0.0023	0.0001
Compute time	MRR-LSSVR		0.85s		0.17s	
	Simplex		0.115s		0.033s	

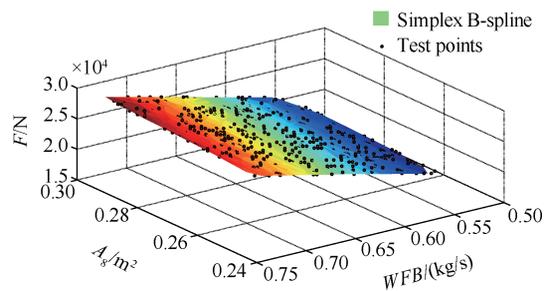


Fig. 3 Simplex B-splines fitting surfaces

4.2 四维涡扇发动机稳态模型

进一步地, 可以建立四维发动机稳态模型进行对比研究, 四维模型以  $H, Ma, A_8$  和  $WFB$  为输入量, 输出变量与二维涡扇发动机稳态模型输出变量相同, 样本数据也是通过涡扇发动机非线性部件级模型来获取。该稳态模型的输入量  $H$  和  $Ma$  在高空亚声速飞行包线内取值, 即  $H$  为  $9 \sim 13\text{km}$ ,  $Ma$  为  $0.7 \sim 0.9$ ,  $WFB$  和  $A_8$  的输入范围与二维模型相同, 即  $WFB$  为  $PLA=40^\circ \sim 60^\circ$  对应的燃油流量,  $A_8$  为设计点值的  $95\% \sim 115\%$ , 并获取相应的部件级模型的稳态输出量  $PNF, PNC, SML, SMH, F, T_4$  和  $WA_2$ , 以此作为样本数据。

在上述样本空间中随机采集样本数量分别为2000、5000和10000各两组作为训练和测试样本, 经过优选, 单纯B样条的局部多项式为3阶多项式。经

过反复试验,确定支持向量机个数分别为 500,700,1000 个,训练样本的输入量进行归一化处理,采用 Gaussian 核函数建立输入量与输出量之间的非线性关系,经调试相关算法参数设置如下:正则参数为  $\gamma=2^{20}$ ,高斯核参数为  $\nu=1.5$ 。

图 4 为 MRR-LSSVR 和单纯 B 样条在不同样本个数(分别为 2000,5000 和 10000 个样本)下的训练时间,从图中可得,随着训练样本的增加,MRR-LSSVR 所需训练时间快速增加,而单纯 B 样条的训练时间基本不变,这是因为 MRR-LSSVR 的算法复杂度与样本数据量相关,而单纯 B 样条的算法复杂度仅与自身结构相关。如以  $m$  个输入参数、 $n$  个输出参数、 $N$  个样本点为例,MRR-LSSVR 算法复杂度为  $O(2mN)$ ,而单纯 B 样条的算法复杂度为  $O(N_c)$ ,其中  $N_c$  为 B 系数的数量,它只与单纯 B 样条函数的结构相关,因此,单纯 B 样条避免了 MRR-LSSVR 在样本数量增加时其训练时间快速增加的缺点。

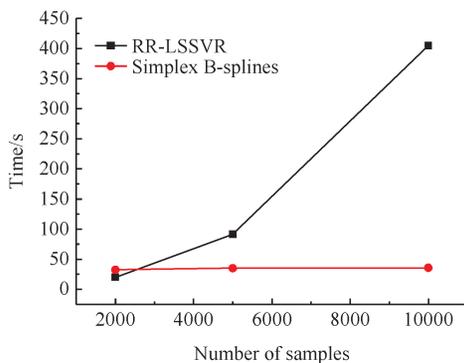


Fig. 4 Training time of MRR-LSSVR and simplex B-splines

图 5 为 MRR-LSSVR 和单纯 B 样条在不同样本个数(分别为 2000,5000 和 10000 个样本)下的测试时间,它是衡量所建立模型实时性或机载性能的最重要指标,是算法复杂度与存储量的综合表现。从图中可得,MRR-LSSVR 的测试时间比单纯 B 样条的测试时间要长,而且随着样本数量的增加,单纯 B 样条测试实时性的优越性越明显,这主要由于 MRR-LSSVR 在测试计算过程要计算核矩阵,核矩阵计算与样本个数和支持向量机个数相关,随着样本个数的增加,要保证精度支持向量机的个数必然要增加,而单纯 B 样条在测试计算过程中,其计算复杂度主要由求解基函数矩阵的 B 系数相关,该簇系数仅与单纯 B 样条函数的结构相关,与样本个数无关,因此,随着样本的增加,MRR-LSSVR 的数据存储量必然要大于单纯 B 样条的存储量。此外,由于单纯 B 样条是由局

部多项式基函数组成(如式(8)),因此在基函数矩阵计算过程中,只需计算该行样本对应单纯区域的基函数,从而减小了算法的计算复杂度。综上所述,随着样本的增加,单纯 B 样条比 MRR-LSSVR 数据存储量小且测试计算复杂度低。

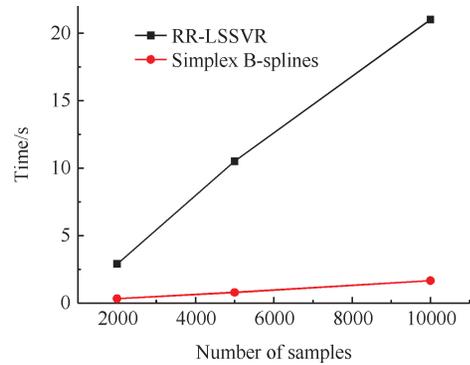


Fig. 5 Testing time of MRR-LSSVR and simplex B-splines

表 3~5 分别给出在 2000,5000 和 10000 个样本点下的训练误差和测试误差,从表中可得,单纯 B 样条的训练误差和测试误差除在个别点外,如表 3 中  $F$  的最大相对测试误差比 MRR-LSSVR 大,其它的均小于 MRR-LSSVR,而且随着样本点的增加,两种方法的拟合精度均提高,但样本的增加将导致 MRR-LSSVR 算法复杂度的增加,因此,这将导致该方法通过增加样本来提高精度的具有局限性,而单纯 B 样条就不存在此类问题。

Table 3 Comparison in training and testing error for MRR-LSSVR and simplex B-splines (2000 data points)

Y	Type	Training error		Testing error	
		MRE	ARE	MRE	ARE
PNF	MRR-LSSVR	0.0364	0.0029	0.0364	0.0025
	Simplex	0.0128	0.0011	0.0216	0.0016
PNC	MRR-LSSVR	0.0059	0.0005	0.0059	0.0005
	Simplex	0.0027	0.0004	0.0101	0.0006
SML	MRR-LSSVR	0.0714	0.0143	0.0739	0.0111
	Simplex	0.0214	0.0038	0.0376	0.0049
SMH	MRR-LSSVR	0.007	0.0015	0.0061	0.0012
	Simplex	0.0038	0.0005	0.0079	0.0007
F	MRR-LSSVR	0.0078	0.0013	0.0099	0.001
	Simplex	0.0034	0.0005	0.0126	0.0007
T <sub>4</sub>	MRR-LSSVR	0.0095	0.001	0.01	0.0009
	Simplex	0.0055	0.00009	0.012	0.0011
WA <sub>2</sub>	MRR-LSSVR	0.0122	0.0017	0.0156	0.0014
	Simplex	0.0058	0.0009	0.017	0.0012
Compute time	MRR-LSSVR	19.9s		2.89s	
	Simplex	32.17s		0.32s	

**Table 4 Comparison in training and testing error for MRR-LSSVR and simplex B-splines (5000 data point)**

Y	Type	Training error		Testing error	
	Math	MRE	ARE	MRE	ARE
PNF	MRR-LSSVR	0.0369	0.0029	0.0381	0.0024
	Simplex	0.022	0.0012	0.0246	0.0013
PNC	MRR-LSSVR	0.0058	0.0005	0.0059	0.0005
	Simplex	0.0034	0.0005	0.0035	0.0005
SML	MRR-LSSVR	0.0784	0.0128	0.0884	0.00097
	Simplex	0.0162	0.0033	0.0221	0.0043
SMH	MRR-LSSVR	0.0069	0.0012	0.0089	0.001
	Simplex	0.0049	0.0006	0.007	0.0006
F	MRR-LSSVR	0.0107	0.0012	0.0096	0.0009
	Simplex	0.0055	0.0006	0.0059	0.0006
T <sub>4</sub>	MRR-LSSVR	0.0103	0.001	0.0107	0.0008
	Simplex	0.0066	0.0009	0.007	0.001
WA <sub>2</sub>	MRR-LSSVR	0.017	0.0016	0.0156	0.0013
	Simplex	0.0083	0.001	0.0093	0.0011
Compute time	MRR-LSSVR	91.4s		10.5s	
	Simplex	34.86s		0.78s	

**Table 5 Comparison in training and testing error for MRR-LSSVR and simplex B-splines (10000 data point)**

Y	Type	Training error		Testing error	
	Math	MRE	ARE	MRE	ARE
PNF	MRR-LSSVR	0.0363	0.0032	0.0348	0.0023
	Simplex	0.014	0.00094	0.017	0.0013
PNC	MRR-LSSVR	0.0055	0.0005	0.0058	0.0005
	Simplex	0.0033	0.0005	0.0037	0.0005
SML	MRR-LSSVR	0.0654	0.0121	0.0684	0.00092
	Simplex	0.0131	0.0023	0.019	0.0034
SMH	MRR-LSSVR	0.0084	0.0012	0.0082	0.0009
	Simplex	0.0057	0.0006	0.0055	0.0006
F	MRR-LSSVR	0.0096	0.0012	0.0099	0.0008
	Simplex	0.0049	0.0006	0.0051	0.0006
T <sub>4</sub>	MRR-LSSVR	0.0101	0.0011	0.0102	0.0008
	Simplex	0.0065	0.0009	0.0067	0.001
WA <sub>2</sub>	MRR-LSSVR	0.017	0.0016	0.0156	0.0013
	Simplex	0.0083	0.001	0.0093	0.0011
Compute time	MRR-LSSVR	405.1s		21s	
	Simplex	35.69s		1.655s	

### 5 结 论

通过与张量积样条作算法比较,并建立基于单纯B样条和MRR-LSSVR算法的二维和四维涡扇发动机稳态模型,对两种建模方法进行比较研究,可以得出如下结论:

(1)单纯B样条函数不仅避免了神经网络容易陷入存在陷入局部极值和过拟合现象等缺点,同时也克服了张量积样条只适用于有序网格数据的缺点。

(2)单纯B样条的算法复杂度与样本点个数无关,只与输入维数和自身结构有关,而MRR-LSSVR的算法复杂度与样本数据量正相关,因此,随着建模时样本数据量的增加或采用大样本数据时,单纯B样条建模所需的训练时间远小于后者。且仿真结果同时表明,单纯B样条的模型拟合精度要高于MRR-LSSVR。

(3)通过测试仿真结果和算法分析可以得到,随着样本的增加,单纯B样条比MRR-LSSVR数据存储量小且能显著提高机载模型的实时性。

本文提出的算法具有普遍意义,对建模相关的参数变化范围无特殊要求。若涉及到实际工程应用,将进一步扩大包线和状态范围,并根据实际型号的限制要求确定控制量范围。

### 参考文献:

[ 1 ] 孙健国. 面向21世纪航空动力控制展望[J]. 航空动力学报, 2001, 16(2): 97-102.

[ 2 ] 任新宇, 杨育武, 樊思齐. 推进系统综合性能寻优控制研究[J]. 推进技术, 2010, 31(1): 61-64. (REN Xin-yu, YANG Yu-wu, FAN Si-qi. Study on Propulsion System Overall Performance Seeking Control Algorithm[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2010, 31(1): 61-64.)

[ 3 ] 王健康. 基于机载复合模型及SQP的发动机性能寻优控制研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2010.

[ 4 ] 卓刚. 航空发动机智能建模与故障诊断研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2004.

[ 5 ] 袁 鸯. 发动机自适应建模及神经网络控制[D]. 南京: 南京航空航天大学. 2005

[ 6 ] 陈霆昊. 发动机机载自适应模型与高稳定性控制技术研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2010.

[ 7 ] 袁春飞, 孙健国, 熊 智, 等. 推进系统优化控制模式研究[J]. 航空动力学报, 2003, 19(1): 159-163.

[ 8 ] Orme J S, Gilyard G B. Preliminary Supersonic Flight Test Evaluation of Performance Seeking Control [R]. AIAA 93-1821.

[ 9 ] Gilyard G, Orme J. Subsonic Flight Test Evaluation of a Performance Seeking Control Algorithm on An F-15 Air-Plane[R]. AIAA 92-3743.

[ 10 ] Donald L, Simon, Theresa W Long. Adaptive Optimization of Aircraft Engine Performance Using Neural Net-

- works[R]. *NASA-TM-107110*.
- [11] Lin K M, Lin C J. A Study on Reduced Support Vector Machines[J]. *IEEE Trans. Neural Networks*, 2003, 14(6): 1449-1459.
- [12] Jiao L, Bo L, Wang L. Fast Sparse Approximation for Least Squares Support Vector Machine[J]. *IEEE Trans. Neural Networks*, 2007, 18(3): 685-697.
- [13] Suykens J A K, Van Gestel T, De Brabanter J, et al. Least Squares Support Vector Machines[M]. *Singapore: World Scientific*, 2002.
- [14] 赵永平. 支持向量机及其在智能航空发动机参数估计中的应用[D]. 南京:南京航空航天大学, 2009.
- [15] WANG Jian-kang, ZHANG Hai-bo, YAN Chang-kai, et al. An Adaptive Turbo-Shaft Engine Modeling Method Based on PS and MRR-LSSVR Algorithms[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2013, 02, 26(1): 94-103.
- [16] de Boor C. On Calculating with B-Splines[J]. *Journal of Approximation Theory*, 1972, (6): 50 - 62.
- [17] Anderson I J, Cox M G, Mason J C. Tensor-Product Spline Interpolation to Data on or Near a Family of Lines[J]. *Numerical Algorithms*, 1993, 5(4): 193-204.
- [18] Lai L L M J, Schumaker L L. Spline Functions Over Triangulations [M]. *UK: Cambridge University Press*, 2007.
- [19] Tol H J, deVisser C C, vanKampen E, et al. Multivariate Simplex Spline Based Nonlinear Dynamic Inversion Control of High Performance Aircraft [R]. *AIAA 2013-4925*.
- [20] de Visser C C. Global Nonlinear Model Identification with Multivariate Spline [D]. *Delft: Delft University of Technology*, 2011.
- [21] de Visser C C, Chu Q P, Mulder J A. A New Approach to Linear Regression with Mutivariate Splines[J]. *Automatica*, 2009, 45(12): 2903-2909.

(编辑:史亚红)

## 关于撤销《液体火箭发动机涡轮泵非线性转子系统稳定性影响因素研究》一文的声明

《推进技术》编辑部于2015年11月13日收到匿名举报,指出下列两文内容高度一致,涉嫌一稿多投:

[1] 液体火箭发动机涡轮泵非线性转子系统稳定性影响因素研究[J].*推进技术*, 2013, 34(10): 1388-1397.

[2] 液体火箭发动机涡轮泵转子密封系统动力稳定性研究[J].*宇航学报*, 2013, 34(12): 1557-1568.

经CNKI科研诚信管理系统研究中心的科技期刊学术不端文献检测系统(AMLC)检测,文章[1]与[2]重复度为59.3%,结论为“自我剽窃、重复发表”。

经相关专家认真审查,认定上述两篇文章属一稿两投。根据本刊相关规定,决定撤销刊登于《推进技术》2013年第10期的文章《液体火箭发动机涡轮泵非线性转子系统稳定性影响因素研究》,且在三年内不接受该文章作者的来稿,以正学术之风。本刊对举报者表示衷心感谢,并热忱欢迎广大读者继续对本刊进行监督。

特此声明。