

基于应力球张量法的不同模量陶瓷梁有限元分析^{*}

杜 玲¹, 李范春¹, 郭雪莲², 马雪松²

(1. 大连海事大学 交通运输装备与海洋工程学院, 辽宁 大连 116026;

2. 北京动力机械研究所 高超声速冲压发动机技术重点实验室, 北京 100074)

摘 要: 针对具有拉压弹性模量不等特性的材料, 由于其不能沿用经典弹性理论进行应力和变形分析, 为解决其结构计算问题, 提出通过判断应力球张量的正负来确定拉压弹性模量的新思想, 并在ANSYS的基础上, 开发了拉压模量不等材料的分析计算模块。以纯弯曲两端简支的陶瓷梁为例, 建立其有限元模型, 利用所开发模块对纯弯曲的陶瓷梁进行结构分析, 通过对比所得的有限元解与其解析解的计算结果, 确定误差范围, 正应力的误差不超过2.1%, 挠度的误差不超过3%, 得出本文提出方法的可行性。通过对比按照单、双模量计算所得最大拉压应力有限元解之间的误差, 发现随着拉压弹性模量比的减小, 误差值随之增大, 超过工程允许范围, 得出不同模量理论应用于实际的重要性。

关键词: 应力球张量; 双模量; 单模量; 陶瓷梁; 有限元解

中图分类号: V415 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-4055 (2015) 08-1229-07

DOI: 10.13675/j.cnki.tjjs.2015.08.016

Finite Element Analysis of Ceramic Beam with Different Modulus Based on Stress Balls Tensor Method

DU Ling¹, LI Fan-chun¹, GUO Xue-lian², MA Xue-song²

(1. Transportation Equipments and Ocean Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China;

2. Science and Technology on Scramjet Laboratory, Beijing Power Machinery Institute, Beijing 100074, China)

Abstract: For the materials with different modulus of elasticity in tension and compression which can not follow the classical theory of elasticity for stress and deformation analysis, to solve the problem of the structure calculation, the idea by judging the sign of the stress balls tensor to determine the modulus of elasticity in tension or compression was proposed. Based on ANSYS, analysis and calculation modules of the materials with different modulus in tension and compression were developed. Taking the simply supported ceramic beam of pure bending as an example, the finite element model was established. The structural analysis of the ceramic beam was completed by using the developed module. By comparing the results of the finite element (FE) solutions and analytical solutions, the error range could be found. Error of stress was not more than 2.1% and the deflection error did not exceed 3%. Feasibility of the proposed method is proved. By comparing the errors of FE solutions of the maximum tensile (compressive) stress between bimodulus and the same modulus, it could be found that the error value increased as the ratio of elastic modulus in tension and compression reducing. Error exceeds the allowable range of engineering, so the application of different moduli theory is important.

Key words: Stress balls tensor; Bimodulus; Single modulus; Ceramic beam; Finite element solutions

^{*} 收稿日期: 2014-05-06; 修订日期: 2014-08-05。

基金项目: 国家自然科学基金项目 (5100906)。

作者简介: 杜 玲 (1983—), 女, 博士生, 讲师, 研究领域为结构设计与分析。E-mail: duyige0729@126.com

通讯作者: 李范春 (1960—), 男, 博士, 教授, 研究领域为结构设计与分析。E-mail: lee_fc@126.com

1 引言

陶瓷材料常用于航空高温部件^[1~3],高超声速飞行器最高温度区主要集中在头锥、翼缘等位置,有良好高温力学性能的超高温陶瓷材料正是其候选材料之一。风洞地面模拟实验是材料考核最常用的方法之一,但费用高、能耗大,使结构优化存在一定困难。在已有实验研究的基础上,建立合理的数学模型并利用数值计算方法对超高温陶瓷材料前缘构件的气动加热过程及热应力分布进行数值模拟,对高超声速飞行器用超高温陶瓷材料前缘构件的研究具有十分重要的指导意义。而陶瓷材料的显著特点是拉压弹性模量完全不同,在进行结构分析的过程中已引起显著关注。如沿用经典弹性理论来分析其应力及变形则会引起很大的误差,有时甚至无法满足工程需要。因此提出用不同模量的理论对陶瓷材料制成的构件或结构进行分析计算显得尤为重要。

拉、压不同模量问题的研究始于20世纪40年代,著名力学家Timoshenko^[4]首先提出了双模量的概念,20世纪80年代前苏联学者Ambartsumyan^[5]建立拉压不同模量材料的本构关系,将这个概念应用到弹性理论中。国内学者也进行了大量的相关研究,提出了部分简单问题的解析解,叶志明等^[6]针对拉压不同模量的材料在各类工程中广泛应用的特点推导出不同模量悬臂梁的解析解。吴晓等^[7]采用材料力学的基本理论,推导出了曲梁相应的纯弯曲正应力及径向应力计算公式;吴晓等^[8]等利用Kantorovich法研究了分布载荷作用下双模量悬臂梁的平面应力问题,推导出了悬臂梁的应力公式。孔娟等^[9]对具有不同拉压模量的厚壁球壳,采用双剪统一强度理论推导了其扩张问题的应力及位移的统一解。分析了不同模量、不同模型控制参数对厚壁球壳扩张时的扩张压力和应力场的影响。申家辉^[10]对拉压不同模量横力弯曲梁提出计算假定,推导单元中和轴公式并构造了算法;通过实例计算对比分析不同模量与经典力学相同模量两种方法计算结果的差异,提出对该类结构计算的合理建议以及利用不同模量对结构进行优化的结论。何晓婷等^[11]推导了考虑自重且顶部有水平推力的不同模量弯压柱近似弹性力学解答。而对于复杂问题,解析解不易求得,于是出现了多种数值计算方法。张洪武等^[12]基于参变量变分原理,结合有限元方法,将拉压不同模量平面问题转化为互补问题求解。张国庆等^[13]采用Kriging代理模型数值求解拉压不同模量平面问题。杨海天等^[14]利用

光滑函数技术,与有限元方法相结合,建立了拉压不同模量一维连续体与桁架结构的数值求解模型。姚文娟等^[15]用不同模量弹性理论建立了不同模量的物理方程,编制相应的有限元程序,并对弯压柱进行了实例计算。王蔚佳等^[16]基于双模量有限元数值迭代技术,计算了不同拉压模量比值情形下的从浅梁到深梁的弯曲问题。叶志明等^[17]等对有限元模型进行改进和探讨。

综上所述,现有研究为双模量的计算问题做出了很大的贡献。但是,现存方法的计算过程相对复杂,计算量比较大,而且现有的软件也不能够定义双模量,解决其计算问题。本文采取不同的视角,提出一种不同于以往的新方法,即通过判断应力球张量的正负来确定拉压弹性模量,从而进行结构的分析计算,并以ANSYS为基础,开发了拉压模量不等材料的分析计算模块。以纯弯曲的两端简支的陶瓷梁为例,对比其解析解与有限元解的计算结果,分析误差,充分证明了本文提出方法对于陶瓷材料的可行性,以及所开发模块计算能力的准确性和双模量计算应用于航天工程中的重要性。

2 概念及计算方法

2.1 基本概念

不同模量弹性理论与经典弹性理论之间的区别在于应力与应变关系的本构方程,在绝对值相同的拉应力或压应力作用下,材料会发生绝对值不同的拉应变或压应变,材料在轴向应力作用下,应力、应变关系是非线性的(双线性),即材料具有不同的拉伸模量 E^+ 及压缩模量 E^- (如图1)。

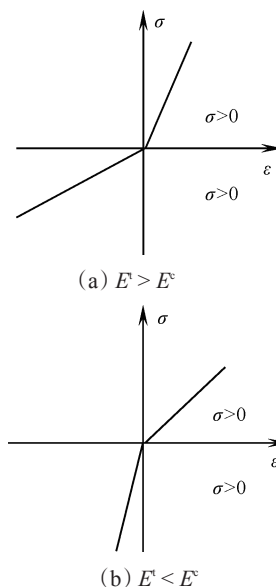


Fig. 1 Nonlinear (Bilinear) model

2.2 纯弯曲解析解公式

对于经典弹性理论来说,拉压模量是相同的,可以用经典力学公式求出其解析解,然而对于具有拉压不同模量的梁弯曲来说,经典中性轴理论已不能适用.于是陈彤^[18]提出了不同模量纯弯曲的解析解.拉压弹性模量分别用 E^t 和 E^c 来表示,设沿矩形截面高度 h 方向作用弯矩 M ,截面受拉区的高度为 h_t ,受压区的高度为 h_c ,截面宽度为 b ,梁长为 l ,泊松比为 γ ,取中性轴的中点为坐标原点,建立如图2所示的坐标系

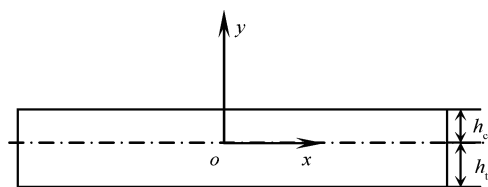


Fig. 2 Pure bending beam schematic

推导过程这里不再详述,得到不同模量简支梁纯弯曲的解析公式

$$\sigma_x = -\frac{E}{E^t} \frac{M}{I} y \quad (1)$$

$$w = \frac{M}{2E^t I} \left[x^2 - \frac{l^2}{4} + \gamma(y^2 - h_t^2) \right] \quad (2)$$

式中 σ_x 是沿 x 方向的正应力; w 是沿 y 轴方向的挠度

$$E^t = \frac{4E^t E^c}{(\sqrt{E^t} + \sqrt{E^c})^2} = \left(\frac{2\sqrt{E^t E^c}}{\sqrt{E^t} + \sqrt{E^c}} \right)^2 \quad (3)$$

为折合弹性模量

$$E = E(\sigma) = \begin{cases} E^t & \sigma > 0 \\ E^c & \sigma < 0 \end{cases} \quad (4)$$

为拉压不同模量

$$I = \frac{1}{12} b h^3 \quad (5)$$

为截面惯性矩

$$h_t = \frac{\sqrt{E^c}}{\sqrt{E^c} + \sqrt{E^t}} \quad (6)$$

为受拉区的高度。

2.3 有限元计算方法的提出

对于受力构件来说,每一点的应力状态都可以用一个二阶对称张量来表示,根据张量的性质,又可以将应力张量分解成两个张量之和。

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} \sigma_m \quad (7)$$

式中 σ'_{ij} 称为应力偏张量,应力偏张量只使物体产生形状变化,材料的塑性变形就是由其引起的; $\delta_{ij} \sigma_m$ 称为应力球张量,其任何方向都是主方向,球应

力状态的特点是在任何切平面上都没有切应力,所以不能使物体产生形状变化,而只能产生体积变化。且主应力均为平均应力:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} J_1 \quad (8)$$

而 J_1 是应力张量的第一不变量,所以, σ_m 是不变量,与所取的坐标无关,对于一个确定的应力状态,它是单值的。根据应力球张量的特点,定义拉压弹性模量,若

$$\sigma_m = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \geq 0 \quad (9)$$

体积增大,发生拉伸变形,定义该点为拉伸弹性模量 E^t ;若

$$\sigma_m = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 < 0 \quad (10)$$

体积减小,发生压缩变形,定义该点为压缩弹性模量 E^c 。当梁上所有点的拉压弹性模量定义完成,整根梁的拉压弹性模量完成定义。

3 有限元编程

3.1 计算迭代步骤

(1) 建立两端简支的陶瓷梁模型。

(2) 假定梁为拉伸弹性模量进行计算。

(3) 对应每个单元计算主应力,求出第一不变量;若第一不变量 $J_1 \geq 0$,进行下一步计算;若第一不变量 $J_1 < 0$,定义压缩弹性模量,进行计算。

(4) 重复步骤(3),直到满足停机条件。

(5) 输出最终计算结果以及材料号。

(6) 结束。

停机条件,循环第 k 次的各单元所对应的应力(或挠度)达到满意的收敛效果,即 $|\sigma_{k+1} - \sigma_k| < 0.5$ (或 $|w_{k+1} - w_k| < 0.5$)。

3.2 流程图

流程图见图3。

4 简支梁结构分析

以一两端简支的陶瓷梁模型为例,如图4所示,梁长 $L=2\text{m}$,高度 $h=0.2\text{m}$,宽度 $b=0.1\text{m}$,在梁的左右两端分别施加大小相等,方向相反的外力偶矩 $M=4.90 \times 10^4 \text{N} \cdot \text{m}$,压缩模量取 $E^c=2.55 \times 10^{10} \text{Pa}$,泊松比 $\gamma=0.167$,拉伸模量 E^t 取 $0.25E^c \sim E^c$,拉压模量比 $\omega=E^t/E^c$ 的变化范围从 $1/4$ 到 1 。

4.1 计算不同模量纯弯曲梁的解析解与有限元解

根据公式(1)和公式(2),可以计算得到拉压模量比 $\omega=E^t/E^c=1, 1/2, 1/2.5, 1/3, 1/3.5, 1/4$ 时, x 方向正应力 σ_x 和挠度 w 的解析解。应用本文方法,建立两端

简支的陶瓷梁有限元模型,通过所开发模块进行计算,可以得到拉压模量比 $\omega=E^t/E^c=1, 1/2, 1/2.5, 1/3, 1/3.5, 1/4$ 时, x 方向正应力 σ_x 和挠度 w 的有限元解;在相同坐标系下,输出 x 方向正应力 σ_x ,由于梁受力对称,挠度也是对称的,输出梁中至梁端处中性层处的挠度 w 。

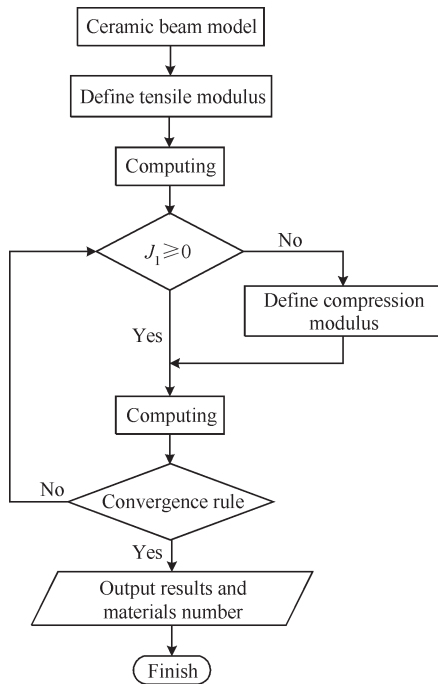


Fig. 3 Flow chart

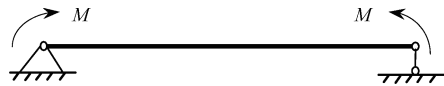


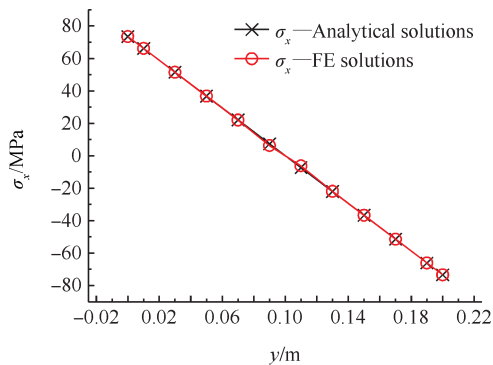
Fig. 4 Simply supported ceramic beam

4.2 不同模量纯弯曲陶瓷梁的解析解与有限元解对比分析

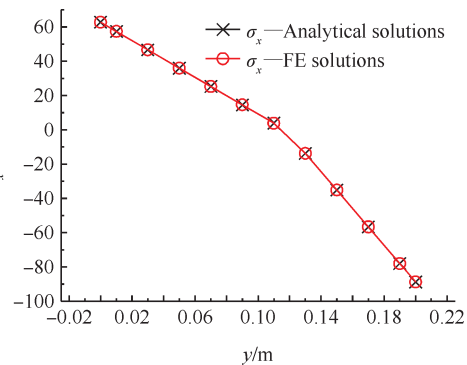
在相同坐标系下,根据计算所得的纯弯曲简支梁解析解和有限元解的数据,分别绘制 $E^t/E^c=1/1, 1/2, 1/2.5, 1/3, 1/3.5, 1/4$ 时在 $0 \leq y \leq 0.2$ 区间上 x 方向的正应力解析解和有限元解的分布图,如图5所示。从图中可以直观的看到,正应力的有限元解和解析解在 $0 \leq y \leq 0.2$ 的整个区间上数值非常接近,两条曲线基本是重合的。

在相同坐标系下,根据计算所得的纯弯曲简支梁解析解和有限元解的数据,分别绘制 $E^t/E^c=1/1, 1/2, 1/2.5, 1/3, 1/3.5, 1/4$ 时在 $0 \leq x \leq 1$ 区间上挠度的解析解和有限元解分布图,如图6中所示。从图中可以直观的看到,挠度的有限元解和解析解在 $0 \leq x \leq 1$ 的整个区间上数值非常接近,在梁中处($x=0$)出现的误差较大,向梁端逐渐减小,从整体上来看,两条曲线基本吻合。

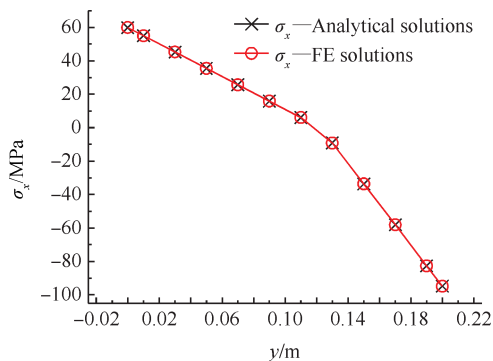
通过对图5和图6直观的观察,可以看出,发生纯弯曲的简支陶瓷梁,其 x 方向正应力和挠度的有限



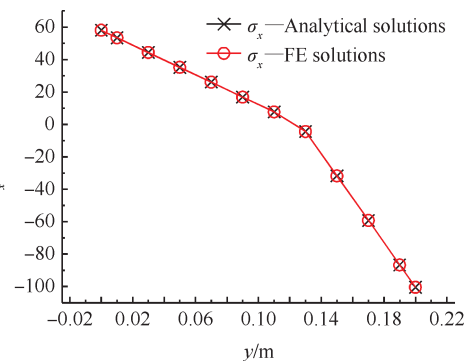
(a) $E^t/E^c=1/1$



(b) $E^t/E^c=1/2$



(c) $E^t/E^c=1/2.5$



(d) $E^t/E^c=1/3$

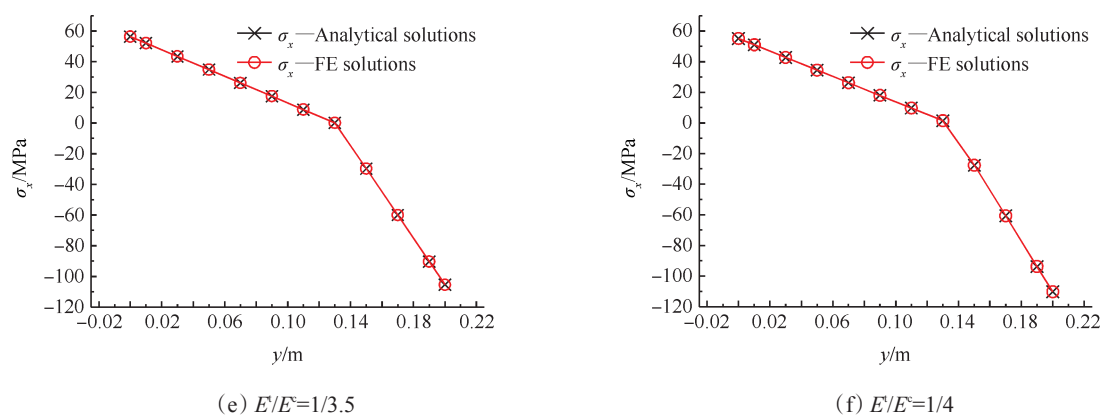


Fig. 5 Comparison between analytical and FE solutions of x direction normal stress with E'/E^* varying

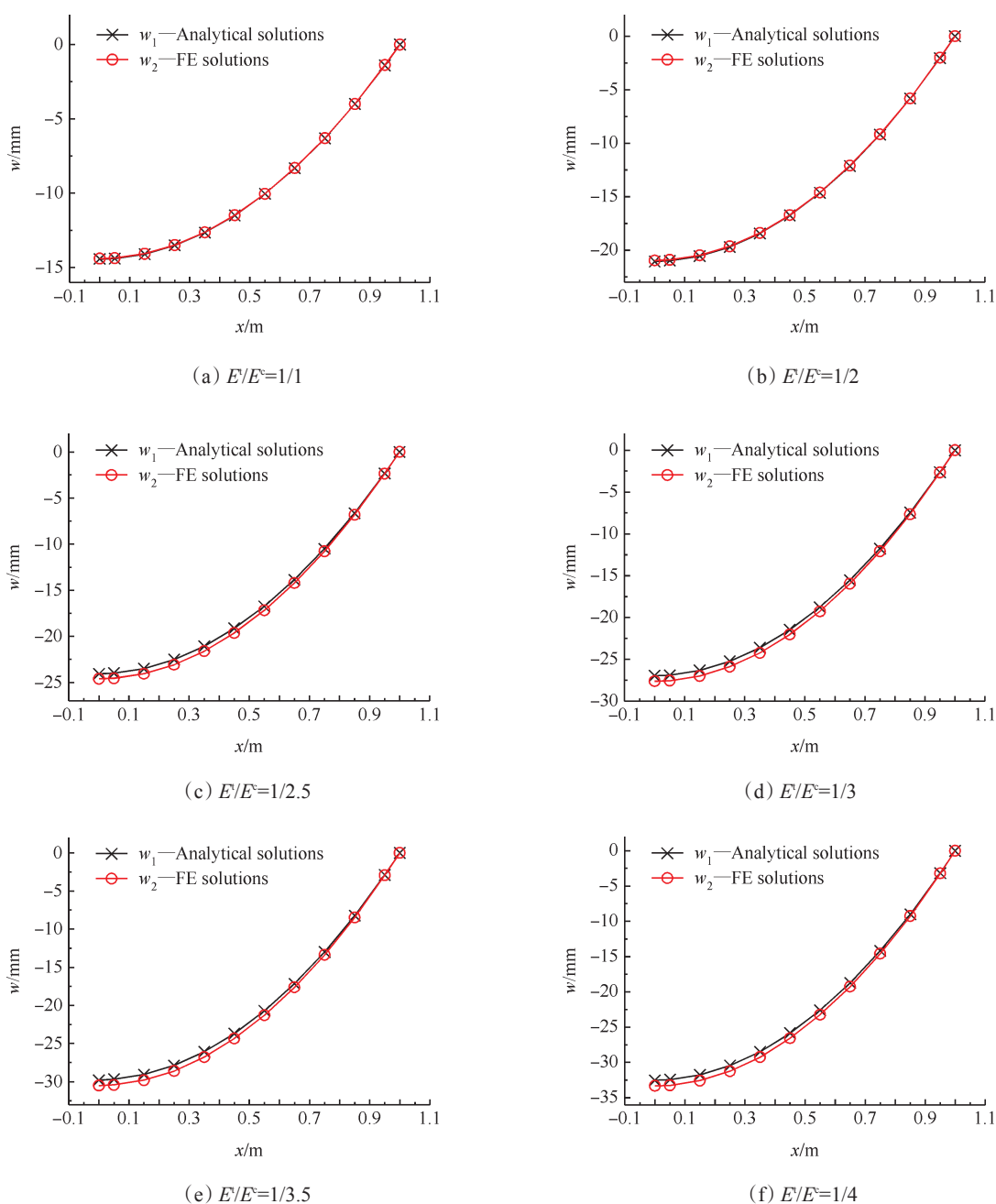


Fig. 6 Comparison between analytical and FE solutions of deflection with E'/E^* varying

元解以及解析解从整体上来看,曲线趋势一致,吻合的非常好。但是存在一定的误差,为验证有限元解的准确性,需要进一步确定误差范围。

5 误差分析

5.1 有限元解与解析解的误差

为了更加直观的观察误差的值,确认误差范围,绘制 x 方向正应力的解析解与有限元解的误差在 $0 \leq y \leq 0.2$ 区间上随 E^t/E^c 的变化图,如图 7 所示。绘制挠度的解析解与有限元解的误差在 $0 \leq x \leq 1$ 区间上随 E^t/E^c 的变化图,如图 8 所示。

由图 7,可以看出, x 方向正应力的有限元解与解析解之间的误差大部分接近于零,只在中性层附近误差增大,但不超过 2.1%,在以往所查文献中,很难找到误差接近于零的情况,可见 x 方向正应力的限元解与解析解结果的一致性非常好,由图 8 可以看出,挠度的有限元解与解析解的误差也不超过 3%。由于在求解应力时,细化了网格,所以应力误差远远小于挠度误差。

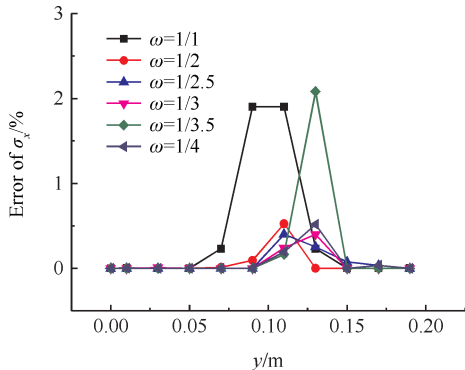


Fig. 7 Error of normal stress in x direction with E^t/E^c varying

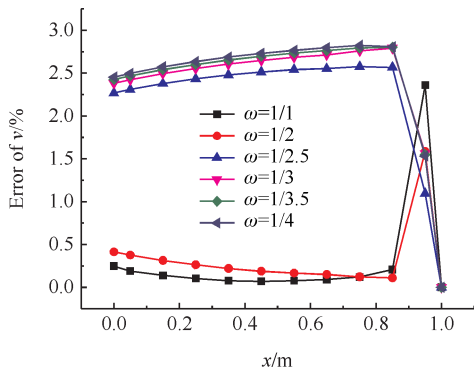


Fig. 8 Error of deflection with E^t/E^c varying

5.2 单、双模量最大拉压应力有限元解之间的误差

将拉压模量比 $\omega = E^t/E^c = 1/2, 1/2.5, 1/3, 1/3.5, 1/4$ 时的最大拉压应力与拉压模量比 $\omega = E^t/E^c = 1$ 时的最大

拉压应力进行对比,求出误差,对应写入表 1 中。其中, $\sigma_{\max}^t$ 表示最大拉应力, $\sigma_{\max}^c$ 表示最大压应力。由表 1 中的数据可以看出,最大拉压应力按照双模量理论计算所得结果与按照单模量理论计算所得结果之间的误差非常大,拉应力的误差范围达到 14.7%~25.0%,压应力的误差范围达到 20.7%~50.0%,完全超出了工程上允许的误差范围,无法准确的进行强度校核。而且,随着拉压模量比的减小,误差也随之增大。

Table 1 Error of FE solutions of the maximum tensile (compressive) stress between bimodulus and the same modulus (%)

E^t/E^c	1/2	1/2.5	1/3	1/3.5	1/4
$\sigma_{\max}^t$	14.7	18.4	21.1	23.3	25.0
$\sigma_{\max}^c$	20.7	29.1	36.6	43.5	50.0

6 结 论

(1)通过判断应力球张量正负来确定拉压弹性模量的方法是可行的,不但适用于拉压模量相等的材料($E^t/E^c=1/1$),同时适用于拉压模量不等的陶瓷材料。以 ANSYS 为基础所开发的拉压模量不等材料的分析计算模块的计算误差:正应力不超过 2.1%,挠度不超过 3%,可以在一定程度上弥补现有软件无法定义双模量的缺陷。

(2)对于陶瓷材料来说,按照单模量计算出的应力值与按照双模量计算所得值之间的误差非常大。而且随着拉压弹性模量比的减小,误差随之增大。所以,只有定义双模量,才能准确地对陶瓷结构进行计算分析。

本文只对比了有限元解与解析解之间的误差,后续工作会进行进一步的试验研究,与试验结果进行对比,完善结果分析。通过进一步的研究,如果可以应用于航天结构中大型复杂的陶瓷结构,这对于陶瓷结构优化具有十分重要的实际意义。

参考文献:

[1] 王黎钦,李秀娟,古 乐,等. 弹用混合式陶瓷轴承的开发研究[J]. 推进技术, 2001, 22(6): 522-525. (WANG Li-qin, LI Xiu-juan, GU Le, et al. Research on Hybrid Ceramic Bearings for Missile Turbojet Engines [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2001, 22(6): 522-525.)

[2] 孙惠贤,杜声同,唐 明,等. 多孔陶瓷发腔火焰稳定性研究[J]. 推进技术, 1993, (5): 21-24. (SUN

- Hui-xian, DU Sheng-tong, TANG Ming, et al. An Investigation on Flame Stability by Porous Ceramic Flame Stabilizer[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 1993, 14(5): 21-24.)
- [3] 孙惠贤, 杜声同, 朱文婕, 等. 陶瓷多孔体渗透率的实验研究[J]. 推进技术, 1995, 16(4): 77-81. (SUN Hui-xian, DU Sheng-tong, ZHU Wen-jie, et al. Experimental Study of Osmose Rate for Porous Ceramic [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 1995, 16(4): 77-81.)
- [4] Timoshenko S. Strength of Materials, Part II: Advanced Theory and Problems [M]. Princeton: Van Nostrand, 1941.
- [5] Ambartsumyan S A. 不同模量弹性理论[M]. 张允真译. 北京:中国铁道出版社, 1986.
- [6] 叶志明, 姚文娟. 不同模量悬臂梁的解析解及有限元数值解[J]. 机械强度, 2005, 27(2): 262-267.
- [7] 吴 晓, 杨立军. 双模量曲梁的纯弯曲正应力及径向应力[J]. 工程与试验, 2008, (4): 11-12.
- [8] 吴 晓, 黄 翀, 孙 晋. 双模量悬臂梁在分布荷载作用下的 Kantorovich 解[J]. 湖南科技大学学报(自然科学版), 2012, 27(2): 55-59.
- [9] 孔 娟, 袁聚云, 潘晓明. 不同拉压模量厚壁球壳弹塑性分析[J]. 力学与实践, 2010, 32(1): 41- 45.
- [10] 申加辉. 拉压不同模量横力弯曲梁的算法[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2009, 26(3): 233-236.
- [11] 何晓婷, 郑周练, 陈山林. 拉压不同模量弯压柱的近似弹性力学解[J]. 重庆大学学报, 2008, 31(3): 339-343.
- [12] 张洪武, 张 亮, 高 强. 拉压不同模量材料的参变量变分原理和有限元方法[J]. 工程力学, 2012, 29(8): 22-38.
- [13] 张国庆, 杨海天. 基于 Kriging 代理模型的拉压不同模量平面问题的近似求解[J]. 工程力学, 2013, 30(4): 23-34.
- [14] 杨海天, 张晓月, 何宜谦. 基于敏度分析的拉压不同模量桁架问题的数值分析[J]. 计算力学学报, 2011, 28(2): 237-242.
- [15] 姚文娟, 蒋小芳. 拉压不同模量弯压柱的有限元数值解[J]. 南昌大学学报(工科版), 2005, 27(1): 40-45.
- [16] 王蔚佳, 邹文成, 陈 强. 基于双模量理论的均布载荷下简支梁的解析解及数值分析[J]. 工业建筑, 2013, 43(6): 56-89.
- [17] 叶志明, 陈 彤, 姚文娟. 不同模量弹性问题理论及有限元法研究进展[J]. 力学与实践, 2004, 26(2): 9-14.
- [18] 陈 彤. 拉压不同模量弹性问题的数值研究[D]. 上海:上海大学, 2007.

(编辑:张荣莉)