发动机燃烧室主动冷却管道的热-力耦合分析*

白瑜光1,张玉光1,原志超1,高效伟1,2

(1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;2. 北京动力机械研究所 高超声速冲压发动机技术重点实验室, 北京 100074)

摘 要:为了准确高效地进行发动机冷却管道结构的热-力耦合数值分析,基于边界单元法提 出一种冷却介质中结构对流换热过程的新型计算方法,计算过程中采用径向积分法将对流换热边界 积分方程中的域积分转换为等效的边界积分,从而显著降低计算难度。采用改进后的边界单元法和 有限元方法分别进行发动机燃烧室主动冷却管道处的热 - 力耦合分析,计算并获得了该处的温度 场、位移场和应力场,发现了不同物理量随管道轴向的变化规律。通过比较基于两种不同数值方法 的计算结果可以发现本文数值方法在显著降低计算模型复杂度的同时,取得了合理的计算结果。因 此利用本文方法可以简便有效地进行发动机燃烧室主动冷却管道结构的热 - 力耦合分析。

关键词:边界单元法;径向积分法;发动机燃烧室;主动冷却管道;热-力耦合分析 中图分类号:V231.1 文献标识码:A 文章编号:1001-4055 (2013)12-1621-07

Analysis for Thermal and Mechanical Coupling in Active Cooling Channels for Engine Combustor

BAI Yu-guang¹, ZHANG Yu-guang¹, YUAN Zhi-chao¹, GAO Xiao-wei^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
 2. Science and Technology on Scramjet Laboratory, Beijing Power Machinery Institute, Beijing 100074, China)

Abstract: With the purpose to predict the thermal and mechanical coupling onalysis in active cooling channels for the engine accurately and effectively, a novel numerical method for the analysis of structure heat convection process in cooling medium was proposed based on boundary element method. In order to decrease the computational complexity significantly, the radial integration method was employed to transform the domain integrals of heat convection integral equation to equivalent boundary-only discretization. The proposed boundary element method and finite element method were both taken to obtain thermal and mechanical coupling analysis results including temperature, displacement and stress fields in the cooling channel system of engine combustion. The variation characteristic of different parameters along the channel axis was investigated. From the comparison between the results, it can be found that the numerical method proposed obtains reliable computational results. Moreover, it decreases the computational complexity significantly. Thus the present method can be employed to give thermal and mechanical coupling analysis in active cooling channels for the engine combustor effectively and conveniently.

Key words: Boundary element method; Radial integration method; Engine combustor; Active cooling channel; Thermal and mechanical coupling analysis

[•] 收稿日期: 2013-01-10;修订日期: 2013-02-18。

基金项目:国家自然科学基金 (11172055);中国博士后科学基金资助项目 (2012M520618)。

作者简介:白瑜光(1981—),男,博士,研究领域为航空航天结构热防护,高超声速气动弹性力学。 E-mail: baiyg@dlut.edu.cn

1 引 言

随着高超声速飞行器的不断发展,结构热防护成 为高超声速飞行时的关键性问题之一,而作为飞行器 最重要组件的航空发动机的热防护问题更成为研究 的重中之重^[1]。当飞行马赫数大于6时,燃烧室内燃 气总温可高达 3000K。对于这样的高温环境,进行热 防护时需要考虑主动冷却系统,即在燃烧室固壁内构 造冷却通道,导入冷却剂,利用小管道流动的对流换 热机制,吸收壁内的热量,将壁温控制在一定范围 内^[2]。

在设计主动冷却燃烧室时,燃烧室冷却结构的热 力分析十分重要。Tsujikawa 等^[3]利用二维流动模型 对超燃发动机中采用氢进行主动冷却时的效果进行 了数值研究。牛禄等^[4]对发动机再生冷却通道传热 过程建立数学模型,采用通用形式的控制方程处理冷 却剂紊流换热和通道材料导热的共轭传热问题。 Knab 等^[5]利用 CFD 软件对新一代发动机进行了冷 却设计。Dofour 等^[6]利用半经验方法和 CFD 手段进 行了主动冷却发动机的数值分析。李军伟等^[7]针对 轴对称再生冷却发动机推力室建立了一维冷却模型, 并使用一维换热公式得到推力室壁面在轴线方向上 的温度分布,再根据一维结果用商用软件 Fluent 对火 箭发动机推力室建立了三维计算模型,进行了流动和 传热的耦合计算。Wang 等^[8]建立了一维冷却通道 流动热模型,对燃气侧的热环境采甩 CFD 的方法,将 二者耦合起来进行计算,得到较好效果。Naraghi 等^[9]建立了再生冷却火箭发动机推力室和喷管的三 维热分析理论模型,对燃气、固壁、冷却液三者进行了 耦合计算,得到了较好的结果。可以发现,这些研究 可归纳为两大类:一类是通过简化处理分别研究冷却 管道与燃烧室的传热分析:另一类是采用商用软件对 燃气、壁面和冷却管道进行热-力耦合计算。

边界单元法是继有限单元法后又一种被广泛应 用的数值方法,计算过程中只需要将问题的边界离散 成单元,准备数据简单,便于复杂边界问题的建模。 应用边界元法时,所求物理量的梯度计算公式可以解 析地从基本边界积分方程中导出,因此所求梯度值 与其物理量本身具有同样级别的精度,这是基于内部 网格的数值方法所难以实现的^[10]。高温热辐射问题 中的热辐射是通过面与面实现的,因此用基于面上 划分单元的边界元法在处理热辐射问题方面具有独 特的优点。高效伟^[11]基于边界元法成功地解决了热 导率可变条件下各向同性材料的热传导问题。

然而,在用边界元法解决对流换热问题时,由于 域积分的出现,使得这一方法遇到了挑战,而高效伟 提出了一种可把任意域积分转换成边界积分的数学 方法——径向积分法^[12]。本文首先基于使用径向积 分法的边界单元法提出了一种冷却介质中对流换热 过程的新型计算方法,以解决含主动冷却管道发动机 的三维热-力耦合分析问题;然后利用本文数值方法 和有限元商用软件分别计算发动机冷却系统的温度 场、位移场、应力场并进行比较分析。

2 数值方法

2.1 冷却管道温度场计算方法

流体与固体的能量方程可以统一地表示为[13]

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \rho c_p \left(v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial T}{\partial t} \right)$$
(1)

式中 k,ρ 和 c_p 分别表示热导率、密度和比热;T和 v_i 分别表示温度和第i个速度分量。特别强调的是,对于冷却管道中的流体,可以直接使用式(1);对于通过管道内壁固体材料的热传导,忽略式(1)中的右端项即可。

用加权余量法^[10]建立式(1)的积分方程,即用权 函数 *G*乘以方程(1)的两端并在整个计算区域 *Q*内 进行积分,则式(1)的弱形式可写为

$$\int_{\Omega} G \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} G \rho c_p \left(v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial T}{\partial t} \right) d\Omega \quad (2)$$

对式(2)进行分步积分并采用高斯散度定理^[10], 可得到下面的边界 - 区域积分方程

$$kT + \int_{\Gamma} q^{*} T d\Gamma + \int_{\Gamma} G q d\Gamma + \int_{\Gamma_{E}} G \rho c_{p} v_{i} n_{i} T d\Gamma =$$
$$\int_{\Omega} VT d\Omega + \int_{\Omega} G \rho c_{p} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega$$
(3)

式中 G 为格林函数^[10]; Γ 是区域 Ω 的边界; n_i 为边界 Γ 外法向矢量的第 i 个分量; q 是热流密度; Γ_E 表示管道的两个端面, 如图 1 所示。在推导式 (3)的过程中, 假定流体是不可压缩的, 并且管道壁 面的流体速度为 0。其它量表示如下

$$q^* = k \frac{\partial G}{\partial x_i} n_i \tag{4}$$

$$V = \left(\frac{\partial k}{\partial x_i} + \rho c_p v_i\right) \frac{\partial G}{\partial x_i} + \rho v_i \frac{\partial c_p}{\partial x_i} G$$
(5)

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln(\frac{1}{r}) & 2D\\ \frac{1}{2\pi r} & 3D \end{cases}$$
(6)



Fig. 1 Pipe surface

对于式(5)中的流体速度 v_i,本文采用导入数值 解或圆形管道的解析解。导入的数值解可由商用软 件(如 FLUENT)计算获得,其值可以具有很高的精 度,但计算速度慢。在精度要求不是很高的情况下, v_i可由粘性流体在等截面圆管中流动时的速度包络 给出,对于层流情况沿圆管轴线方向的流速在横截面 内的分布可表示为^[14]

$$u = 2\overline{u} \left[1 - \left(\frac{r}{\overline{r}}\right)^2 \right] \tag{7}$$

式中 r 和 u 分别为圆管的半径与平均流速。对 于变截面圆管,流体通过不同截面的流速分布可由质 量守恒导出,其表达式可表示为^[12]

$$u = 2\bar{u} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]$$
(8)

式中r₀为计算点处的半径,如图2所示。



Fig. 2 Variable cross-section tube schematic diagram

对于非圆截面管道,上述公式中的半径用等效半 径来代替。

2.2 发动机热应力计算方法

2.2.1 位移积分方程

考虑温度变化时的位移积分方程可表示为[15]

$$\widetilde{u}_{i} = \int_{\Gamma} U_{ij} t_{j} d\Gamma + \int_{\Gamma} T_{ij} \widetilde{u}_{j} d\Gamma + \int_{\Omega} V_{ij} \widetilde{u}_{j} d\Omega + \int_{\Omega} U_{ij,j} \widetilde{T} d\Omega$$
(9)

$$T_{ij} = U_{il,k} C^{0}_{lkjs} n_{s}, V_{ij} = U_{il,k} C^{0}_{lkjs} \tilde{\mu}_{s}$$
(10)

式中 \tilde{T} 为规格化温度,定义为 $\tilde{T} = cT; \tilde{u}_j$ 为规格 化位移,定义为 $\tilde{u}_j = \mu u_j; \tilde{\mu}$ 为规格化剪切模量,定义 为 $\tilde{\mu} = \ln \mu; U_{ij} \pi T_{ij}$ 为 Kelvin 位移和面力基本解^[15], 分别为

$$V_{ij} = \frac{-1}{4\pi\alpha(1-\nu)r^{\alpha}} \{ \tilde{\mu}_k r_k [(1-2\nu)\delta_{ij} + \beta r_i r_j] + (1-2\nu)(\tilde{\mu}_i r_i - \tilde{\mu}_i r_i) \}$$
(11)

$$U_{ij,j} = \frac{-(1-2\nu)r_i}{4\pi\alpha(1-\nu)r^{\alpha}}$$
(12)

当处理二维(2D)问题时有 $\beta = 2$;当处理三维(3D)问题时有 $\beta = 3, \alpha = \beta - 1^{[16]}$ 。

2.2.2 应力积分方程

应力积分方程可由上述位移积分方程导出,其形 式为

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} U_{ijk} t_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ijk} \tilde{u}_k d\Gamma + \int_{\Omega} V_{ijk} \tilde{u}_k d\Omega + \int_{\Omega} \Psi_{ij} [\tilde{T} - \tilde{T}^p] d\Omega + \tilde{T}^p \int_{\Gamma} r \ln r \frac{\partial r}{\partial n} \Psi_{ij} d\Gamma - \delta_{ij} h \tilde{T}^p + F_{ijk} \tilde{u}_k$$
(13)

这里 U_{ijk} 和 T_{ijk} 为核函数,表示 $\mu = 1$ 时的 Kelvin 基本解^[16],上标 p 代表源点,新的量 Ψ_{ij} 和 h 可表示 为

$$\Psi_{ij} = \frac{(1-2\nu)}{2\alpha\pi(1-\nu)r^{\beta}} (\delta_{ij} - \beta r_{,i}r_{,j})$$
(14)

$$h = \frac{(1+\beta)(1-2\nu)}{6(1-\nu)}$$
(15)

2.3 域积分到边界积分的转换

通常方程(3),(9)和(13)中的域积分需要将计 算域离散成内部网格来计算,本文则使用径向积分 法^[12](radial integration method, RIM)将这些域积分 转换成等效的边界积分,从而形成不需要内部网格的 纯边界元算法。同时本文通过函数逼近来得到温度 的函数关系,这是因为在一般的热应力分析中,物体 内的温度分布是根据边界条件通过运行热传导软件 而得到的,是一些离散点的温度值。这里选用增强径 向基函数逼近,将式(3)域积分中的温度表示为

$$T(x) = \sum_{A} \alpha^{A} \phi^{A} (R/S_{A}) + a^{k} x_{k} + a^{0}$$
 (16)

$$\sum_{A} \alpha^{A} = 0 \qquad \sum_{A} \alpha^{A} x_{i}^{A} = 0 \qquad (17)$$

这里 $\mathbf{R} = || x - x^{A} ||$ 表示作用点 x^{A} 到场点 x 之间 的距离; α^{A} , a^{k} 为待定系数,可通过配点由各点的温 度值表示。 ϕ^{A} 为径向基函数,研究表明四阶样条紧 支径向基函数可给出非常稳定的结果^[16],其形式为

$$\phi^{A} = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{R}{S_{A}}\right)^{2} + 8\left(\frac{R}{S_{A}}\right)^{3} - 3\left(\frac{R}{S_{A}}\right)^{4} & (0 \le R \le S_{A}) \\ 0 & (R \ge S_{A}) \end{cases}$$

(18)

式中 S₄ 为紧支域大小。将式(16)代入式(3)中 的域积分,并使用 RIM 公式^[12]可得到

$$\int_{\Omega} VT d\Omega = \sum_{A} \alpha^{A} \int_{\Gamma} V \frac{\partial r}{\partial n} F^{A} d\Gamma + \frac{a^{k}}{2} \int_{\Gamma} Vr_{,k} r^{2} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma + (a^{k} x_{k}^{p} + a^{0}) \int_{\Gamma} V \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma$$
(19)

式中 x^P_k 为源点的坐标。

$$F^{A} = \int_{0}^{r} \phi^{A} \mathrm{d}r \qquad (20)$$

同理,使用 RIM 公式可将式(3),(9)和(13)中 的其它域积分转换成相应的边界积分。

计算结果及讨论 3

3.1 模型介绍

根据上述理论,编制了边界单元法计算程序 BERIM。为了处理不同材料组成的多区域问题,程序 中采用了多域边界元技术^[10]。

图 3 为一带冷却通道的发动机燃烧室,其内外壁 半径分别为 0.102m, 0.117m, 长度为 0.6m。冷却管 道的总数量为40,截面尺寸4mm×2mm,采用变截面 形式(如图4所示)。











Fig. 5 Boundary element meshes

考虑对称性,取四分之一结构进行模型建立,管 道及内壁的边界元模型如图 5 所示。边界元计算模



Fig. 6 Finite element meshes

型共分 43 个子域, 29635 个结点和 17020 个单元。 同时在图6中给出利用有限元软件 ANSYS CFX 建立 的结构网格模型,网格数为27007。不难发现,有限 元方法数值模型的计算复杂度显著超过边界单元法 数值模型。

3.2 初始条件

对称边界 x = 0 面上,绝热,x 方向位移为 0,对称 边界 $\gamma = 0$ 面上, 绝热, γ 方向位移为 0。流体进口处, 即 z = 0 边界面上, 绝热; 流体出口处即 z = -0.6m 边 界面上,绝热;燃烧室内壁温度为1073.15K,冷却管 道内壁温度为 773.15K, 燃烧室外壳的温度为 353.15K;流体进口处,位移为0;管道内壁为受压 3.5MPa, 热腔内受压 10MPa.

3.3 计算结果及讨论

本文利用自编边界元法计算程序 BERIM (表示 使用径向积分的边界单元法)对上述模型进行热-力 耦合数值计算,并将计算结果和基于有限元商用软件 ANSYS 得到的计算结果进行比较。

3.3.1 冷却管道上壁面计算结果

冷却管内壁上壁面中心点沿z轴方向的温度计 算结果如图7所示。可以看出,在入口端有限元方法 计算结果偏高,在拐点处温度变化较大,二者同时得 出温度梯度较大处为拐点处即管道变截面处的结果。

图 8 为冷却管道上壁面中心点沿 z 轴方向的位 移计算结果。图 8(a)为 x 方向位移沿 z 轴分布的计 算结果;图8(b)为 y 方向位移沿 z 轴分布的计算结 果;图8(c)为z方向位移沿z轴分布的计算结果;图 8(d)为总体位移沿z轴分布的计算结果。不难发现, 两种方法得到的计算结果比较接近,变化的趋势基本 一致。尤其是总体位移的计算结果基本没有区别。 根据位移计算结果不难发现,上壁面中心线的位移在 喉部即拐点处产生突变,总体位移在出口端处为最大 值。



Fig. 7 Computational results of temperature distribution along *z*-axis (upper-wall)

图 9 为冷却管道上壁面中心点沿 z 轴方向的应 力变化情况,其中:图 9(a)为 x 方向应力沿 z 轴分布 的计算结果;图9(b)为y方向应力沿z轴分布的计 算结果;图9(c)为z方向应力沿z轴分布的计算结 果。可以发现,在进口端,应力变化比较剧烈,同时在 拐点处y向和z向应力出现较明显的变化,这与燃烧 室冷却管道内壁结构的几何特点密切相关。两种不 同计算方法得到的计算结果仍然没有明显差异。

3.3.2 冷却管道下壁面计算结果

图 10 为冷却管道内壁下壁面中心点沿 z 轴方向 的温度计算结果。可以发现,由于靠近燃烧室,下壁 面的温度值要显著高于图 7 中上壁面的温度值;同上 壁面的变化趋势类似,在内部截面拐点处温度产生了 剧烈变化。无论是有限元方法和边界元方法,都准确 捕捉到了这一变化。拐点处的燃烧室自身壁面较厚 (如图 3 所示),因此导致温度显著低于壁面较薄处。



Fig. 8 Computational results of displacement distribution along z-axis (upper-wall)



Fig. 9 Computational results of stress distribution along z-axis (upper-wall)



Fig. 10 Computational results of temperature distribution along *z*-axis (lower-wall)

图 11 为冷却管道下壁面中心点沿 z 轴方向的位 移计算结果,其中图 11(a)为 x 方向位移沿 z 轴分布 的计算结果;图 11(b)为 y 方向位移沿 z 轴分布的计 算结果;图 11(c)为 z 方向位移沿 z 轴分布的计算结 果;图 11(d)为总体位移沿 z 轴分布的计算结果。对 比图 8 可以发现,上下壁面各方向及总体位移变化情 况基本一致,计算值大小也没有区别,在拐点处位移 产生突变。总体位移的极大值仍出现于出口端。

图 12 为冷却管道上壁面中心点沿 z 轴方向的应 力变化情况,其中图 12(a)为 x 方向应力沿 z 轴分布 的计算结果;图 12(b)为 y 方向应力沿 z 轴分布的计 算结果;图 12(c)为 z 方向应力沿 z 轴分布的计算结 果。可以发现,同上壁面类似,在进口端应力变化比 较剧烈,x 向、y 向应力值较大;在拐点处应力出现明 显变化。两种不同计算方法得到的计算结果趋势基 本一致,计算值存在一定差距,但数量级一致。

3.3.3 两种方法计算参数对比

表1给出本文使用两种不同计算方法进行发动 机燃烧室冷却管道热-力耦合数值模拟分析时的相关 参数及计算耗时。计算是在采用主频为3.1GHZ的 Inter CPU的个人计算机上进行的。可以发现,不论 是模型复杂度和计算时间,本文基于边界单元法的数 值方法在满足工程计算准确度的同时,均优于有限元 法。尤其是计算效率,要显著好于有限元方法。







Fig. 12 Computational results of stress distribution along z-axis (lower-wall)

Table 1	Computational	parameters
---------	---------------	------------

Poramotor	Mesh number	Computational time
1 oralleter		/min
BERIM	68080	18
ANSYS	108028	362

4 结 论

(1)基于边界单元法提出了一种冷却介质中结构对流换热过程的新型计算方法,计算过程中采用径向积分法将对流换热边界积分方程中的域积分转换为等效的边界积分。本文所述方法不需要在计算域内划分网格,因而使用方便。

(2)通过分析分别利用本文方法和有限元商用 软件进行发动机燃烧室变截面主动冷却管道处的热 -力耦合分析得到的管道内壁上、下壁面的温度场、 位移场和应力场计算结果可以发现,各种参数的计算 结果在内部拐点处均产生突变,符合结构几何特征; 边界元计算结果与常规有限元法吻合得较好,能够很 好地模拟三维主动冷却管道传热过程,准确地反映了 冷却管道的传热规律。

(3)本文数值方法在一定程度上可于工程领域 中取代有限元方法或商用软件进行发动机燃烧室主 动冷却管道的热 - 力耦合数值分析,在保证计算准确 度的同时,可以显著地提高计算效率,从而为耦合分 析在工程中的应用提供较大便利。

参考文献:

- [1] 蔡国飙,徐大军.高超声速飞行器技术[M].北京:科
 学出版社,2012.
- [2] 仲峰泉,范学军,俞 刚.带主动冷却的超声速燃烧室 传热分析[J].推进技术,2009,30(5):513-532.
 (ZHONG Feng-quan, FAN Xue-jun, YU Gang. Heat Transfer Analysis for Actively Cooled Supersonic Combustor [J]. Journal of Propulsion Technology, 2009, 30 (5):513-532.)
- [3] Tsujikawa Y, Northam G B. Effects of Hydrogen Active Cooling on Scramjet Engine Performance[J]. International Journal of Hydrogen Energy, 1996, 21(4): 299-304.
- [4] 牛 禄,程惠尔. 层板推力室再生冷却通道的传热特性分析[J]. 推进技术,2001,22(4):290-294. (NIULu, CHENG Hui-er. Analysis of Heat Transfer for Regenerative Cooling Channels of Platelet Thrust Chamber [J].

Journal of Propulsion Technology, 2001, 22(4): 290-294.)

- [5] Knab O, Fr hlich A, Wennerberg D, et al. Advanced Cooling Circuit Layout for the VINCI Expander Cycle Thrust Chamber [R]. AIAA 2002-4005.
- [6] Dufour E, Bouchez M. Semi-Empirical and CFD Analysis of Actively Cooled Dual- Mode Ramjets [R]. AIAA 2002-5126.
- [7] 李军伟,刘 宇. 三维数值模拟再生冷却喷管的换热
 [J]. 推进技术,2005,26(2):111-115. (LI Jun-wei, LIU Yu. Three Dimension Numerical Simulation of Heat Transfer in Regeneratively Cooled Nozzle [J]. Journal of Propulsion Technology, 2005, 26(2):111-115.)
- [8] Wang T S, Luong V. Numerical Analysis of the Hot-Gas-Side and Coolant Side Heat Transfer for Liquid Rocket Engine Combustion [R]. AIAA 92-3151.
- [9] Naraghi M H. A Computer Code for Three Dimensional Rocket Thermal Evaluation, User Manual for RTE2002 Version [R]. USA; Tara Technologies, 2002.
- [10] 姚振汉,王海涛. 边界元法[M]. 北京:高等教育出版 社,2010.
- [11] Gao X W. A Meshless BEM for Isotropic Heat Conduction Problems with Heat Generation and Spatially Varying Conductivity [J]. International Journal of Numeric Method in Engineering, 2006, 66(9): 1411-1431.
- [12] Gao X W. The Radial Integration Method for Evaluation of Domain Integrals with Boundary-Only Discrimination
 [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2002, 26(10): 905-916.
- [13] Gao X W. A Boundary Element Method Without Internal Cells for Two-Dimensional and Three-Dimensional Elastoplastic Problems [J]. Journal of Applied Mechanics, 2002, 69(2): 154-160.
- [14] White F M. Viscous Fluid Flow (Second Edition) [M]. Boston:McGraw-Hill, 1991.
- [15] Gao X W. Evaluation of Regular and Singular Domain Integrals with Boundary-Only Discetization-Theory and Fortran Code [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2005, 24175(2): 265-290.
- [16] 高效伟,杨 恺. 功能梯度材料结构的热应力边界元 分析[J]. 力学学报, 2011, 43(1): 136-143.

(编辑:史亚红)