

# 一种实时测量微推力瞬时值的方法<sup>\*</sup>

王 宇<sup>1,2</sup>, 尤 政<sup>2</sup>, 洪延姬<sup>1</sup>

(1. 装备指挥技术学院 基础部, 北京 101416 2. 清华大学 精密仪器与机械学系, 北京 100084)

**摘 要:** 微推进器是微型航天器的重要功能器件。实时测量微推进器不同时刻推力的瞬时值对研究微推进器的工作机理很有帮助; 对于工作在低频多脉冲条件下的推进器, 通过实时测量微推力的瞬时值, 也可以获得多脉冲微推力的信息。提出了一种瞬态微推力的实时测量方法。初步仿真计算结果表明, 此方法具有很好的跟踪特性, 计算精度较高, 可用于低频多脉冲微推力以及连续微推力实时测量。

**关键词:** 微推力; 实时; 瞬时; 测量

中图分类号: TN249 V439 文献标识码: A 文章编号: 1001-4055 (2010) 03-0381-04

## A method of real time measurement for transient microthrust

WANG Yu<sup>1,2</sup>, YOU Zheng<sup>2</sup>, HONG Yan-ji<sup>1</sup>

(1. Dept. of Basic Theories, Inst. of Equipment Command and Technology, Beijing 101416, China

2. Dept. of Precision Instruments and Mechanology, Tsinghua Univ., Beijing 100084, China)

**Abstract** Microthrustor is an important functional component for microspacecrafts. In order to understand the principles of different microthrustors, real time transient microthrust measurement method is helpful. It can also be used to measure low frequency multiple pulsed microthrust. A method of transient microthrust measuring is proposed. The preliminary simulation results show that this method, with good tracking characteristics and high calculation accuracy, can satisfy the need of transient microthrust measurement for low-frequency multipulsed microthrusts and continuous microthrust.

**Key words** Microthrust; Real time; Transient; Measurement

## 1 引 言

伴随着微小卫星等微型航天器的发展, 微推进器作为微型航天器的姿态控制、编队飞行、轨道保持等功能实现的重要功能部件, 成为研究的热点。不同类型的微推进器产生微推力的机理不尽相同。为了研究微推力的产生机理, 有必要实时进行微推力瞬时值的测量; 此外, 对于可持续输出微推力的推力器, 需评估其推力的输出稳定性及输出推力的大小。可见, 微推力瞬时值的实时测量具有较高的应用价值。

脉冲推力的测量研究大都是短脉宽、单脉冲的冲量测量, 可由测力平台的最大振幅获得 ( $k$  为常量)<sup>[1,2]</sup>

$$I = kQ_{\max} \quad (1)$$

针对瞬态推力测量, 目前只有美国南加州大学的

D'Souza等人进行了研究<sup>[3]</sup>, 但是相关报道并未涉及算法的具体实现, 并且计算使用了角度、角速度、角加速度信号。本文针对这一问题, 进行了一定的分析, 提出了一种仅使用角度和角速度的迭代算法, 避开了角加速度所引入的二阶微分环节, 并且进行了仿真验证。

## 2 微推力测量系统的模型

目前大部分的测力系统大都为扭摆<sup>[1~5]</sup>或者单摆构造<sup>[6,7]</sup>。扭摆式测量系统采用可扭转的轴线结构, 推进器产生的推力使得轴发生扭转, 通过测量扭转角度来获取推力特性; 单摆式测量系统大都将微推进器固定在单摆的摆锤上, 摆在脉冲推力下做小幅振动, 通过测量摆的振动特性来获取推力的冲量等信息。这些系统都是典型的质量-弹簧-阻尼二阶系

\* 收稿日期: 2009-06-05 修订日期: 2010-04-06

基金项目: 国家“九七三”项目 (61328)。

作者简介: 王 宇 (1984-), 男, 博士生, 助教, 研究领域为微推进技术。E-mail: yw02@mails.tsinghua.edu.cn

统。数学模型为

$$J\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = M = Fd \quad (2)$$

不失一般性,在此采用扭摆系统进行分析。式(2)中  $\theta$  为扭摆系统的扭转角,  $c$  为阻尼系数,  $J$  为扭摆系统的转动惯量,  $k$  为扭转弹性系数,  $M$  为扭摆受到的外力矩,  $F$  为外力,  $d$  为力臂。由于力的作用点固定,所以  $M \propto F$ , 因此,只要求得推力矩,即可获得推力的大小。

也可引入扭摆系统参数: 阻尼比  $\zeta$  无阻尼固有振动频率  $\omega_n$ , 有阻尼固有振动频率  $\omega_d$ , 扭摆系统有阻尼振动方程,也可表示为

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = M/J \quad (3)$$

### 3 瞬时微推力的测量

瞬时测量就是获取外部推力的实时数据,最理想的实现方法就是根据模型(2),只要能够确定推力测量系统的角度,进而微分获得角速度、角加速度,就可以求得获取外部力(矩)的大小。

在实际应用中,测量的采样、数据的处理并非连续,此外还要考虑测量误差以及噪声的影响,直接利用角度的测量数据进行两次微分求得角加速度存在一定难度,在实际应用中应当尽量避免二阶微分(差分)运算的出现。

可以应用欠阻尼系统对于非周期激励的响应来建模。微推力瞬时值的实时测量过程中,外力的作用时间未知、力随时间变化的波形也未知,所以需要求得在任意外力作用下测量系统的输出与推力之间的关系。

可以使用杜哈梅积分法进行求解,如图1所示,先将时间分成无数无限小的时间间隔,每个时间间隔记为  $d\tau$  在每个时间段 ( $\tau, \tau + d\tau$ ) 内,系统受到力矩  $M(\tau)d\tau$  的作用。按照动量矩定理,摆必定获得速度增量

$$d\dot{\theta} = M(\tau)d\tau/J \quad (4)$$

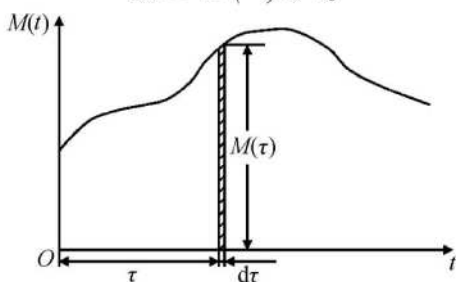


Fig. 1 Transient moment analysis

由于  $d\tau$  为无限小量,可将时间段 ( $\tau, \tau + d\tau$ ) 内的外力矩作用视为脉冲作用,系统的响应为脉冲响应。根据二阶系统对于单位脉冲的响应,可以得到每个幅值为  $M(\tau)$  的脉冲引起摆的响应分量为

$$d\theta = \frac{M(\tau)}{J\omega_d} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau \quad (t > \tau) \quad (5)$$

系统在整个外部激励的作用下的响应就是摆对每个时间段 ( $\tau, \tau + d\tau$ ) 内脉冲响应的叠加

$$\theta(t) = \frac{1}{J\omega_d} \int_0^t M(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau \quad (6)$$

摆的初始转动角度为  $\theta_0$ , 初始角速度为  $\dot{\theta}_0$ , 根据振动理论,系统响应为

$$\theta(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \theta_0 \cos\omega_d t + \frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n \theta_0}{\omega_d} \sin\omega_d t \right] + \frac{1}{J\omega_d} \int_0^t M(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau \quad (7)$$

一般的,可以通过测量设备直接获得角度值。假设相邻两次采样时间间隔为  $\Delta t$ , 相邻角度信号的采样时间分别为  $n\Delta t, (n+1)\Delta t$ , 如果采样频率较高,外部激励信号一阶连续,则可近似认为外力矩在时间  $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$  内大小不变,恒等于  $M_n$ 。假设在  $n\Delta t$  时刻摆的转动角度为  $\theta_n$ , 角速度为  $\dot{\theta}_n$ , 根据式(7),在下次采样的  $(n+1)\Delta t$  时刻有

$$\theta(n+1)\Delta t = e^{-\zeta\omega_n \Delta t} \left[ \theta_n \cos\omega_d \Delta t + \frac{\dot{\theta}_n + \zeta\omega_n \theta_n}{\omega_d} \sin\omega_d \Delta t \right] + \frac{1}{J\omega_d} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} M(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau \quad (8)$$

最终得到

$$\theta(n\Delta t + \Delta t) = \frac{M_n}{k} + e^{-\zeta\omega_n \Delta t} \left[ \theta_n - \frac{M_n}{k} \right] \cos\omega_d \Delta t + \left[ \frac{\dot{\theta}_n k + \zeta\omega_n k \theta_n - \zeta\omega_n M_n}{k\omega_d} \right] \sin\omega_d \Delta t \quad (9)$$

通过公式(9),就可以利用系统在  $n\Delta t$  时刻的角速度以及  $(n+1)\Delta t$  时刻的角度求解得到在时间段  $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$  内,外部力矩的平均值。如果采样间隔  $\Delta t$  很短,这个平均值就可以近似看做外部力矩的瞬时值,通过力矩值就可以求得推力大小。

实时外力(矩)的计算需要角速度信息。角速度信息的提取有两种途径: 式(6)进行微分获得角速度信息,或者对角度信息进行一次差分获得。这样,就得到了两种外部推力产生的力矩瞬时值的递推公式

$$\begin{cases} M_n = \frac{k\omega_d \theta_{(n\Delta t + \Delta t)} - e^{-\zeta\omega_n \Delta t} [\theta_{n\Delta t} k \sin\omega_d \Delta t + \dot{\theta}_{n\Delta t} \frac{\zeta\omega_n k \sin\omega_d \Delta t + k\omega_d \cos\omega_d \Delta t}{\omega_d - e^{-\zeta\omega_n \Delta t} \omega_d \cos\omega_d \Delta t - e^{-\zeta\omega_n \Delta t} \zeta\omega_n \sin\omega_d \Delta t}]}{\omega_d - e^{-\zeta\omega_n \Delta t} \omega_d \cos\omega_d \Delta t - e^{-\zeta\omega_n \Delta t} \zeta\omega_n \sin\omega_d \Delta t} \\ \dot{\theta}_{(n\Delta t + \Delta t)} = e^{-\zeta\omega_n \Delta t} \left[ \dot{\theta}_{n\Delta t} \cos\omega_d \Delta t - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin\omega_d \Delta t \right] + \frac{M_n}{J\omega_d} \sin\omega_d \Delta t - \frac{k\theta_{n\Delta t}}{J\omega_d} \sin\omega_d \Delta t \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} M_n = \frac{k\omega_d \theta_{(n\Delta t + \Delta t)} - e^{-\zeta\omega_n \Delta t} [\theta_{n\Delta t} k \sin\omega_d \Delta t + \dot{\theta}_{n\Delta t} \frac{\zeta\omega_n k \sin\omega_d \Delta t + k\omega_d \cos\omega_d \Delta t}{\omega_d - e^{-\zeta\omega_n \Delta t} \omega_d \cos\omega_d \Delta t - e^{-\zeta\omega_n \Delta t} \zeta\omega_n \sin\omega_d \Delta t}]}{\omega_d - e^{-\zeta\omega_n \Delta t} \omega_d \cos\omega_d \Delta t - e^{-\zeta\omega_n \Delta t} \zeta\omega_n \sin\omega_d \Delta t} \\ \dot{\theta}_{(n\Delta t + \Delta t)} = \frac{\theta_{(n\Delta t + \Delta t)} - \theta_{(n\Delta t)}}{\Delta t} \end{cases} \quad (11)$$

式中的角速度和外力矩都是通过迭代计算获得的, 角度信号则通过测量获得。在一般测量条件下, 式 (10)、式 (11) 迭代的初始角度  $\theta_0$ , 角速度  $\dot{\theta}_0$  均为 0。根据迭代公式 (10) 或式 (11) 即可实时计算得出外力矩大小与角速度大小, 进而求得瞬态外力大小。

下面需要对两种迭代方法进行筛选, 筛选的依据为计算方法的跟踪特性。两种迭代方法中, 式 (11) 的角速度求解用到了一次直接差分; 而式 (10) 则通过力矩值间接计算得到角速度, 由于力矩值为外推得到, 本身存在一定的误差, 故在摆的运动速度存在较大变化时, 如推力瞬时加载等, 式 (11) 计算得到的角速度跟踪特性可能会更好, 相关计算结果见下文。

## 4 仿真计算

### 4.1 计算条件

现有一个扭摆系统, 阻尼比  $\zeta = 0.707$ , 有阻尼振

动周期  $T_d = 0.1 \text{ s}$ , 系统固有周期  $T = 70.7 \text{ ms}$ , 转动惯量  $J = 0.02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

外部推力矩采用正弦信号, 幅值  $A$  为  $100 \mu\text{N} \cdot \text{m}$ , 力矩信号

$$y = 10^{-4} \sin \omega t \quad (12)$$

初始条件下, 扭摆的转角及角速度均为 0。根据扭摆系统的二阶模型, 可得到扭摆系统在正弦脉冲推力作用下不同时刻的角度输出值。在仿真过程中, 假设测量得到的角度没有误差, 即采用不同时刻的扭摆转角值递推求得实时的力矩信号。角度采样频率为  $10 \text{ kHz}$ 。

### 4.2 计算结果及分析

图 2 是两种不同频率的力矩作用下, 分别用式 (10) 及式 (11) 计算得到的外力矩同真实力矩的关系, 图 3 是对应的计算误差。

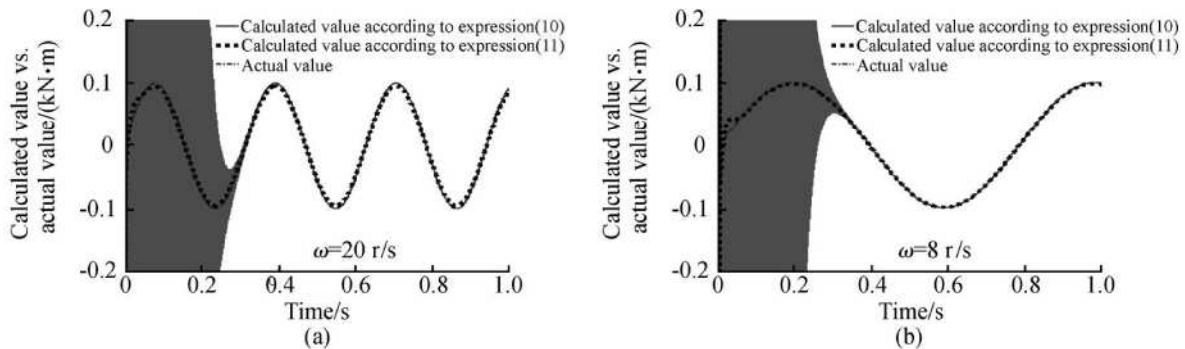


Fig. 2 Calculated value and actual value of transient moment

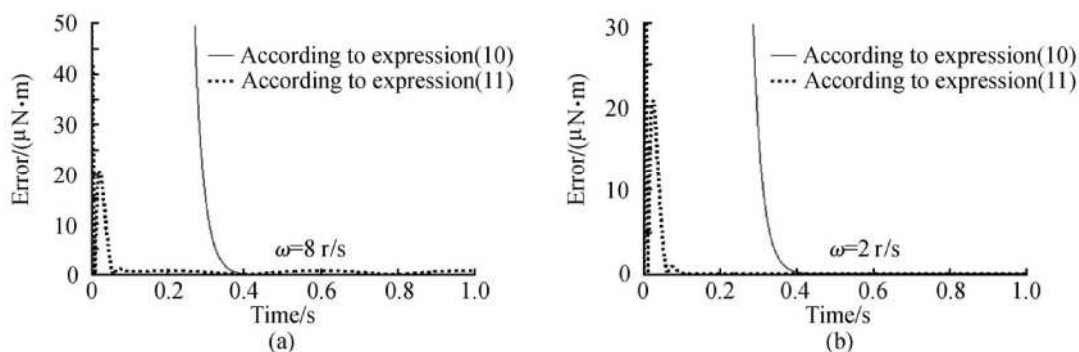


Fig. 3 Error of transient moment calculation

由结果可得出以下结论:

(1)式(10)、式(11)计算的跟踪特性存在差别。在外力矩刚刚开始施加的时候,式(10)计算的跟踪速度非常慢,且误差极大,输入信号 $\omega = 8 \text{ r/s}$ 的情况下,其最大计算结果为 $4 \text{ N} \cdot \text{m}$ ,经过约 $0.4 \text{ s}$ 其计算结果才同实际值相近;而式(11)计算的跟踪速度较快,输入信号 $\omega = 8 \text{ r/s}$ 的情况下,经过3个数据点( $0.3 \text{ ms}$ ),其计算值即从 $2 \text{ N} \cdot \text{m}$ 降至与输入信号同量级,经过约 $0.05 \text{ s}$ 其计算结果同真实外力矩的误差即可稳定在 $1 \mu \text{ N} \cdot \text{m}$ 左右,为输入幅值的 $1\%$ 。 $\omega = 20 \text{ r/s}$ 的计算结果也得到了同样的结论。可见,式(11)收敛特性明显优于式(10)。

(2)在经过一段时间后,式(10)、式(11)都可以达到较高的计算精度(误差小于信号幅值的 $1\%$ )。 $\omega = 8 \text{ r/s}$ 的情况下,式(10)的稳态计算误差为 $0.04 \mu \text{ N} \cdot \text{m}$ ,式(11)的稳态计算误差为 $0.8 \mu \text{ N} \cdot \text{m}$ ;  $\omega = 20 \text{ r/s}$ 的情况下,式(10)的稳态计算误差为 $0.1 \mu \text{ N} \cdot \text{m}$ ,式(11)的稳态计算误差为 $5 \mu \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

(3)由于实际应用中,被测推力(矩)的变化并不规律且变化趋势未知,因此推力瞬时值的测量方法,最主要的是具有较好的跟踪特性。根据计算分析的结果,式(11)表述的方法跟踪特性较好,适用于微推力的瞬时值测量。

(4)计算结果还表明,算法的误差主要由速度计算以及采样时间不连续引起。因此,在推力变化较快的情况下,如推力刚作用时,以及被测推力特征频率较高的时候,算法精度会有所下降。相应地,如果提高采样频率也可以提高计算精度,这部分内容不再展开论述。

根据仿真结果可知,利用角度微分的方法可以很好的实时还原待测力矩,进而得到推力信息,如公式(11)所示。仿真还表明,当推力信号变化剧烈时,角速度计算误差增大,导致计算误差较大。

## 5 结 论

通过求解杜哈梅积分以及求解角速度,可应用于二阶微推力平台的实时测量微推力瞬时值的测量,通

过分析得到以下结论:

(1)根据角度差分求取角速度、根据求解杜哈梅积分获得瞬态推力矩,二者不断迭代,可以不断获得瞬态推力矩、进而获得瞬态推力的大小,这种方法具有较高的精度以及良好的跟踪特性。

(2)算法的误差主要由速度计算以及采样时间不连续引起。这种方法在系统受力变化较快的阶段,相对误差较大。减小误差的手段有很多,可以提高角度测量的采样频率。

(3)这种推力计算方法的精度取决于采样频率以及被测推力的特征频率,适用于低频多脉冲推力实时测量和连续推力实时测量。

## 参考文献:

- [1] Haag T W. Thrust stand for pulsed plasma thrusters[J]. *Review of Scientific Instruments*, 1997, 68(5): 2060~2067.
- [2] Cubbin E A, Ziemer J K, Choueiri E Y, et al. Pulsed thrust measurements using laser interferometry[J]. *Review of Scientific Instruments*, 1997, 68(6): 2339~2346.
- [3] D'Souza Brian C, Ketsdever Andrew D. Investigation of time-dependent forces on a nano-Newton-second impulse balance[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2005, 76(1), 015105.
- [4] Merkowitz S M, Maghami P G, Shama A, et al. A  $\mu\text{Newton}$  thrust stand for LISA[J]. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 2869~2872.
- [5] Phinns Claude, Luke James. Diode laser-driven microthrusters: a new departure for micropropulsion[J]. *AAA Journal*, 2002, 40(2): 310~318.
- [6] Orioux S, Rossi C, et al. Thrust stand for ground tests of solid propellant microthrusters[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2002, 73(7): 2694~2698.
- [7] Edamitsu Toshiaki, Tahara Hirokazu. Experimental and numerical study of an electrothermal pulsed plasma thruster for small satellites[J]. *Vacuum*, 2006, 80(11-12): 1223~1228.

(编辑:朱立影)