

自适应搜索域遗传算法及其在发动机模型中的应用*

陈永琴¹, 苏三买²

(1. 西安电子科技大学 机电工程学院, 陕西 西安 710071; 2. 西北工业大学 动力与能源学院, 陕西 西安 710072)

摘 要: 针对发动机数学模型中非线性方程插值解法的不足, 提出非线性方程自适应搜索域遗传算法解法。论文详细分析了方程求解转化为遗传算法优化的数学描述、依据方程解邻域特征的自适应搜索域机理及算法的具体实现技术。实例计算与发动机仿真结果说明: 所设计的变搜索域遗传算法可作为通用的非线性方程解法, 相较于简单遗传算法, 能成倍提高计算效率; 替代插值解法应用于发动机模型, 可有效提高模型的收敛性。

关键词: 非线性方程⁺; 遗传算法⁺; 航空发动机; 数学模型

中图分类号: V235.13 文献标识码: A 文章编号: 1001-4055 (2007) 04-0428-05

Adaptive variable search scope genetic algorithm and its application in aeroengine mathematical model

CHEN Yong-qin¹, SU San-mai²

(1. School of Electronic Mechanical Engineering, Xi'an Univ., Xi'an 710071, China)

2. Coll. of Power and Energy, Northwestem Polytechnical Univ., Xi'an 710072, China)

Abstract Aeroengine nonlinear mathematical model includes a group of similar nonlinear equation. Interpolation method now in use is not always effective due to initial value selection. In this paper, adaptive variable search scope genetic algorithm (AVSSGA) is put forward to solve nonlinear equation. Algorithm model which converts nonlinear equation solution to genetic algorithm optimization and adaptive variable search scope method according as the solution neighborhood features of equation are analysed in detail. Real examples show that AVSSGA is a common solution for nonlinear equation, compared with simple genetic algorithm (SGA). It can double computing efficiency. When replaced interpolation method in aeroengine mathematical model with this algorithm, it can improve model convergence.

Key words Nonlinear equation⁺; Genetic algorithm⁺; Aeroengine Mathematical model

1 引 言

在发动机稳态和动态性能仿真时, 存在大量非线性方程计算^[1]。在现有发动机非线性数学模型中, 通常采用插值解法, 由于该算法对初值选取敏感、迭代过程采用三点确定的二次曲线不一定能真实反映原方程的轨迹, 使得方程求解过程有时发散。另外该算法不可能求出方程全部解, 从而影响发动机数学模型的全局收敛性^[2, 3]。

针对发动机数学模型中双函数构成的非线性方程^[2], 笔者提出自适应搜索域遗传算法 (Adaptive

Variable Search Scope Genetic Algorithm, AVSSGA) 进行求解。论文首先给出非线性方程遗传算法求解的数学描述, 然后分析自适应搜索域的机理、算法具体实现以及对方程多解问题的处理。

最后以通用方程求解为例, 分析该算法优点, 并研究算法在航空发动机数学模型中的具体应用。

2 非线性方程遗传算法求解

2.1 数学描述

发动机数学模型中, 非线性方程的通用数学描述^[2]如下

* 收稿日期: 2006-08-28 修订日期: 2006-10-20

基金项目: 航空推进技术验证计划项目资助 (APTD-0901-13)。

作者简介: 陈永琴 (1971-), 女, 硕士, 研究领域为智能优化。Email: 8495472@sina.com

求变量 x , 使下列非线性函数 f_1, f_2 的函数值 g, h 相等。

$$g(x) = f_1(x) \quad (1)$$

$$h(x) = f_2(x, f_1(x)) \quad (2)$$

对于上述问题, 其实质相当于求解以下非线性隐式方程的解。

$$y(x) = g(x) - h(x) = 0 \quad (3)$$

采用遗传算法求解, 需要把方程求解问题转化为遗传算法函数优化问题。

对于由式 (1) ~ (3) 确定的非线性方程, 求解问题可转化为如下函数极小值优化问题。

$$\text{目标函数: } \min F(x) = \min |y(x)| \quad (4)$$

$$\text{收敛条件: } F(x) \leq \varepsilon \quad (5)$$

显然 $F(x) \geq 0$ $F(x)$ 取极小值时的 x 便是方程的解, 且一般的非线性方程是由 (1) 和 (2) 双函数描述的隐式方程在 $h(x) = 0$ 下的特例。

2.2 遗传算法变搜索域的优点

遗传算法对函数形式和初值无要求, 具有运算隐含并行, 以概率 1 收敛于全局最优解的优点, 但计算效率低, 如采用二进制编码, 设变量 $x \in [a, b]$, 编码长度 l 个体分辨率 ξ 依据文献 [4] 有

$$\xi = \frac{b-a}{2^l - 1} \quad (6)$$

编码长度反映了遗传算法的搜索空间, 个体分辨率保持一定, 变量范围越宽, 编码长度越长。编码每增加一位, 搜索空间扩大一倍, 当编码位数按线性增加时, 搜索空间则按 2^l 级数增长, 算法的计算效率将随编码长度增加而急剧下降。因此, 计算精度与计算效率是一对矛盾。这也是目前制约遗传算法可普遍用于工程实际的主要原因。

分析式 (6), 当个体的分辨率一定时, 可通过缩小变量变化范围来减小搜索空间。事实上, 在所有改善遗传算法计算效率的方法中, 缩小变量搜索域是最直接、显著的方法。然而, 变量范围能缩小的前提是必须保证缩小后的范围包含问题的最优解, 但迄今为止, 从理论上还不能证明并获得通用的变量区域缩小方法。实际应用中多为根据所研究的具体问题, 给出估计缩小区域, 既缺乏理论依据, 又不能保证最优解就在估计区域。如文献 [5] 取各代中个体对应的 $[x_{\min}, x_{\max}]$ 为新的搜索区域, 为防止最优解落到区间外, 引入区间放大系数 k , 但 k 为经验取值; 文献 [6] 提出狭义遗传算法, 虽然具有全局收敛性, 但对任意给定函数 $f(x)$ 必须首先给出符合条件的区域划分。

由上述分析, 遗传算法缩小搜索域可提高计算效率, 应用中关键是需要确定可缩小搜索域的理论方法。

2.3 求解非线性方程时遗传算法可变搜索域的理论依据与方法

对于任意形式的线性方程或非线性方程, 无论表达式如何 (显式、隐式或多函数共同组成), 其自变量只有一个, 并且在每个自变量下, 均有一个函数值与之对应。不失一般性, 设:

$$\text{方程 } f(x) = 0 \quad (7)$$

$$\text{对应函数 } y = f(x) \quad (8)$$

函数 $f(x)$ 在方程解 x_0 邻域的曲线形状只可能为如图 1(a, b) 和图 2(a, b) 所示四种形式之一。

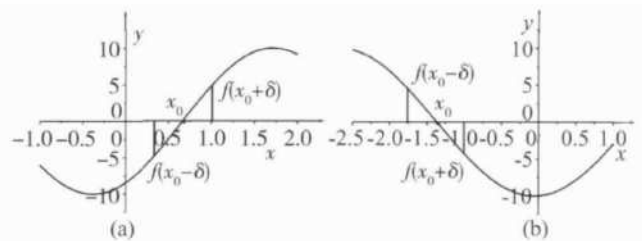


Fig 1 Case 1 of equation solution neighborhood curve

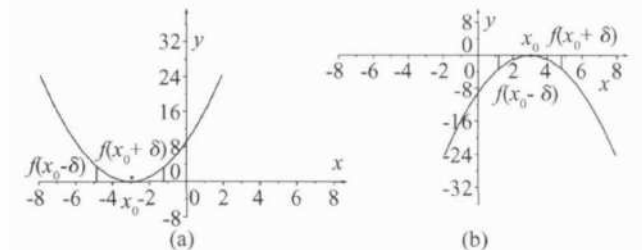


Fig 2 Case 2 of equation solution neighborhood curve

如果 x_0 为方程的根, 则存在 x_0 的 δ 邻域 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, 必然满足两种情况之一

$$\text{情况一: } f(x_0 - \delta) \cdot f(x_0 + \delta) < 0$$

(如图 1(a), (b) 所示)

$$\text{情况二: } f(x_0 - \delta) \cdot f(x_0 + \delta) > 0$$

(如图 2(a), (b) 所示)

对于所述两种情况, 总有下列定理成立:

定理一: 如果 $x_i, x_j \in [a, b]$, $x_i < x_j$, 且满足 $f(x_i) \cdot f(x_j) < 0$ 则在 $[a, b]$ 的子域 $[x_i, x_j]$ 内, 方程至少存在一个解 (如图 3)。

定理二: 如果在定义域 $[a, b]$, 方程有 n 个解 $x_0 \sim x_{n-1}$, 则各解的范围可缩小至 $[x_k - \delta, x_k + \delta]$, 其中 $k = 1 \sim n-1$, δ 为任意小的正数。

定理三: 如果在定义域 $[a, b]$ 方程有解, 且满足 $f(x_i) \cdot f(x_j) > 0$ (图 2(a), (b)), 则将原函数在 y 轴

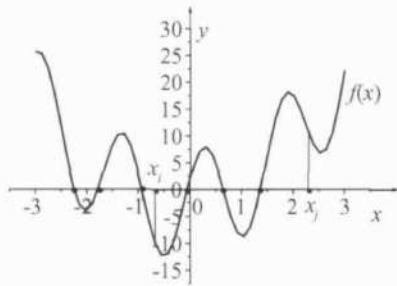


Fig 3 Solutions between $[x_i, x_j]$ when $f(x_i) \cdot f(x_j) < 0$

方向平移 c 后构造如图 4 (a), (b) 新函数 $f_g(x) = f(x) + c$ ($f(x_i) > 0$ c 取负常数; $f(x_i) < 0$ c 取正常数), 则函数 $f_g(x)$ 为上述情况一。

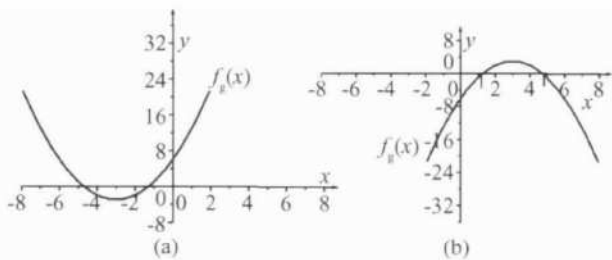


Fig 4 Through displacement convert case 2 to case 1

定理一、三不仅为遗传算法求解非线性方程时可变搜索域提供了理论依据, 而且指明了变量范围缩小的方法。定理二说明如果缩小的变量范围存在的话, 那么这一范围可按任意精度接近方程的解, 并且对于多解方程, 各个解可以限定在一个独立的变化区域。

依据定理一, 如果当前代个体中包含函数值异号的个体, 那么函数值最靠近零的正负个体对应的变量区间可以作为下一代进化的新搜索区域。

依据定理二, 遗传算法可选择适中的编码长度, 并在整个进化过程保持不变。在进化前期, 个体分辨率小于变量要求的精度, 进化重心在于使搜索区域迅速缩小; 在进化后期, 个体分辨率逐渐大于变量要求的精度, 进化重心为在小范围内搜索方程的解。

依据定理三, 在某一自变量区域, 如果所有个体经过多代进化后, 对应函数值均为同号, 则将个体函数值全部加一常数 c (一般取 $c = \min f(x)$), 转为情况一。根据定理一、二确定出包含原方程解且缩小的搜索域 (图 4 (a), (b) 中曲线与横轴的交点), 然后在新区域中, 求取原方程的解。

由于群体在整体上向最优方向发展, 每一代新产生的搜索区域 $[x_i, x_j]$ 将逐渐缩小, 另一方面, 遗传算法每一代的个体是随机生成的, 求解方程时所形成的搜索区域 $[x_i, x_j]$ 不可能完全相同, 但新产生的搜索

区域具有高度的适应性, 无论从哪一点开始进化, 缩小的区域将自动向包含方程解的点逼近, 而且无论缩小后的区域有何不同, 在该区域内总能保证方程有解存在。这也是本文称为自适应搜索域的原因。

2.4 自适应搜索域遗传算法求解非线性方程的具体实现

参考文献 [3], 针对式 (4) 目标函数, 设计遗传算法适应度函数和收敛准则如下:

适应度函数:

$$U(x) = F_{\max} - F(x) + k(F_{\max} - F_{\min}) \quad (9)$$

$$\text{式中 } k = \frac{1}{N-1}$$

采用二进制编码, 轮盘选择、简单交叉、均匀变异进化策略, 融合上述变量范围缩小的处理方法, 以式 (5) 为收敛准则, 设计求解非线性方程自适应搜索域遗传算法程序流程如图 5。

2.5 方程存在多个解的处理方法

定理一与图 4 说明, 满足 $f(x_i) \cdot f(x_j) < 0$ 的区域 $[x_i, x_j]$ 肯定包含方程的解, 但包含几个以及具体是哪几个无法确定。按流程图 5 程序求解方程, 每次计算只能获得多解方程的一个解, 而且收敛到哪个解无法人为控制。本文采用如下“分区域求解”的方法来处理方程多解问题。

设方程 (3) 在定义域 $[a, b]$ 有 n 个解 $x_0 \sim x_{n-1}$, 当第一次求得方程的解为 x_i 时, 那么剩余的解可以划分到下面两个子区域 (其中 δ 为一给定正数)。

包含解 $x_0 \sim x_{i-1}$ 的子域 $[a, x_i - \delta]$;

包含解 $x_{i+1} \sim x_{n-1}$ 的子域 $[x_i + \delta, b]$;

以 $[a, x_i - \delta]$, $[x_i + \delta, b]$ 为初始定义域, 再次分别调用程序求解, 假设在两个子区域分别获得解 x_j, x_k , 采用如上分区域方法, 可获得包含剩余解的四个子区, 依此可求出方程全部解。

3 计算实例与结论

3.1 计算效率比较

以如下普通非线性方程为例 (曲线如图 6),

$$(x-1)^2 \sin^2 x + (x+1)^3 \cos^3 x + 5(x-1) - 1 = 0$$

$$-5 < x < 5$$

分别采用简单遗传算法 (SGA) 和自适应搜索域遗传算法求解, 前者编码长度取 20 位, 群体规模取 30, 后者编码长度取 8 位, 群体规模取 10, 其余参数一致。两种方法分别在不同的 ε 下, 求解方程 1000

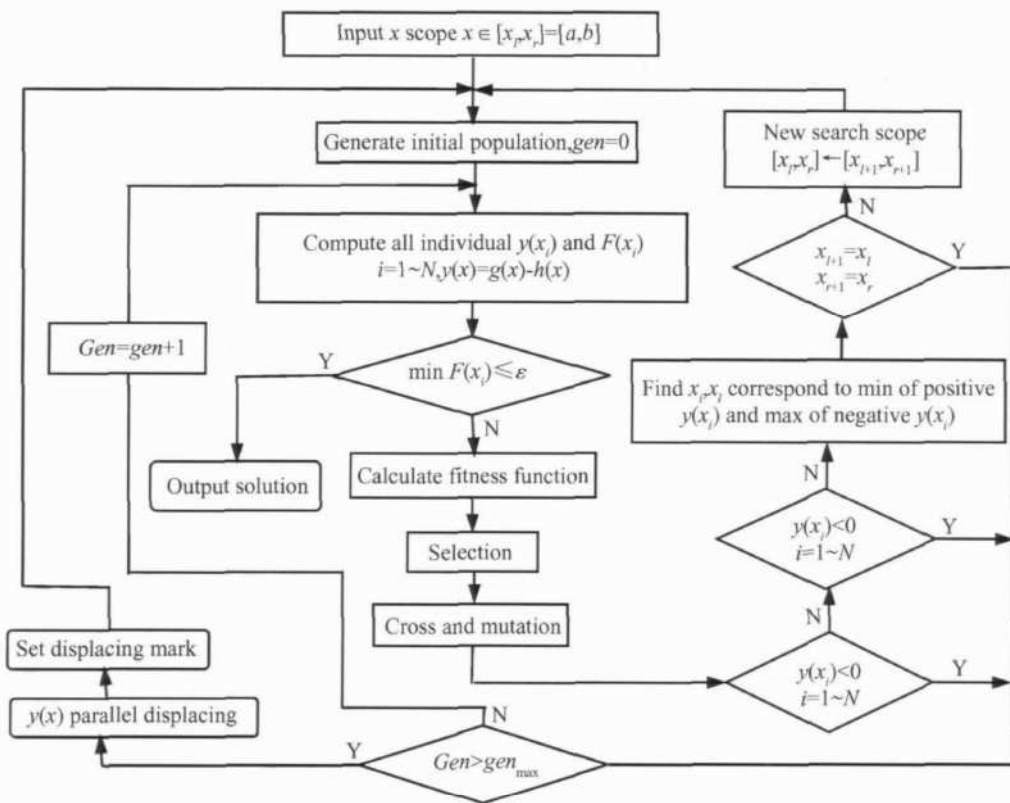


Fig 5 Flow chart of the adaptive variable search scope GA for solving nonlinear equation

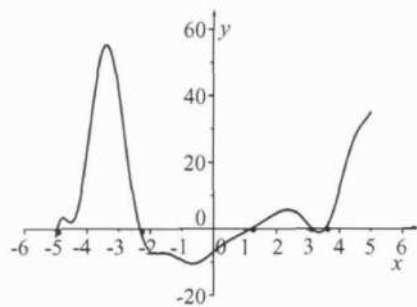


Fig 6 Common nonlinear equation example

次, 并且每次求解都收敛到方程解。两种算法平均调用方程次数的统计结果见表 1。

Table 1 Compare of two GA computing efficiency

$f(x)$ average computing ε	Simple genetic algorithm (SGA)	Adaptive variable search scope GA	Ratio
0.01	183.39	50.08	3.662
0.001	418.35	54.37	7.695
0.005	1352.40	67.15	20.14

3.2 双函数方程的收敛性比较

人为构造如下双函数非线性方程 (图 7)

$$f_1(x) = 2x^2$$
$$f_2(x) = \frac{1}{4}[f_1(x)]^2 - 4x$$

$$y(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0$$

由图知方程并不复杂。在整个实数空间, 共有 $x = 0$ 和 2 两个解。分别采用插值法^[2,3]与自适应搜索域遗传算法对方程进行求解, 其中插值法求解过程的部分记录为: 在 $x = 1.2$ 附近, 初值 $x > 1.241\ 905$ 时, 方程收敛于根 $x = 2$; x 小于该值时, 方程收敛于根 $x = 0$; 在 $x = -5.6$ 附近, 初值 $x > -5.618\ 518\ 1$ 时, 方程收敛于根 $x = 0$; x 小于该值时, 迭代发散。当初值 $x = 1.179\ 509$ 或 $x = 0$ 时, $|f_1(x)| = |f_2(x)|$, 求解过程出现被零除, 迭代失败。当初值 $x \in [5.56 \times 10^{-2}, 9.6956 \times 10^{-2}]$, 曲线形状接近直线, 二次插值的二次项系数接近 0 求解失败。

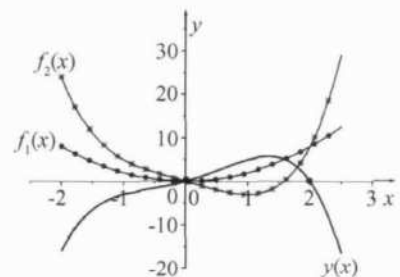


Fig 7 Implicit nonlinear equation example

采用自适应搜索域遗传算法, 编码长度取 8 位、群体规模取 10, 平均进化 5~8 代即可获得方程

的解。

上述计算结果说明: 相比较于简单遗传算法, 采用自适应搜索域遗传算法求解非线性方程能成倍提高算法的计算效率, 且随着方程解精度要求提高, 该方法本身对计算速度影响不大; 但计算效率有较大幅度提高 (如表 1 中, 收敛精度 ε 小于 5×10^{-3} 时, 两种解法的计算效率相差 20.14 倍)。另外, 该算法既可求解一般的非线性方程, 也可以求解双函数构成的非线性方程。

4 在发动机数学模型中的应用

采用非线性数学模型进行发动机动态性能仿真时, 各个部件 (风扇、压气机、轮等) 考虑气容后的出口参数计算; 给定主供油量确定燃烧室出口燃烧室、高压涡轮、低压涡轮温度; 给定加力供油量确定加力燃烧室出口温度; 风扇、压气机与高低压涡轮特性插值时对应参数计算等过程, 可转化为相同类别的隐式非线性方程求解问题。

在文献 [2 3] 中, 笔者分析的发动机数学模型中的非线性方程均为类似本文 3.2 节示例的隐式方程, 采用自适应搜索域遗传算法求解, 关键是如何构造出函数 $f_1(x)$, $f_2(x, f_1(x))$ 和式 (5) 收敛条件。下面以发动机动态仿真时, 气容部件出口参数总温 T 计算为例, 说明其构造方法。

发动机动态过程仿真时, 容积出口焓一方面由气体热力参数计算 (文献 [1] THERMO 子程序) 要满足式 (10) 与温度 T 的函数关系; 另一方面根据非定常流计算要满足式 (11)。整个计算可归结为确定温度 T , 使上述计算获得的出口焓 h_{out} 与 h'_{out} 相等。式 (10) 和 (11) 相当于函数 $f_1(x)$, $f_2(x, f_1(x))$, 其中自变量 x 在此为总温 T 。

$$h'_{out} = f_1(T) = f(T) \quad (10)$$

$$h_{out} = f_2(T, f_1(T)) = M_{in} h_{in} -$$

$$(M_{in} - M_{out})(h_{out} - RT) - \frac{pV}{RT} \cdot \frac{dV}{dt} \frac{1}{M_{out}} \quad (11)$$

由于在发动机仿真计算中, 函数值 h_{out} , h'_{out} 数量级比较大, 考虑到方程解的速度与精度, 一般取如下相对误差形式为收敛准则。

$$err = \left| \frac{f_1(T) - f_2(T, f_1(T))}{f_1(T)} \right| = \left| \frac{h'_{out} - h_{out}}{h'_{out}} \right| \leq \varepsilon \quad (12)$$

经过上述处理, 分别将式 (10), (11) 编写为遗传算法目标函数计算子程序, 并将原插值法子程序 (文献 [1] AFQU R 子程序) 替换为遗传算法子程序即可。

以某型混合排气涡扇发动机加速过程仿真为例, 在高度 10 km, 马赫数 1.0 状态下加速, 当采用原插值法计算加力燃烧室出口温度, 模型程序自动试取初值 708.806 3 K, 连续多次迭代出现无解, 引起模型计算失败, 当采用本文设计的遗传算法求解, 未出现无解现象。

实际上, 大量的仿真计算表明, 该方法能有效克服原模型中插值解法的不足。

5 结 论

针对非线性方程插值解法的不足, 本文将方程求解转换为函数优化问题, 并根据方程解本身的特点, 设计了自适应搜索域遗传算法解法。论文详细分析了算法的数学描述、自适应搜索域机理以及在发动机数学模型中的具体实现。实例计算和发动机仿真说明: 采用变搜索域遗传算法求解能有效克服插值解法因初值选取不合适引起的计算失败的不足, 应用于发动机模型, 可提高模型的收敛性。

参考文献:

- [1] James F Sellers, Carl J Daniele. DYNGEN -A program for calculating steady state and transient performance of turbojet and turbofan engines[R]. NASA TN D-7901, 1975
- [2] 苏三买. 航空发动机数学模型中方程解法与局限性分析[J]. 航空计算技术, 2006 36(6).
- [3] 苏三买. 遗传算法及其在航空发动机非线性数学模型中的应用研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2002
- [4] 云庆夏. 进化计算[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2000
- [5] 汪朝军, 刘艳明. 变搜索域遗传算法及其在铣削加工参数优化中的应用[J]. 中国机械工程, 1998 9
- [6] 郑金华, 蔡自兴. 分区域搜索的狭义遗传算法[J]. 计算机工程与应用, 2000 36(1).

(编辑: 张奕春)