

非线性主轴降维映射法在固体火箭 发动机设计优化中的应用*

欧海英¹, 张为华², 赵经成¹, 付战平¹

(1. 海军航空工程学院青岛分院, 山东 青岛 266041; 2. 国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 为在二维或三维空间中表达固体火箭发动机高维设计空间, 引入非线性主轴降维映射法对多维非线性设计优化问题进行降维处理。以某大型固体火箭发动机设计问题为例, 将 10 变量 4 有效约束优化问题降维映射到二维空间进行研究, 拟合的非线性主轴降维映射模型中, 目标函数和约束函数的相对误差控制在 1.5% 以内。研究表明, 非线性主轴降维映射法具有发现多变量非线性优化数学模型本征特性的特点, 能对设计变量重要性排序; 通过降维展示设计空间全景, 为优化算法和优化初始点优选提供了直观、有力的工具; 优化轨迹实时展示为优化算法性质研究及算法切换提供了依据; 根据优化轨迹从优化结果在降维空间中的位置能够判断优化结果是否具有全局最优解特性。

关键词: 固体火箭发动机; 优化设计; 非线性主轴降维映射法⁺; 设计空间全景展示⁺; 优化轨迹显示⁺

中图分类号: V435.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-4055 (2007) 04-0346-06

Nonlinear principal axis mapping applied in design optimization for solid rocket motor

OU Haiying¹, ZHANG Weihua², ZHAO Jing-cheng¹, FU Zhan-ping¹

(1. Naval Aeronautical Engineering Academy Qingdao Branch, Qingdao 266041, China

2. Inst. of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defence Technology, Changsha 410073, China)

Abstract Nonlinear principal axis mapping (NPAM) method is proposed to express high-dimensional design space in two or three dimensional space. Taking a solid rocket motor as an example, a 10 variables and 4 constraints optimization problem is fitted by two variables in NPAM, and the errors of the objective and constraints are below 1.5%. It can be seen that NPAM discovers the intrinsic structure of the optimization model and ranks design variables according to their importance. NPAM shows panoramic picture of the design space to help designers choose optimization algorithms and design beginning points. Showing the tracks of optimization in real-time is much helpful to study the optimization algorithms character and switch them. It also helps to judge if the optimal solution is global optimal solution according to its position in the design space.

Key words Solid rocket motor; Optimum design; Nonlinear principal axis mapping⁺; Design space panoramic visualization⁺; Track of optimization showing⁺

1 引 言

固体火箭发动机设计优化问题往往是多变量、非线性、多约束的复杂优化问题。对于这样的优化问题, 目标函数是单峰函数还是多峰函数; 设计空间可行域是凸集还是非凸集; 可行域是连通的还是被约束

划分成多个不连通区域; 优化算法获得的最优点位于目标函数峰值点上还是位于约束边界或交点处? 这些问题的探讨对于设计优化问题非常重要, 它们决定了优化初始点的选择、优化算法的选择以及接受或拒绝优化算法获得的最优解。这些问题的答案在设计空间可视化前是难以获得。设计空间可视化被列为

* 收稿日期: 2007-02-05 修订日期: 2007-06-15。

基金项目: 国防预研基金项目资助 (41328010504)。

作者简介: 欧海英 (1978—), 女, 博士, 研究领域为仿真可视化及飞行模拟器。E-mail ouan@126.com

多学科设计优化中关键技术之一^[1]。然而,多维空间可视化是可视化技术研究领域难度很大的方向之一,因为它超出了人们的直观想象,至今没有一种公认有效的方法完整地展示多维数据空间。作者曾以图形变形法^[2,3]和平行坐标法^[4]从交互式显示多维空间切面和数据挖掘的角度对固体火箭发动机优化问题设计空间进行展示和分析,取得了一定效果。本文将从降维分析角度出发,将多维设计空间降维到二维或三维空间进行显示,以获得设计空间全景图。

降维方法^[5,6]是一种在高维情形下,对现实世界中复杂现象进行建模、分析的有力工具。降维处理不仅可获得计算上的优势,还可大大改善数据的可理解性。降维理论、方法已被广泛应用于数据分析和信息可视化领域,Matthews Holden 将 SOM 和 GTM 等降维方法应用于飞行器概念设计和设计优化中,取得了较好的效果^[7,8]。本文首先介绍了非线性主轴降维映射法,通过非线性主轴降维映射法将多维设计空间降维映射到二维或三维空间以获得设计空间全景,并在降维空间中显示优化轨迹和进行优化结果全局最优解特性分析。

2 优化问题和降维方法

2.1 设计优化问题描述

某大型固体火箭发动机设计中,要求发动机总冲达到一定值 I_1 , 外径尺寸一定,并要求发动机总长、比冲、装填系数、质量比、压强比满足给定的技术指标要求。根据导弹总体要求,设计专家选择某种碳纤维为发动机壳体材料,选用丁羟推进剂,前后翼柱型装药,翼片数均为 10 深潜入全轴摆动柔性喷管。以发动机质量最小为目标函数;将发动机燃烧室平均压强、喷管膨胀比、翼柱形装药前翼长、宽、深,后翼长、宽、深,装药通道直径及燃烧室圆筒段长度等影响发动机总体性能的 10 个总体参数作为设计变量,根据发动机性能和尺寸要求给出每个设计变量的取值范围,如燃烧室压强 8~12 MPa 喷管膨胀比 11~14 后翼翼长 690~715 mm,燃烧室圆筒段长度 3 800~3 900 mm 等;提出比冲约束 g_0 、燃面比约束 g_1 、质量比约束 g_2 、装填系数约束 g_3 、喉径尺寸的上下边界约束 g_4 (g_5)、燃烧室总长的上下边界约束 g_6 (g_7) 及总冲约束 g_8 等 9 个约束条件;建立发动机质量模型、比冲预示模型和考虑喷管喉部烧蚀的零维内弹道计算模型。采用遗传算法,设置种群数为 100 迭代代数 1 000 交叉概率和变异概率分别为 0.95 和 0.05 在高性能

微机经过六个多小时优化计算,得到如下优化结果:燃烧室压强为 11.84 MPa 喷管膨胀比为 12.11,后翼翼长 699.4 mm,圆筒段长度为 3 812.8 mm,计算得到发动机总质量 m_0 ,总冲 1.000 3 I_1 。

经分析燃面比约束 g_1 、质量比约束 g_2 、装填系数约束 g_3 、喉径下边界约束 g_4 和燃烧室总长下边界约束 g_6 等五个约束从未被违背^[4],在以下研究中暂不考虑。因此在非线性主轴降维映射中待分析的响应变量有发动机质量 Ob_j 比冲约束 g_0 、喉径上边界约束 g_4 、燃烧室总长上边界约束 g_7 以及总冲约束 g_8 。

2.2 非线性主轴降维映射法

设计优化降维本质为某种形式的数学变换,采用何种变换方式取决于问题性质和降维目的。设计优化降维主要目的是分析设计模型本征特性,在低维空间中展示设计空间全景,获得设计空间整体的拓扑结构和几何结构。

非线性主轴降维映射法^[9]认为优化数学模型中目标函数和约束函数是高维设计空间中具有较低本征维数的光滑数据流形,能够在两个或三个主轴上反映优化模型的主要信息,在一定先验信息基础上,通过主轴的各种非线性函数描述和逼近优化目标函数和约束函数,从而将高维设计空间映射到二维或三维空间进行可视化显示和分析。非线性主轴降维映射法降维映射概念模型如图 1 所示。

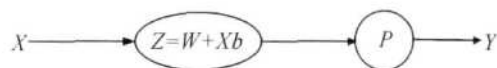


Fig 1 Dimension reduction notion model for nonlinear principal axis mapping

图 1 中, X 为设计变量, 主轴 Z 为设计变量的线性组合, P 为主轴 Z 的非线性函数, Y 为目标函数和约束函数。非线性主轴降维映射法数据处理过程如图 2 所示。

对于优化设计来说, 首先通过试验设计^[10]进行采样, 获得采样容量为 N 的采样点 $\{x_n\}_{n=1}^N$, 通过优化数学模型计算每个采样点处的目标函数值及各约束函数值, 得到输出矩阵 $\{y_n\}_{n=1}^N$ 。根据潜变量模型采样数估计^[11], 对于本征维数为 L 的采样点数为 L 的量级, 若 $L=2$ $\hat{e}^L=7.4$ $L=3$ 时, $\hat{e}^L=20.1$ 。即对于本征维数为 2 或 3 的数据流形, 8 个或 21 个以上采样点就可描述数据流形的基本特征。当然, 在计算量可以接受的情况下, 根据 D 因素 S 水平试验设计表的选择, 较多的采样点可以一定程度上提高函数拟合

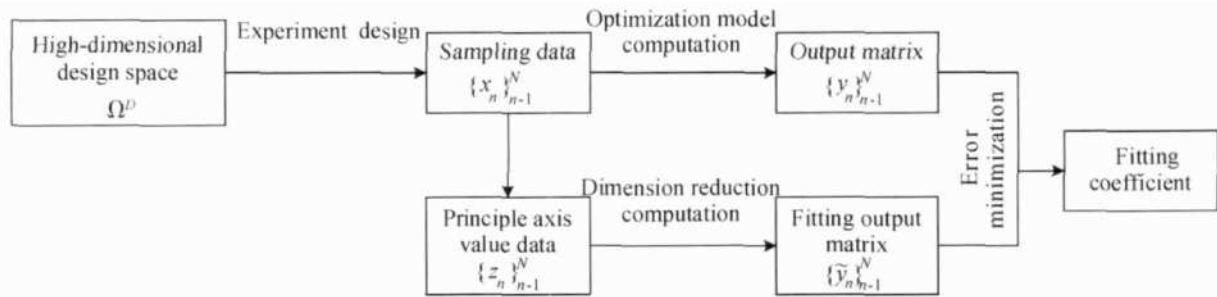


Fig 2 Data disposing process for nonlinear principal axis mapping

精度。主轴系数和非线性函数系数通过解下列非线性无约束优化问题获得

$$\mu_s = \min \left\| \sum_{n=1}^N \|y_n - \hat{y}_n\| \right\|$$

在获得非线性主轴降维映射模型后, 还需通过验证数据集检验模型预估精度。下面以某固体火箭发动机总体参数优化设计为例, 说明非线性主轴降维映射法在固体火箭发动机设计优化中的应用。

3 降维结果及讨论

3.1 非线性主轴降维映射实现及精度检验

假设优化模型中发动机质量 Obj 、比冲约束 g_0 、喉径上边界约束 g_5 、燃烧室总长上边界约束 g_7 及总冲约束 g_8 分别来自 5 个本征维数为 2 的数据流形, 以主轴 z_1, z_2 的二次多项式函数形式进行降维拟和。采用拉丁超立方采样 $L_{64} (4^{10})$ 获得 64 个采样点, 计算每个采样点处 Obj, g_0, g_5, g_7 和 g_8 值, 通过非线性主轴降维映射方法进行降维拟和, 采用遗传算法与 Powell 方法串联协作优化方法计算得到主轴系数矩阵 w, b 和主轴 z_1, z_2 二次多项式函数系数矩阵 v 。

$$w = \begin{bmatrix} w_{x_0, 1} & w_{x_1, 1} & w_{x_2, 1} & w_{x_3, 1} & w_{x_4, 1} & w_{x_5, 1} & w_{x_6, 1} & w_{x_7, 1} & w_{x_8, 1} & w_{x_9, 1} \\ w_{x_0, 2} & w_{x_1, 2} & w_{x_2, 2} & w_{x_3, 2} & w_{x_4, 2} & w_{x_5, 2} & w_{x_6, 2} & w_{x_7, 2} & w_{x_8, 2} & w_{x_9, 2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -0.506 & 0.056 & -0.008 & -0.029 & -0.001 & -0.005 & -0.083 & -0.010 & -0.180 & 1.558 \\ -1.467 & -0.221 & 0.001 & 0.019 & 0.023 & -0.008 & 0.067 & -0.005 & 0.209 & -1.157 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.161 \\ 1.491 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_{g_0, 1} & v_{g_0, 2} & v_{g_0, 3} & v_{g_0, 4} & v_{g_0, 5} & v_{g_0, 6} \\ v_{g_5, 1} & v_{g_5, 2} & v_{g_5, 3} & v_{g_5, 4} & v_{g_5, 5} & v_{g_5, 6} \\ v_{g_7, 1} & v_{g_7, 2} & v_{g_7, 3} & v_{g_7, 4} & v_{g_7, 5} & v_{g_7, 6} \\ v_{g_8, 1} & v_{g_8, 2} & v_{g_8, 3} & v_{g_8, 4} & v_{g_8, 5} & v_{g_8, 6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.323 & 0.464 & -0.043 & -0.048 & 0.031 & -0.038 \\ 0.799 & -0.277 & -0.364 & -0.019 & -0.056 & -0.076 \\ 0.125 & 0.316 & 0.366 & 0.053 & 0.060 & 0.116 \\ 0.268 & 0.439 & -0.156 & 0.050 & -0.021 & 0.044 \\ 0.388 & 0.237 & -0.201 & -0.067 & -0.024 & -0.112 \end{bmatrix}$$

式中 $w_{x_i, 1}, w_{x_i, 2} (i=0, 1, 2, \dots, 9)$ 分别为主轴 z_1, z_2 中设计变量 x_i 的系数。 $v_{y, 1}, v_{y, 2}, v_{y, 3}, v_{y, 4}, v_{y, 5}, v_{y, 6} (y=Obj, g_0, g_5, g_7, g_8)$ 分别为输出变量 y 的二次多项式拟合函数中 $1, z_1, z_2, z_1 z_2, z_1^2, z_2^2$ 的系数。对所获得的非线性主轴降维映射模型采用由 $L_{30} (30^{10})$ 获得的另 30 个设计方案样本点进行预估精度检验的误差分析图如图 3 所示。

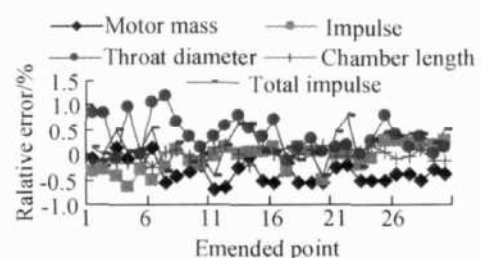


Fig 3 Error analysis figure of NPAM model fitted by 64 sampling point

由图 3 可以看出, 64 个采样点拟合的非线性主轴降维映射模型中, 目标函数和约束函数的相对误差控制在 1.5% 以内。误差原因除计算误差外, 一方面是由于降维导致信息损失, 另一方面由于设计空间可视化需要, 假设 z_1, z_2 表征了 Obj, g_0, g_5, g_7 和 g_8 五个数据流形共同的主轴方向, 这将比寻求单个数据流形主轴方向产生更大的信息损失。1.5% 的相对误差精度对于可视化目的来说可以接受, 因此接受 Obj, g_0, g_5, g_7 和 g_8 五个数据流形本征维数为 2 的假设, 并通过所获得的非线性主轴降维映射模型对某固体火箭发动机设计优化问题进行分析。

3.2 优化模型本征特性分析

预估精度检验说明获得的非线性主轴降维映射模型反映了固体火箭发动机设计优化模型的大部分信息, 抓住了优化数学模型的本征特性。主轴 z_1, z_2 是 10 维设计变量 X 的线性组合, 代表了优化模型中目标函数和各约束函数共同的重要方向。计算主轴 z_1, z_2 中各变量系数绝对值之和 ($|w_{x_i 1}| + |w_{x_i 2}|$), 并按其大小对设计变量进行排序, 排序结果为: $x_9, x_0, x_8, x_1, x_6, x_3, x_4, x_7, x_5, x_2$ 。

根据固体火箭发动机设计知识及图形变形法设计变量重要性分析^[3]得到的结论, 发现此排序结果与设计变量重要性紧密相关。由于 z_1, z_2 表征了 Obj, g_0, g_5, g_7 和 g_8 五个数据流形共同的主轴方向, 但存在信息损失, 因此认为主轴 z_1, z_2 中各变量系数绝对值之和 ($|w_{x_i 1}| + |w_{x_i 2}|$) 近似代表了该变量在优化模型中的重要程度。发动机圆筒段长度 x_9 , 设计压强 x_0 , 圆筒段直径 x_8 , 膨胀比 x_1 , 后翼宽 x_6 , 前翼宽 x_3 在优化模型中的重要性依次递减, 其它四个设计变量前翼长 x_2 、前翼深 x_4 和后翼长 x_5 、后翼深 x_7 分量较轻, 可考虑在模型简化中将其固定为常量。由此可见, 非线性主轴降维映射法具有发掘多维优化模型非线性结构和恢复数据流形本征变量的能力, 主轴 z_1, z_2 可被认为是优化模型中目标函数和各约束函数共同的本征变量。

3.3 设计空间全景展示

设计空间全景展示是设计优化中最关键的问题之一。由于三维以上空间不能直接看到, 只有将多维空间降维映射到二维或三维空间才有可能展示设计空间全景。非线性主轴降维映射法采用光滑数据流形假设, 在降维过程中没有产生过多信息损失, 具有发现优化模型本征特性能力, 因而能在一定精度基础上展示设计空间全景, 达到识别设计空间整体拓扑结

构和几何结构的目的。

根据非线性主轴降维映射法获得的降维映射模型绘制某固体火箭发动机目标函数 Obj 在映射平面 $z_1 \sim z_2$ 上的等值线及各约束隔出的可行设计空间, 如图 4 所示。图 4 中, 细实线为发动机质量等值线, 粗实线分别代表比冲约束 g_0 , 喉径上边界约束 g_5 , 燃烧室总长上边界约束 g_7 及总冲约束 g_8 边界。灰色填充区域表示不可行设计域。小圆圈标识了拉丁超立方采样 $L_{64}(4^{10})$ 的 64 个采样点。为便于比较, 图中用交叉叉显示了均匀设计 $U_{11}(11^{10})$ 的 11 个采样点。图 4 中, 64 个小圆圈的包络类似矩形, 可以认为 $L_{64}(4^{10})$ 中 64 个采样点降维映射包络基本勾画了某固体火箭发动机十维设计空间超立方体边界, 下文遗传算法优化轨迹的显示也说明了这一点。而 11 个交叉叉表示的均匀设计 $U_{11}(11^{10})$ 的 11 个采样点在整个设计空间中显得较为稀疏, 其获得的采样数据应以小子样方式处理。降维映射为试验设计方法的理解及试验设计表的选择提供了直观依据。

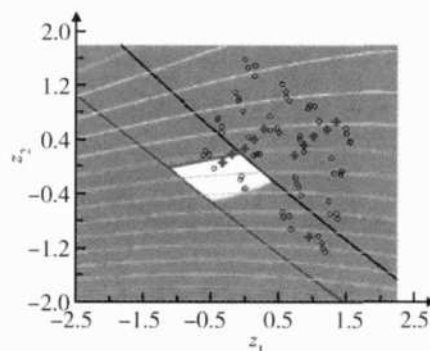


Fig 4 Design space visualization for SRM through NPAM

由图 4 可以分析设计空间性态: 某固体火箭发动机总体参数优化问题中, 发动机质量函数为单峰函数, 其等值线曲率较小, 具有局部近似线性特征。比冲约束 g_0 、喉径上边界约束 g_5 , 燃烧室总长上边界约束 g_7 及总冲约束 g_8 四个约束边界围成了设计空间中的可行设计区域, 此可行域为凸集、且为连通域。因此可认为, 该优化问题中, 选择罚函数法、可行方向法等常规优化算法就能较快地获得全局最优解, 而无需借助遗传算法。采用罚函数法从设计变量中值点开始优化, 仅 234 次迭代就收敛到如下优化结果: 燃烧室压强为 12.0 MPa, 喷管膨胀比为 13.2, 后翼翼长 690.6 mm, 圆筒段长度为 3 800.0 mm, 计算得到发动机总质量 $0.996 m_0$, 总冲 $1.000 I_{t1}$ 。与遗传算法相比, 优化效率大幅度提高。从图 4 试验设计点中还可直观地找出较好的优化初值点, 甚至直接选择符合工

程实际情况的可行设计点。因此,非线性主轴降维映射法在降维空间展示设计空间全景,为优化算法的选择和优化初始点优选提供一定依据。展示过程无需设计人员交互分析,结果一目了然。

3.4 优化轨迹显示

优化轨迹显示为优化算法的理解、改进、甚至提出新的优化算法提供了想象力和洞察力,是优化过程监控主要内容之一。通过显示优化计算中迭代点穿过设计空间的路径,能使设计人员更好地理解通过优化获得的设计折衷。然而,优化轨迹显示一直是高维优化问题中难以突破的重要问题。非线性主轴降维映射法能够在二维或三维空间上展示设计空间全景,同时具有较好的预估精度,因此将优化计算中产生的迭代点进行降维变换获得其在主轴空间上的映射点,将映射点依次连接即可获得优化轨迹。某固体火箭发动机总体参数设计优化修正可行方向法、罚函数法和遗传算法优化轨迹如图5所示。

图5中,十字叉1表示优化初始点,十字叉2为优化收敛点,两点之间折线连接线即为优化轨迹。可行方向法、罚函数法和遗传算法从同一个初始点(即各设计变量下边界组成的设计点)开始计算,分别经过438、342和600次迭代步给出了各自优化结果。然而遗传算法设置种群数为100,实际需要系统分析计算60000次。由图5可知,可行方向法和罚函数法基本收敛于总冲 g_8 边界上,而遗传算法给出的优化结果离各约束边界都有一定距离。由图还可看出优化算法的一些特性,包括迭代方向,搜索范围等。譬如,同为局部优化算法,可行方向法与罚函数法搜索范围较小,而迭代方向不同。可行方向法从优化初始点开始,主要沿着目标函数下降的方向进行搜索,较长时间的迭代在非可行域中进行。罚函数法将约束作为惩罚函数处理,能较快地进入可行设计空间,在此优化问题中比可行方向法更快地收敛到最优点。

遗传算法在整个设计空间中进行随机搜索(64个采样点降维映射包络基本勾画了设计空间边界),这也为理解遗传算法的全局搜索特性、对优化初始点不敏感以及搜索效率较低等性质提供了直观的佐证。

优化初始点的选择对优化算法的搜索效率有较大影响。罚函数法以设计变量最小值点作为优化初始点,经342次迭代收敛到最优点,而以设计变量中值点作为优化初始点,经234次迭代收敛到最优点。图6展示了以中值点作为优化初始点的罚函数法优化轨迹。比较图5(b)和图6可以看出,由于设计变量中值点比最小值点离最优点距离更近,因而能以更快速度获得最优解。

优化轨迹实时显示为优化算法切换提供了依据。可行方向法易于处理位于可行域内的迭代点,而罚函数法能使迭代点较快地进入可行域。以设计变量中值点作为优化初始点,通过优化轨迹监控,当迭代点位于不可行设计域时采用罚函数法,而进入可行设计域后切换成可行方向法,经168次迭代收敛到最优点,一定程度上提高了优化效率。

3.5 优化结果全局最优解特性分析

平行坐标法^[4]分析了优化结果的可靠性和稳健性,图形变形法^[2]展示了最优解附近局部设计空间几何形态,然而至今没有一种方法能够判断优化计算是否获得了全局最优解。基于非线性主轴降维映射的可视化方法展示了设计空间全景,跟踪了优化计算迭代轨迹,设计人员能够根据可行域形状、优化轨迹和最优点位置判断优化算法获得的最优解是否为近似全局最优解。由图5、图6可知,某固体火箭发动机总体参数优化问题设计空间整体结构规则,可行域连通,可行方向法和罚函数法优化轨迹的收敛趋势基本一致,基本收敛到可行域内使目标函数值较小的总冲约束 g_8 边界上,最优点位置基本一致,这些信息一定程度上说明优化所得最优解为近似全局最优解。

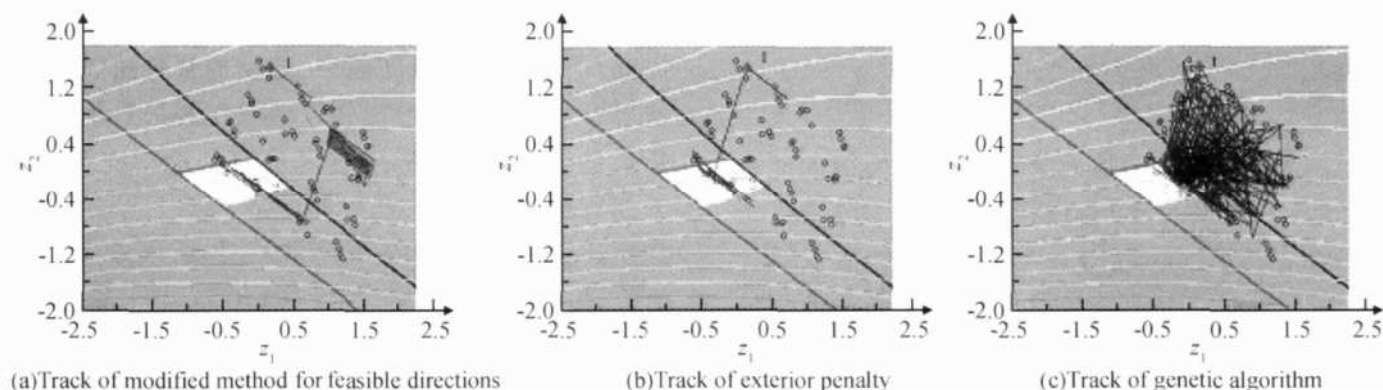


Fig 5 Track of optimization algorithm showing in NPAM

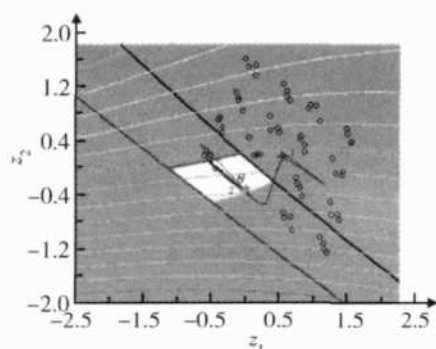


Fig 6 Track of exterior penalty algorithm beginning at the middle point

4 结 论

本文将非线性主轴降维映射法应用于多变量、非线性、多约束的固体火箭发动机设计优化问题。进行了固体火箭发动机优化模型本征特性分析, 设计空间全景展示, 给出了不同优化算法的优化轨迹, 并对不同算法获得的优化结果进行全局最优解特性分析。研究表明, 非线性主轴降维映射法能够获得多维设计空间中对目标函数和约束具有重要影响的设计方向; 能够在降维空间中展示多维设计空间全景, 为设计人员了解优化问题性态, 选择合适的优化算法和优化初始点提供了有力工具; 优化轨迹实时显示为优化算法切换提供了依据; 展示优化结果在设计空间中的位置能够判断所获得的最优解是否为近似全局最优解。

参考文献:

- [1] Holden C M E, Keane A J. Visualization methodologies in aircraft design[R]. AIAA 2004-4449
- [2] 欧海英, 张为华, 李晓斌. 图形变形法在固体火箭发

动机设计优化中的应用[J]. 推进技术, 2005, 26(4).

(OU Haiying ZHANG Weihua LIXiao-bin Graph morphing applied in design optimization for solid rocket motor [J] *Journal of propulsion Technology*, 2005, 26(4).)

- [3] 欧海英, 张为华, 解红雨, 等. 基于图形变形法的固体火箭发动机优化设计[J]. 推进技术, 2006, 27(3). (OU Haiying ZHANG Weihua XIE Hong-yu et al Design optimization for solid rocket motor based on graph morphing[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2006, 27(3).)
- [4] 欧海英, 张为华, 李晓斌, 等. 平行坐标可视化技术在固体火箭发动机优化设计中的应用[J]. 固体火箭技术, 2004, 27(4).
- [5] 谭璐, 易东云, 吴翊, 等. 局部不变投影[J]. 自然科学进展, 2004, 14(3).
- [6] 赵连伟, 罗四维, 赵艳敏, 等. 高维数据流形的低维嵌入及嵌入维数研究[J]. 软件学报, 2005, 16(8).
- [7] Matthews P C. The application of selforganising maps in conceptual design[D]. *Ph. D. thesis Fitzwilliam College, University of Cambridge*, 2001.
- [8] Holden C M E, Keane A J. Design by space transformation from high to low dimensions[P]. *PATENT filed, UK GB, Application GB 0323848.2 October 2003*
- [9] 鄢烈祥, 麻德贤. 基于人工神经网络降维映射的统计优化方法[J]. 应用基础与工程科学学报, 1998, 6(3).
- [10] 方开泰, 马长兴. 正交与均匀试验设计[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [11] 谭璐. 高维数据的降维理论及应用[D]. 长沙: 国防科技大学, 2005

(编辑: 张雅凤)