

# 粘弹壁板颤振的非线性动力特性\*

张云峰, 刘占生

(哈尔滨工业大学 能源科学与工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘 要:** 研究粘弹材料壁板在超声速气流作用下颤振时的分岔及混沌等复杂动力学特性。采用 von Kármán 大变形理论及 Kelvin 粘弹阻尼模型建立壁板的动力学方程, 通过线性活塞理论建立气动力模型。利用迦辽金法将壁板颤振模型转化为常微分方程组, 并使用 Gear 的 BDF 方法进行数值求解。通过数值模拟研究了该系统在粘弹阻尼作用下的动力学行为以及粘弹阻尼的影响。计算结果表明, 粘弹壁板颤振系统表现出丰富的动力学行为, 其二次分岔特性很复杂。随着粘弹性阻尼的增大, 系统的稳定解区域在减小, 而静态屈曲解几乎不受影响, 同时发现混沌运动区域也随着粘弹阻尼的增大而减小。

**关键词:** 壁板颤振; 粘弹性; 分岔<sup>+</sup>; 迦辽金法<sup>+</sup>

中图分类号: V214.4 文献标识码: A 文章编号: 1001-4055 (2007) 01-0103-05

## Nonlinear dynamic analysis of viscoelastic panel flutter

ZHANG Yun-feng LU Zhan-sheng

(School of Energy Science and Engineering Harbin Inst. of Technology Harbin 150001, China)

**Abstract** A nonlinear viscoelastic panel flutter model was developed and its bifurcation and chaos behavior was studied. Von Kármán's large deflection theory and Kelvin's viscoelastic damping model were applied to derive the governing equation, while the first order piston theory was used to simulate the gas pressure applied on the panel. Then, the partial differential governing equation was transformed to ordinary differential equations by use of Galerkin method, and solved with Gear's BDF method. The study is focused on the bifurcation and chaos characteristics of the flutter model, and the influence of viscoelastic damping. The results demonstrate that the viscoelastic panel flutter system may represent complex dynamic characteristic with variation of bifurcation parameters, and both the stable region and chaotic region decrease as the viscoelastic damping increases.

**Key words** Panel flutter; Viscoelasticity; Bifurcation<sup>+</sup>; Galerkin method<sup>+</sup>

## 1 引 言

壁板颤振是典型的气动弹性问题, 对超声速飞行器及具有薄壁结构的冲压发动机推进系统, 其结构设计向柔性轻型发展, 使得这一问题越来越突出。壁板颤振的发生会导致结构寿命降低, 甚至产生破坏。

壁板颤振的动力学系统是非保守的自治系统, 其动力学特性十分复杂, 随着系统参数的变化, 壁板表现出静不稳定性 (屈曲) 和动不稳定性 (颤振)、混沌运动, 甚至表现出时空混沌的特性<sup>[1~3]</sup>。影响壁板颤振特性的系统因素有很多, 如气流动压、来流气流角、

结构的支撑形式、中面压紧力、结构阻尼, 材料属性等。其中结构阻尼具有较大的减振特性, 因此在航空结构设计中使用较广, 特别是粘弹阻尼材料的应用越来越多。

Bolotin 等<sup>[4]</sup>采用 von Kármán 大变形理论和线性活塞理论对无阻尼弹性壁板颤振问题进行了研究, 发现分岔参数连续变化时系统行为存在滞后现象, 而且出现非对称周期运动, 运动周期会随着参数的变化而突然变化。Bismark-Nasr<sup>[5]</sup>等对包含结构阻尼的非线性壁板颤振问题作了研究, 使用摄动法得到其极限环振动解, 发现只考虑滞后型阻尼时, 其有可能使结构

\* 收稿日期: 2006-01-25 修订日期: 2006-06-07。

作者简介: 张云峰 (1980—), 男, 博士生, 研究领域为流固耦合分析。Email: zyfs@hit.edu.cn

稳定也有可能导致不稳定。Pourtakdoust<sup>[6]</sup>利用罗斯-霍维茨方法对两自由度粘弹材料非线性壁板颤振系统进行线性稳定性分析,得到了分岔边界。但摄动法和罗斯-霍维茨方法仅能对简单的极限环运动和分岔边界进行分析,对超临界的二次分岔和混沌现象则无能为力。而利用数值仿真能够更全面地了解壁板颤振的动力学特性。Epureanu等<sup>[7]</sup>利用 von Kármán 大变形理论和线性活塞理论对无阻尼弹性壁板颤振问题进行了数值求解,结果表明其动力学特性非常复杂,随着动压的升高,振动形式会从静态屈曲突然进入混沌运动状态并随后进入拟周期运动状态,在这些状态的某些小区间内拟周期运动和混沌运动会交替出现。Beldica等<sup>[8]</sup>对非线性多层复合壁板颤振进行了初步的参数灵敏度分析,主要目的是研究参数变化对疲劳寿命的影响,研究显示壁板的破坏因素包括粘弹颤振和复合板的强度的降低等。

本文在无阻尼弹性壁板颤振问题的基础上,针对展向无限长的粘弹壁板结构,利用 von Kármán 大变形理论、Kelvin 粘弹阻尼模型和线性活塞理论建立非线性粘弹材料壁板颤振模型。使用迦辽金法将偏微分方程转化为常微分方程组并进行数值仿真,得到其动力特性在分岔参数平面内的分布,研究其分岔行为,以及粘弹性阻尼对系统动力学特性的影响。

## 2 壁板颤振模型

壁板结构物理模型见图 1,假设壁板展向无限长,沿流向的长度为  $l$  厚度为  $h$ ,密度为  $\rho$  弹性模量为  $E$  泊松比为  $\nu$ ,两端为简支边界条件。自由流速度、压力、密度和温度分别表示为  $U_\infty, p_\infty, \rho_\infty, T_\infty$ ,上表面有平行于壁板表面的超声速气流流过,下表面压力设为自由流条件,并假设壁板承受预紧力  $N_0$ 。壁板振动幅值以  $w$  表示。由于壁板振动与气流的耦合作用,壁板上表面承受随时间变化的气流力载荷,此压力使用活塞理论表示。对于壁板的非线性变形,使用 von Kármán 大变形理论建立应力-应变的非线性关系。壁板材料为粘弹性材料,使用 Kelvin 粘弹阻尼模型。

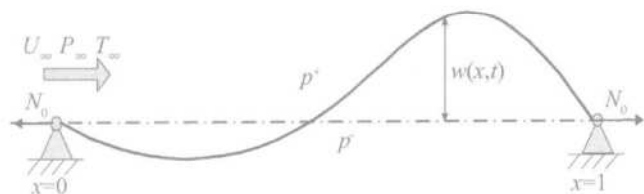


Fig 1 Panel geometry

对于展向无限长弹性壁板,通过对展向项的处理,可以得到壁板的非线性振动方程,表示为

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P = 0 \quad (1)$$

式中  $D$  为弯曲刚度,表示为

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

式中  $N$  为板内应力,根据 von Kármán 应力-应变关系表示为

$$N = N_0 + Eh \frac{1}{2l} \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3)$$

$p$  为壁板上的分布载荷,表示壁板上下表面压力差,包括静压差以及因气流与壁板振动相互耦合而产生的气流压力,其中耦合作用产生的气流压力使用一阶活塞理论计算。

$$p = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{M} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\rho_\infty U_\infty}{M} \frac{\partial w}{\partial t} + p^+ - p^- = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{M} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\rho_\infty U_\infty}{M} \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta p \quad (4)$$

根据 Kelvin 粘弹模型,方程 (1) 中杨氏模量  $E$  替换为  $E(1 + g_s \partial / \partial t)$ ,其中  $g_s$  为粘弹性阻尼,则原方程 (1) 变为

$$D(1 + g_s \partial / \partial t) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - [N_0 + (1 + g_s \partial / \partial t)N] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Delta p = 0 \quad (5)$$

对方程进行无量纲化,无量纲参数为  $\bar{w} = w/h$ ,  $\bar{x} = x/l$ ,  $\bar{t} = t/\sqrt{\rho h l^3 / D}$ 。为方便起见,将无量纲参数  $\bar{w}, \bar{x}, \bar{t}$  重新计为  $w, x, t$  并将方程中各项组合标记,得到无量纲方程如下

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sqrt{\frac{\mu \lambda}{M}} \frac{\partial w}{\partial t} + (1 + g_s \partial / \partial t) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - R_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - G(1 + g_s \partial / \partial t) \left| \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = p \quad (6)$$

式中  $\lambda$  为无量纲动压系数,  $R_x$  为面内载荷参数,  $p$  为压力载荷参数,  $G$  为材料属性参数,  $\mu$  为质量比,分别表示如下

$$\lambda = \frac{\rho_\infty U_\infty^2 l^3}{MD} = 12(1-\nu^2) \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{ME} \left| \frac{l}{h} \right|^3 \quad (7)$$

$$R_x = \frac{Eh \eta l^2}{D} = 12(1-\nu^2) \eta \left| \frac{l}{h} \right|^2 \quad (8)$$

$$p = \frac{l^4 \Delta p}{Dh} = - \frac{12(1-\nu^2) \Delta p}{E} \left| \frac{l}{h} \right|^4 \quad (9)$$

$$G = Eh^3/2D = 6(1 - \nu^2) \quad (10)$$

$$\mu = \rho_\infty l / (\rho h) \quad (11)$$

### 3 数值求解

方程 (6) 是时间二阶空间四阶的偏微分方程, 对其使用迦辽金法, 利用正交函数的性质, 将偏微方程转化为常微分方程组。根据板的简支边界条件

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0 \quad w''(0, t) = 0 \\ w(l, t) = 0 \quad w''(l, t) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

假设板的横向位移  $w$  表示为

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \sin(n\pi x) \quad (13)$$

将方程 (13) 代入方程 (6), 利用基函数的正交性, 得到一组非线性常微分方程

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_n}{dt^2} + \left[ (n\pi)^2 g_s + \sqrt{\frac{\lambda}{M}} \right] \frac{da_n}{dt} + \left[ (n\pi)^4 + R_x (n\pi)^2 \right] a_n + \\ \lambda \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{2nm}{n^2 - m^2} [1 - (-1)^{m-n}] a_m + \\ G \left[ \sum_{r=1}^N \frac{(r\pi)^2}{2} a_r^2 \right] (n\pi)^2 a_n + \\ G g_s \left[ \sum_{r=1}^N (r\pi)^2 a_r \frac{da_r}{dt} \right] (n\pi)^2 a_n = \\ 2p \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \quad (n = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (14)$$

将方程 (14) 改写成状态方程形式如下

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{F}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, \dots]^T$ ,  $\mathbf{b} = [\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3, \dots]^T$  表示广义位移和广义速度。

方程 (15) 是一阶非线性方程组, 可使用 Runge-Kutta Gear 或 Adams-Bashforth-Moulton 方法进行求解。这里将使用 Gear 方法对此方程进行求解。

为了与其它文献的研究结果对比, 选取无量纲参数  $G = 5.46$ ,  $\mu M = 0.01$ ,  $p = 0$ 。无量纲时间步  $t = 0.01$ , 积分精度为  $10^{-10}$ 。

### 4 计算结果分析

#### 4.1 粘弹阻尼的影响

分别取如下四个不同的粘弹阻尼值, 考察粘弹阻尼对分岔参数平面内动力学行为分布的影响。

$$g_s = 0.0005, g_s = 0.001, g_s = 0.005, g_s = 0.01$$

选取无量纲动压系数  $\lambda$  和面内载荷参数  $R_x$  为分岔参数, 设定  $R_x \in [0 - 6\pi^2]$ ,  $\Delta R_x = 0.1\pi^2$ ,  $\lambda \in [0$

400],  $\Delta\lambda = 10$ 。选取无量纲时间步长  $t = 0.01$ 。计算时间的长短会影响结果的精度, 由于研究系统在分岔平面内的动力学特性, 只需设定在给定时间内系统的状态能够清楚表现出即可, 因此设定计算时间为 220 单位时间, 并取最后 20 单位时间的计算结果。图 2 给出了  $r$ - $\lambda$  参数平面内系统的动力特性分布。

从图中可以看出, 颤振系统在参数平面内表现出各种动力学行为, 包括静态平衡、静态屈曲、极限环运动、混沌、奇怪吸引子等。而粘弹性阻尼  $g_s$  的大小对颤振模型的动力学特性影响很大, 特别是静态平衡区域 (Flat) 和混沌区域 (Chaos Strange Attractor), 而静态屈曲区域 (Buckling) 基本上不受影响。当  $g_s$  增大时, 静态稳定区域缩小, 其边界向  $R_x$ - $\lambda$  平面左下方收缩。而混沌和奇怪吸引子区域也在缩小, 其边界向右下方静态屈曲边界收缩。从图中可以看出当  $g_s = 0.005$  和  $g_s = 0.01$  时, 混沌运动在参数平面内已经不存在。由此可见, 粘弹阻尼可以降低混沌运动的可能性, 但同时也降低了系统维持静态稳定的能力。此结果与 Pourtakdoust<sup>[6]</sup> 通过线性稳定性分析得到的结果吻合, 但 Pourtakdoust 的线性分析无法得到混沌、奇怪吸引子区域的变化情况。

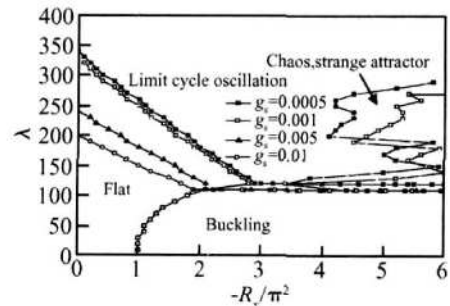


Fig 2 Nonlinear system dynamic characteristic region in  $R_x$ - $\lambda$  control parameter space

#### 4.2 $\lambda$ 为分岔参数分析

取初始条件  $w(x, 0) = 0.1 \sin(\pi x)$ ,  $w'(x, 0) = 0$ ,  $g_s = 0.0005$ ,  $R_x = -4 - 2\pi^2$ ,  $\lambda \in [100 - 300]$ , 步长  $\Delta\lambda = 1$ 。取无量纲时间步长  $t = 0.01$ 。为获得精确的系统行为, 计算时间必须足够长, 使得瞬态效应完全消除。在这里, 计算 2000 单位时间, 并保留最后 20 个单位时间的结果, 此计算时间可以满足系统达到稳定状态的要求。取  $x = 0.25l$  点处的结果进行分析, 图 3 显示了系统的分岔图, 其中纵轴表示局部最大振幅。图 4 给出了无量纲颤振频率随动压的变化曲线。图 5 给出了前四阶模态振幅随动压的变化。

从图 3 可以观察到, 在整个分岔参数范围内, 系

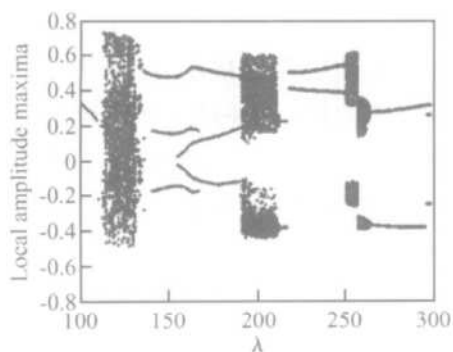


Fig 3 Bifurcation diagram of system,  $R_x = -4.2\pi^2$

统表现出各种动力学行为,包括静态屈曲、极限环运动、准周期运动、混沌等。当  $\lambda \leq 112$  时,系统表现为静态屈曲,屈曲平衡点是渐进稳定焦点,而静平衡点则是不稳定焦点,随着流动速度的增大,屈曲平衡点趋向于静平衡点,表现为图中的局部最大振幅降低。当  $\lambda > 112$  时,进入混沌状态(图 6(a)),其频率分布呈连续谱状,这一状态持续到  $\lambda = 132$ ,然后当  $\lambda \geq 137$  时,系统开始进入对称极限环振动(图 6(b),  $137 \leq \lambda \leq 190$ ),静态平衡点体现中心的性质。此时的频率分布包括颤振频率的 2 4 6 倍频,随着  $\lambda$  的增大,频谱上出现 3 5 7 倍频。对称极限环在  $\lambda = 190$  时消失,系统呈现准周期运动 ( $190 \leq \lambda \leq 211$ ),而且颤振频率有一个突然的跳跃,随后颤振频率逐渐升高。当  $213 \leq \lambda \leq 250$  时,系统表现为非对称的极限环振动,振动中心位置偏向一侧,而且在  $216 < \lambda < 219$  时,振动的中心发生突变(图 6(c), 6(d)),从壁板一侧跳到另一侧,可以认为是静态平衡点变为不稳定中心,而两侧存在两个稳定中心,极限环运动的中心一侧跳跃到另一侧是随机变化的。非对称极限环振动维持到  $\lambda = 251$  左右,又进入奇怪吸引子运动(图 6(e)),在频谱上可以看到低频的出现。当流速很大即  $\lambda > 265$  时,系统重新进入非对称极限环运动(图 6(f)),而  $\lambda > 295$  时,系统重新进入了对称极限环振动。

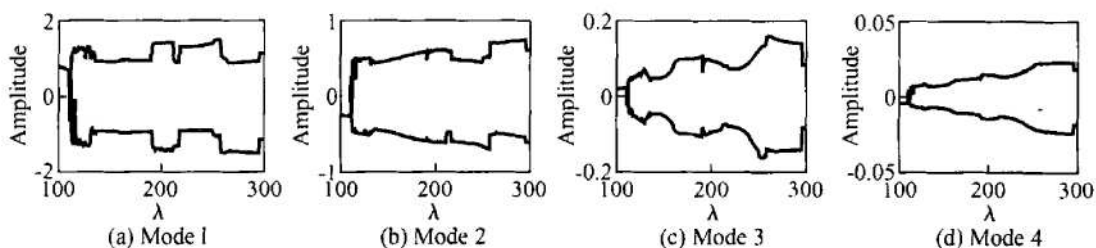


Fig 5 Mode amplitude changes with dynamic pressure

观察前四阶迦辽金模态振幅包络随着动压  $\lambda$  的变化(图 5),可以看出高阶模态在颤振运动中的贡献相对较小,振动主要来源于低阶模态,所以壁板沿流向的振型主要是一阶模态(半波长正弦)和二阶模态(一倍波长正弦)的组合形式。另外  $\lambda$  增大到一定阶段时,各阶模态振动明显处于非对称状态。

#### 4.3 $R_x$ 为分岔参数分析

取初始条件  $w(x, 0) = 0.1 \sin(\pi x)$ ,  $w'(x, 0) = 0$ ,  $g_s = 0.0005$ ,  $\lambda = 220$ ,  $-R_x/\pi^2 = [0, 6]$ , 步长  $-R_x/\pi^2 = 0.005$ 。取无量纲时间步长  $t = 0.01$ 。取  $x = 0.25l$  点处的结果进行分析,图 7 显示了系统的分岔图,其中纵轴表示局部最大振幅。图 8 显示了系统颤振频率随分岔参数的变化曲线。

从图中可以看到系统的分岔情况相对简单,当分岔参数  $-R_x/\pi^2 < 1.6$  时,系统处于静平衡状态,平衡点为渐进稳定焦点。 $-R_x/\pi^2 > 1.6$  后,系统颤振频率有突跃,进入对称的稳定极限环运动,直到  $-R_x/\pi^2 = 3.955$  附近,变为非对称极限环运动。可以看到随着参数的增大,颤振频率是逐渐降低的。在  $-R_x/\pi^2 > 4.285$  后,系统进入准周期运动,而颤振频率几乎不变,在  $-R_x/\pi^2 = 4.345$  时,振动幅值有突然的变化。直到  $-R_x/\pi^2 = 5.120$  时,系统再一次分岔,重新进入极限环运动,此时的运动为对称的。

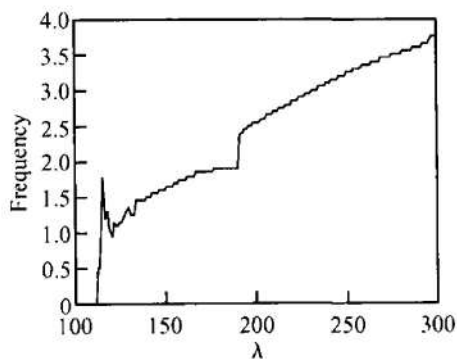


Fig 4 Flutter frequency changes with dynamic pressure

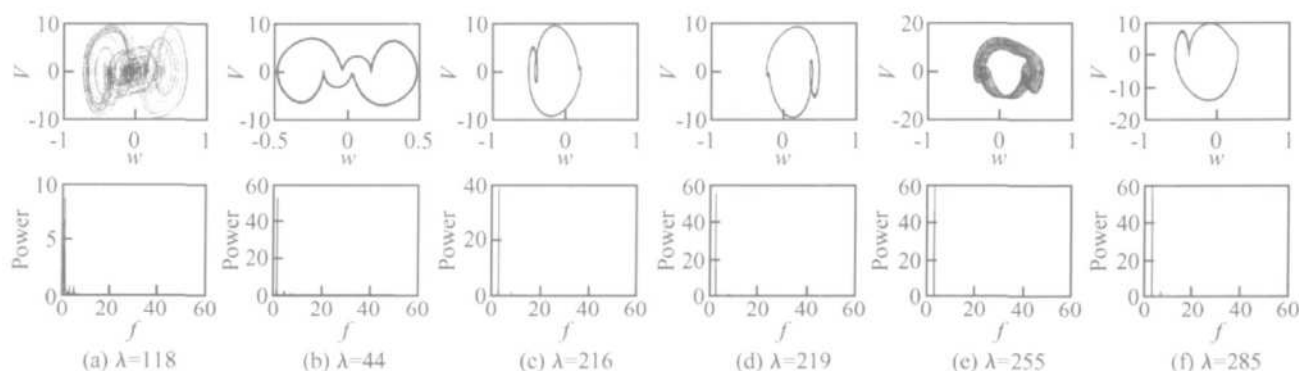


Fig 6 Phase space plots and power spectrum for different dynamic pressure when  $R_x = -4.2\pi^2$

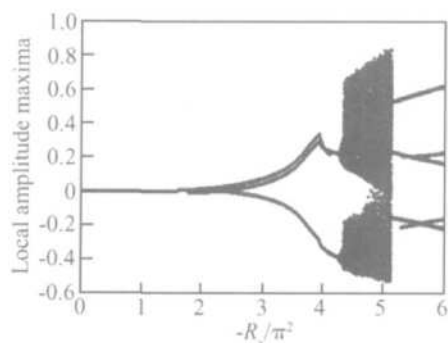


Fig 7 Bifurcation diagram of system when  $\lambda = 220$

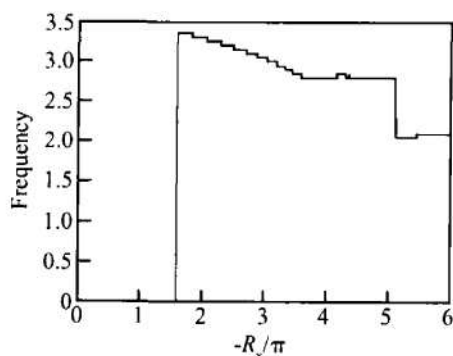


Fig 8 Flutter frequency changes with  $R_x$

## 5 结 论

通过对粘弹壁板颤振的非线性动力特性的研究,发现颤振运动在分岔参数变化时表现出复杂的行为,包括静平衡、静态屈曲、极限环运动、混沌运动,其中还包含一些奇怪吸引子。而且极限环运动包括对称与非对称的形式,非对称的运动中心存在突跳的现象。通过分析颤振系统在不同粘弹阻尼参数下其运动特性在分岔参数平面内的分布,发现随着粘弹阻尼的增大,稳定区域减小,系统静平衡稳定性降低,而静态屈曲状态几乎不受影响,同时混沌运动参数范围

也在缩小,二次分岔参数值推后,极限环运动的稳定性有大幅提高。

## 参考文献:

- [1] Dowell E H, Voss H M. Theoretical and experimental panel flutter studies in the mach number range of 1.0 to 5.0 [J]. *AAA Journal*, 1970, 8(9): 2222~2304
- [2] Dowell E H. Aeroelasticity of plates and shells [M]. *Leyden: Noordhoff International Publishing*, 1975
- [3] Gray Jr C E, Mei C. Large amplitude finite element flutter analysis of composite panels in hypersonic flow [J]. *AAA Journal*, 1993, 31(6): 1090~1099
- [4] Bolotin V V, Grishko A A, Kounadis A N, et al. Non-linear panel flutter in remote post-critical domains [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1998, 33(5): 753~764
- [5] Bismarck-Nasr M N, BONES C A. Damping effects in nonlinear panel flutter [J]. *AAA Journal*, 2000, 38(4): 711~713
- [6] Pourtakdoust S H, Fazelzadeh S A. Chaotic analysis of nonlinear viscoelastic panel flutter in supersonic flow [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 32(4): 387~404
- [7] Epureanu B I, Tang L S, Paidoussis M P. Coherent structures and their influence on the dynamics of aeroelastic panels [J]. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2004, 39(6): 977~991
- [8] Beldica C E, Hilton H H, Kubair D. Viscoelastic panel flutter-stability, probabilities of failure and survival times [C]. *Collection of Technical Papers AAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 2001, 5: 3423~3433

(编辑: 刘萝威)