

轮盘应变疲劳寿命可靠性分析方法^{*}

唐俊星, 陆 山

(西北工业大学 动力与能源学院, 陕西 西安 710072)

摘 要: 为较准确评估应变疲劳寿命可靠性, 通过引入两个相关随机变量对 Coffin-Manson 公式随机化, 发展了一种轮盘应变疲劳寿命可靠性分析概率模型。对线性回归残差重新定义, 使得到的回归参数不随坐标系的选取发生变化。采用响应面法和蒙特卡洛模拟相结合的方法获得轮盘危险点应变幅的分布, 最后通过多次解非线性方程数值模拟得到轮盘危险点应变疲劳寿命分布及其可靠寿命。

关键词: 涡轮盘; 疲劳 (力学); 可靠性分析; 响应面法⁺; 蒙特卡洛法

中图分类号: V231.95 O346.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-4055 (2005) 04-0344-04

Reliability analysis method for the strain fatigue life of a disk

TANG Jun-xing LU Shan

(School of Power and Energy, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract A probabilistic model based on strain-life curve was developed to assess fatigue life reliability of a disk. By randomizing the Coffin-Manson equation with two related random variables, the square sum of residuals for linear regression of strain-life curve was redefined. In this way, the parameters obtained from regression will be unchanged when the coordinate system is changed. The strain amplitude distribution at a critical site of a disk was acquired through the combination of response surface method and Monte Carlo simulation. Finally, the distribution of strain failure life at the site can be achieved by numerical simulation. And then the reliable life or the reliability for any given life can be derived easily from the distribution.

Key words Turbine wheel; Fatigue (mechanics); Reliability analysis; Response surface method⁺; Monte Carlo method

1 引 言

在已有的各种疲劳可靠性分析模型中, 根据以应力或以应变为主要特征参量, 可分为应力疲劳可靠性分析方法^[1]和应变疲劳可靠性分析方法。对于先进的发动机涡轮盘而言, 危险部位已有较大塑性变形, 从疲劳机理上来说采用应变疲劳模型更合适。

20世纪 90年代以来国内外发展的 AMV 法、CPFI 法、应变-寿命参量关系法及应变-载荷强度干涉法^[2], 与应力研究方法类似, 也是从 P - ϵ - N 曲线角度研究应变疲劳可靠性的^[3]。文献 [4~5] 应用线性回归方法, 分别讨论了几种疲劳概率模型, 如提出应变寿命可靠性分析的 8 参数模型, 但其很难根据少量试验正确分辨这些参数分布特征。文献 [6~7] 则是基

于概率有限元, 利用 H-L 法求解失效概率。AMV 法、CPFI 法和载荷强度干涉法模型, 主要事先假定应变幅 (或应力幅) 服从某种分布缺乏说服力。而文献 [3~5] 把应变幅定为常值, 等价于忽略了载荷、几何等随机因素对应变的影响。实际结构在服役时, 由于不同炉批、加工、装配、控制等随机影响, 造成最危险点的应力、应变有分散, 从而使疲劳寿命分散更大。另外, 有些模型 (如应变-载荷强度干涉法^[2]及文献 [6] 方法) 的提出更多从数学的角度出发, 确定设计变量是否为随机变量、属于何种分布, 有时使模型难以工程应用。随机变量之间是否独立会影响结果的准确性。

本文拟发展基于大型通用有限元程序平台的应变疲劳寿命可靠性分析方法。通过随机化 Coffin-Manson 公式, 建立考虑载荷、几何分散影响的应变疲

^{*} 收稿日期: 2004-12-01; 修订日期: 2005-04-18。

作者简介: 唐俊星 (1977—), 男, 博士生, 研究领域为航空发动机寿命可靠性。Email: tangjunxing@sina.com

劳寿命概率模型;通过修正的线性回归的方法,得到随机变量的分布特征,并考虑弹性线和塑性线的相关性。最后应用响应面法与蒙特卡洛法结合的方法,求解轮盘低周疲劳寿命可靠度。

2 应变疲劳寿命概率模型

Coffin-Manson 公式的核心是假设在双对数坐标系中,弹性应变变化量 $\Delta \varepsilon_e$ 和塑性应变变化量 $\Delta \varepsilon_p$ 分别与循环寿命 N_f 的关系近似呈线性关系,由此得出应变幅 $\Delta \varepsilon$ 与寿命的关系如下

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (1)$$

式中与疲劳相关的常数 σ'_f , b , c , ε'_f 由试验数据处理得到,这些常数并不直接反映材料疲劳寿命的分散信息。因此,需要添加表征材料疲劳寿命分散特性参数。因弹、塑性线在双对数坐标下呈线性关系,因此可假设疲劳寿命符合对数正态分布^[8],

$$\lg(\Delta \varepsilon_e/2) = \lg(\sigma'_f/E) + b \lg(2N_f) + \eta \quad (a) \quad (2)$$

$$\lg(\Delta \varepsilon_p/2) = \lg \varepsilon'_f + c \lg(2N_f) + \xi \quad (b)$$

式中 η , ξ 为随机变量。在给定 N_f 下, η , ξ 属于均值为零的正态分布,为简单及易于应用起见,其方差可假设为常值。根据上面的假设可以导出考虑分散性的疲劳寿命概率模型

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = 10^\eta \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + 10^\xi \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (3)$$

η , ξ 一般为相关的随机变量。如果式 (3) 中各个参数已知,并 $\Delta \varepsilon$, η , ξ 的分布参数已知,可以通过式 (3) 反解出 N_f 的分布。

当平均应力 σ_m 为正时,可采用莫罗 (Morrow) 法修正平均应力的影响。经修正后的疲劳寿命概率模型为

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = (10^\eta \frac{\sigma'_f}{E} - \frac{\sigma_m}{E}) (2N_f)^b + 10^\xi \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (4)$$

3 应变疲劳寿命可靠性分析方法

求解式 (4) 中的失效寿命的分布时应先确定各相关常量参数值和各随机变量的分布特征。因此,应变疲劳寿命可靠性分析前期工作可分为两部分,一是 $\Delta \varepsilon$ 分布确定,二是应变疲劳模型中各个参数的确定。 $\Delta \varepsilon$ 涉及到有限元计算,本文采用有限元通用程序 ANSYS 计算应力应变,应用响应面法将拟合随机变量的多项式,再通过蒙特卡洛法模拟出 $\Delta \varepsilon$ 的分布。应变疲劳模型各参数的获取通过疲劳试验数据

处理获得。从而最终可得到给定可靠度的寿命或是给定寿命的可靠度。本文构件应变疲劳寿命可靠性分析方法流程见图 1,有关具体过程参见文献 [9]。

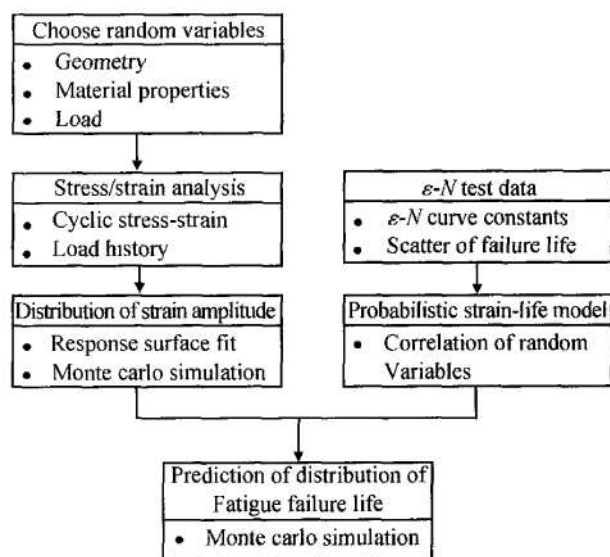


Fig 1 Probabilistic approach of strain-based fatigue

4 应变疲劳寿命可靠性分析模型参数确定

使一组试件全部在某个给定寿命破坏是不可能的,因此很难根据试验直接得到材料应变疲劳强度分布。而在同一应变幅下,可以通过试验得到疲劳寿命的分散。因此传统疲劳试验数据处理方法一般习惯把对数寿命写在右边,即写成如下线性回归形式

$$\lg(2N_f) = A + B \lg(\Delta \varepsilon_e/2) + \phi \quad (a) \quad (5)$$

$$\lg(2N_f) = C + D \lg(\Delta \varepsilon_p/2) + \phi \quad (b)$$

比较式 (2) 和式 (5), 广义上讲一个是疲劳强度分布形式, 一个是疲劳寿命分布形式, 两者物理意义不同, 数学形式等价。

由式 2(a) 和式 5(a) 不同形式得到的回归系数略有差别, 因为常规回归方法中残差定义为离散点到

直线的 Y 向距离平方和, 即当寻找满足 $Q_B = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$ 达到最小时的 $\hat{a}$, $\hat{b}$ (假设 a 为截距、 b 为斜率)。而实际试验点到直线的垂直距离平方和应是 $Q = Q_B / (1 + b^2)$, $\hat{a}$, $\hat{b}$ 不一定刚好使 Q 达到最小, 使得 Q 达到最小的 b_0 应满足 $|b_0| \geq |\hat{b}|$ 。同理, 用式 5(a) 的形式满足 $|B_0| \geq |\hat{B}|$ 。实际上由于所求直线的唯一性, 有 $B_0 b_0 = 1$ (b_0 或 B_0 不为

0时)。因此有 $|1/\hat{b}| \geq |b_0| \geq |\hat{b}|$, 两处理方式得到的直线不同。如果定义回归残差为点到直线垂直平方和, 可以避免由于采用不同回归形式得到的直线不同, 保证得到的疲劳性能参数具有唯一性。

一般情况下, η, ξ 为相关的随机变量, 相关系数可以根据定义求出

$$r = \frac{1}{n \sqrt{D\eta D\xi}} \sum_{i=1}^n (\eta_i - \bar{\eta})(\xi_i - \bar{\xi})$$

$D\eta, D\xi$ 用 η, ξ 的方差估计值 $\hat{\sigma}_\eta^2$ 和 $\hat{\sigma}_\xi^2$ 来近似。

5 旋转等厚空心圆盘应变、寿命可靠性分析

轮盘应变大小与转速、材料密度、内外半径有关。而这些参数是随机的, 服从一定的分布。根据很多物理量服从正态分布的事实, 在本文假设各初始随机量都服从正态分布。为考证响应表面法的分析精度, 本文采用有理论解的旋转等厚空心圆盘作为算例。

5.1 旋转等厚空心圆盘应变理论解

旋转等温等厚空心圆盘在无轮缘外载的情况下, 中心孔边为最危险部位, 如果假设轴向应变为零, 材料不可压, 其强化规律为幂函数

$$\tau = \tau_0 \gamma^n \tag{6}$$

可以得到盘孔心周向力的全量弹塑性解^[10]

$$\sigma_\theta = m \rho \omega^2 \frac{r_{out}^2 - r_{in}^2}{1 - (r_{in}/r_{out})^{2n}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_\theta}{2\tau_0} \right)^{\frac{1}{n}}$$

式中 ρ 是密度, ω 是转速, r_{out} 轮缘半径, r_{in} 中心孔半径。如果轮盘卸载反向未进入屈服, 则全盘按弹性卸载, 对于平面应变材料不可压问题

$$\Delta\sigma_\theta = \rho\omega^2 r_{out}^2, \quad \Delta\varepsilon_0 = (3/4)\rho\omega^2 r_{out}^2/E \tag{7}$$

5.2 有限元应力应变计算

选取 $E, \omega, r_{out}, r_{in}$ 作为随机变量, 进行有限元计算。各个参数取值如表 1 所示。为了和上面理论解比较, 材料的强化规律也采用幂函数模型, 模拟材料不可压, 泊松比取为 0.49。在盘心最危险点的中值计算结果与理论解比较见表 2。

Table 1 Parameters of calculated disk

	Mean	SD
Elastic modulus E /GPa	100	1
Rotate speed ω /(1/s)	1414	14.14
Outer radii r_{out} /m	0.23	0.001
Inner radii r_{in} /m	0.08	0.001
Mass density ρ /(kg/m ³)	8210	0
Poisson's ratio ν	0.49	0
Hardenig coefficient m	0.69687	0

Table 2 Results of mean value of critical site

	FEA	Theoretical results	Relative error
σ_θ /MPa	688.7	690.4	0.4%
ε_0	1.131	1.127	0.3%
$\Delta\sigma_\theta$ /MPa	858.3	868.4	1.2%
σ_m /MPa	259.6	255.8	1.5%
$\Delta\varepsilon_0$	0.6508	0.6513	0.08%

通过有限元计算后响应面法得到的应变幅拟合函数为

$$\Delta\varepsilon_0 = \omega^2 (325.5/E + 6.124 \times 10^{-8} r_{out}^2 + 4.037 \times 10^{-10} r_{in} - 3.272 \times 10^{-9}) \tag{8}$$

以 $E, \omega, r_{out}, r_{in}$ 为正态随机变量, 对式 (8) 进行多次蒙特卡洛模拟, 得到危险点应变幅的分布, 数值模拟后结果见表 3。表 3 中应变幅失效概率的理论解为直

Table 3 Calculated distributions of strain amplitude and fatigue failure life

Failure probability	$\Delta\varepsilon_0$			N_f / Cycles			
	FEA	Theoretical results	Relative error/%	Experiment results	Theoretical results		Relative error/%
					Integral	Simulation	
0.0005	6.0091×10^{-3}	6.0140×10^{-3}	0.081	2415	2408	2408	0.3
0.001	6.0387×10^{-3}	6.0435×10^{-3}	0.079	2563	2556	2557	0.3
0.005	6.1151×10^{-3}	6.1197×10^{-3}	0.075	2991	2983	2983	0.3
0.05	6.2551×10^{-3}	6.2595×10^{-3}	0.070	3969	3957	3957	0.3
0.10	6.3103×10^{-3}	6.3148×10^{-3}	0.071	4440	4422	4422	0.4
0.5	6.5081×10^{-3}	6.5126×10^{-3}	0.069	6605	6582	6582	0.4
0.9	6.7104×10^{-3}	6.7153×10^{-3}	0.073	9921	9887	9886	0.3
0.95	6.7687×10^{-3}	6.7736×10^{-3}	0.072	11157	11118	11118	0.4
0.995	6.9198×10^{-3}	6.9250×10^{-3}	0.075	15144	15078	15086	0.4
0.999	7.0041×10^{-3}	7.0098×10^{-3}	0.081	17987	17893	17901	0.5
0.9995	7.036×10^{-3}	7.0429×10^{-3}	0.098	19250	19137	19182	0.5

接对式 (7) 采用多维随机变量数值积分得来。

5.3 轮盘低周疲劳寿命分布数值模拟

通过上述方法对 GH4133 材料疲劳试验数据进行处理后, 得到的疲劳寿命概率模型为

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = (0.0110 \times 10^{0.01503\mu_1} - \frac{\sigma_m}{E}) (2N_f)^{-0.1127} + 6.7495 \times 10^{0.10571\mu_2} (2N_f)^{-1.0394} \quad (9)$$

式中 μ_1, μ_2 为相关系数 $r=0.747$ 的标准正态随机变量。

式 (9) 中 $\Delta \varepsilon, \mu_1, \mu_2$ 为随机变量, 通过蒙特卡洛模拟求解, 可以获得 N_f 的经验分布。 $\Delta \varepsilon$ 分别取式 (7), 式 (8) 形式, 得到两组寿命分布。由式 (7) 得出的结果试验称为理论解, 由式 (8) 得出的称为试验解。表 3 列出了一些特定失效概率点的寿命。理论解中根据式 (7) 中 $\Delta \varepsilon$ 的分布, 可用多维变量数值积分法或蒙特卡洛法求解, 本文简称为积分法和模拟法。通过比较可以看出, 各种解寿命结果都比较接近, 表中寿命相对误差是试验解和理论解中积分解的比较。

图 2 显示的是所预测寿命概率密度曲线。从图中可以看出寿命分布是偏态的, 理论解和试验解 (5000 万次蒙特卡洛模拟) 几乎重合, 说明响应面法与蒙特卡洛法结合可以达到很好的精度。

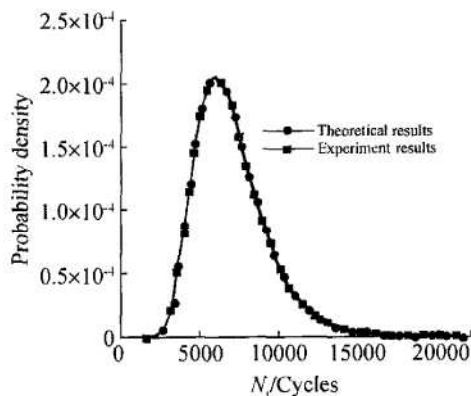


Fig 2 Predicted fatigue failure life distribution of a disk

6 结 论

(1) 引入两相关随机变量, 发展了基于 Coffin-

Manson 公式的应变疲劳寿命概率模型。两个随机变量分别用于表征材料疲劳试验数据的弹性线和塑性线的分散性。该模型将应变也作为随机变量, 但不直接假设应变幅的分布形式, 而是通过响应面法把应变幅拟合多项式形式。应变幅的分布和疲劳失效寿命的分布都可通过蒙特卡洛法得到。

(2) 通过有理论解 (广义的) 的算例分析可见, 应用响应面法与蒙特卡洛法结合可以达到较满意的寿命可靠性分析精度, 为本文方法应用于真实轮盘结构进行应变疲劳寿命可靠性分析积累经验。

(3) 重新定义应变寿命模型回归残差, 改进疲劳试验数据处理方法, 保持了参数回归结果的不变性。

参考文献:

- [1] 蒋向华, 王延荣, 杨晓光. 某航空发动机涡轮盘的可靠性分析 [A]. 第二界航空发动机可靠性学术交流会 [C], 2003
- [2] 赵永翔. 应变疲劳可靠性分析的现状及其展望 [J]. 机械工程学报, 2001, 37(11).
- [3] 汪小红, 倪 侃, 张圣坤. 基于应变的疲劳寿命曲线 [J]. 中国海洋平台, 2003, 18(5).
- [4] Heffern Thomas V. Probabilistic modeling and simulation of metal fatigue life prediction [D]. Naval Postgraduate School, Monterey, CA, USA, 2002
- [5] Rusk D T, Hoffman P C. Developments in probability-based strain-life analysis [C]. Fifth Joint NASA/FAA/DoD Aging Aircraft Conference, 2001
- [6] 吕文林, 张宝珍. 轮盘低周疲劳寿命的可靠性研究 [J]. 航空动力学报, 1995, 10(2).
- [7] 陆 山, 吕文林. 轮盘低周疲劳寿命可靠性分析新方法 [J]. 航空学报, 1997, 18(2): 135~138.
- [8] 高振同, 蒋新桐. 疲劳性能试验设计和数据处理 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1999.
- [9] 唐俊星. 轮盘低周疲劳寿命可靠性分析方法研究及应用 [D]. 西安: 西北工业大学, 2004
- [10] 王 仁, 熊祝华, 王文彬. 塑性力学基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1982

(编辑: 梅 瑛)