

电弧喷射推力器流动区域电磁场数值解法^{*}

肖应超

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100083)

摘 要: 为了有效地进行电弧喷射推力器流动区域全场 (流场、电场、磁场和化学反应) 耦合数值模拟并揭示其电磁场特征, 建立了适当的电磁场模型, 对电磁场控制方程的数值解法进行了详细研究。模型基于推力器稳态工作特征, 控制方程由麦克斯韦方程组简化得到, 采用有限控制容积积分方法离散椭圆型控制方程, 采用 9 种不同的迭代方法求解离散方程。给出了不同迭代方法的收敛速度、数值稳定性和最终精度。研究表明, Gauss-Seidel 逐线超松弛迭代法是推力器流动区域电磁场离散方程的一种快速有效的数值解法。

关键词: 电弧喷射发动机; 电磁场; 模型; 数值算法

中图分类号: V439 文献标识码: A 文章编号: 1001-4055 (2005) 01-0068-05

Numerical solution for electromagnetic field within arcjet thruster flow region

XIAO Ying-chao

(School of Astronautics, Beijing Univ. of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract To achieve coupling numerical simulation of the whole fields including flow field, electric field, magnetic field and chemical reaction efficiently and to illustrate the characteristic of electromagnetic field within arcjet thruster flow region, an appropriate electromagnetic field model was established and detailed investigation on numerical solution for it was carried out. The electromagnetic field model was based upon the steady-state operating characteristic of the thruster and the control equation was simplified from Maxwell's equations. Finite control volume integral method was adopted to discretize the elliptic control equation and nine different iteration techniques were introduced to solve the discretized equation numerically. Convergence speed, stability of solution and ultimate precision of each iteration technique are presented. The investigation indicates that Gauss-Seidel successive line over relaxation method is an efficient numerical solution in this instance.

Key words Arcjet engine; Electromagnetic field; Model; Numerical algorithm

1 引 言

电弧喷射推力器 (Arcjet) 内部流动过程伴随着复杂的电磁现象, 电能输入作用对推力器性能具有决定性影响, 在对其进行全场耦合数值模拟时流体力学方程组中必然要加入电磁源项且其计算显得极其重要。为了准确计算电磁源项并揭示推力器内部电磁场特征, 需要建立合理的电磁场模型并对其进行数值求解, 电磁场控制方程数值求解收敛与否是全流场耦合数值模拟成功与否的关键, 其求解收敛速度直接影响着全流场耦合数值模拟的效率, 而其求解收敛精度对全流

场耦合数值模拟 also 具有重要意义, 因此需要寻求一种快速有效的电磁场数值解法。文献 [1] 采用了多重网格法对近似模拟电场的电势方程进行了求解, 而本文建立了电弧喷射推力器流动区域电磁场模型, 从麦克斯韦方程组出发推导出了电磁场控制方程, 并对其数值解法进行了详细研究, 找到了一种快速有效的方法, 对推力器全流场耦合数值模拟具有重要意义。

2 电磁场模型

根据推力器稳态工作特点^[2], 为了比较完善地反映其流动区域电磁场特征并有效地对电磁场进行

* 收稿日期: 2004-04-23 修订日期: 2004-07-06

基金项目: 博士生创新性研究基金; 国防基础科研项目 (K1201060711); 国家自然科学基金资助项目 (50086001)。

作者简介: 肖应超 (1979-), 男, 博士生, 研究领域为航空宇航推进理论与工程。

数值求解, 其流动区域电磁场模型包含以下内容:

- (1) 电磁场为稳态电磁场, 不考虑其时变性, 流动区域中没有位移电流;
- (2) 不考虑除洛伦兹力外的其它非静电力对传导电流的贡献;
- (3) 不考虑媒质在磁场中的磁化, 磁导率为自由空间磁导率;
- (4) 流动区域中媒质为非均匀、线性、各向同性媒质, 没有分界面;
- (5) 电磁场为轴对称电磁场, 忽略磁感应强度的轴向分量和径向分量。

3 麦克斯韦方程组和电磁场基本理论^[3-6]

麦克斯韦方程组的非限定形式为

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t \\ \nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{cases} \quad (1)$$

式中第一方程式是安培全电流定律, 第二方程式是法拉第电磁感应定律, 第三方程式是磁通连续性原理,

第四方程式是电场的高斯定律; $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{J}$, ρ 分别为电通密度、电场强度、磁感应强度、磁场强度、

传导电流面密度和自由电荷体密度; 方程 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 并不独立, 它的存在与否并不影响方程组的正确性与完备性, 但它的存在使得方程组具有对称性, 也为方程组的求解提供了方便; 麦克斯韦方程组的非限定形式适用于任何媒质, 因此仅由以上四个基本方程还无法求解电磁场的具体分布, 需要补充与媒质电磁特性有关的方程; 电磁场量之间的关系与媒质电磁特性有关, 这称为媒质本构关系, 可由下式体现:

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}' \end{cases} \quad (2)$$

ϵ , μ , σ 分别为媒质的介电常数、磁导率和电导率, 对于均匀、线性、各向同性媒质它们是与电磁场量无关的常数, 对于非均匀媒质它们是坐标的函数, 对于非线性媒质它们是电磁场量的函数, 对于各向异性媒质它们成为张量, $\vec{J}'$ 是非静电力引起的传导电流; 式 (2) 称为麦克斯韦方程组的辅助方程, 将它代入式 (1) 就可得到麦克斯韦方程组的限定形式。

由麦克斯韦方程组的非限定形式可知, 自由电荷和传导电流是外来的已知量, 它们的分布和电磁场中

媒质的分布是确定电磁场的外部条件, 再加上分界面上的衔接条件, 就可以全面概括电磁场的规律, 麦克斯韦方程组的限定形式和分界面上的衔接条件加上一定的边界条件和初始条件, 就可以确定这些客观条件下电磁场的时空分布。

4 电磁场控制方程

基于本文 Arcjet 流动区域电磁场模型, 从麦克斯韦方程组出发, 可以推导出其流动区域电磁场控制方程。不涉及到自由电荷体密度的计算, 考虑带电粒子在磁场中运动受到的洛伦兹力对传导电流的贡献和方程组的封闭性, 首先可以得到

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \end{cases} \quad (3)$$

在轴对称、电磁场量对角向坐标偏导数为零的前提下, 可以得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial B_r}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial r} \right) \right] = \mu_0 \frac{\partial}{\partial x} (u B_r - v B_x) \\ \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{r}{\sigma} \left(\frac{\partial B_r}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial r} \right) \right] = \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} (r B_r - v B_x) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\partial B_\theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{\sigma r} \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} \right] = \\ \mu_0 \left[\frac{\partial}{\partial x} (u B_\theta - w B_x) + \frac{\partial}{\partial r} (v B_\theta - w B_r) \right] \end{cases} \quad (4)$$

忽略磁感应强度的轴向分量 B_x 和径向分量 B_r , 令 $\Psi = r B_\theta$, 并分别用 x , y 表示轴向坐标和径向坐标, 可以得到电磁场控制方程在物理平面上的形式

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sigma y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\sigma y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] = \\ \left| \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu_0}{y} u \Psi \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu_0}{y} v \Psi \right] \right| \end{cases} \quad (5)$$

同时还可以推导出

$$\begin{cases} J_x = \frac{1}{\mu_0 y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ J_y = -\frac{1}{\mu_0 y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ E_x = \frac{1}{\mu_0 y \sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - v B_\theta \\ E_y = -\frac{1}{\mu_0 y \sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + u B_\theta \end{cases} \quad (6)$$

给定边界条件后, 先求解电磁场控制方程 (5) 得到 B_θ , 然后便可求得 J_x , J_y , E_x , E_y , 这样就得到了推力器

流动区域电磁场模型中的全部电磁场量。

5 电磁场控制方程的离散^[2,7]

为了方便对电磁场控制方程(5)进行离散,首先将其转化到计算平面上,电磁场控制方程在计算平面上的形式为

$$\left| \frac{\Gamma_1}{J} (\alpha \Psi_\xi - \beta \Psi_\eta) \right|_\xi + \left| \frac{\Gamma_1}{J} (\gamma \Psi_\eta - \beta \Psi_\xi) \right|_\eta = \frac{(\Gamma_2 \Psi W_1)_\xi + (\Gamma_2 \Psi W_2)_\eta}{\Gamma_2} \quad (7)$$

式中 $\Gamma_1 = 1/\sigma_y$, $\Gamma_2 = \mu_0/\gamma$, 采用有限控制容积积分方法对式(7)进行积分,整理可得离散的代数方程

$$C_p \cdot \Psi_p = C_E \cdot \Psi_E + C_S \cdot \Psi_S + C_W \cdot \Psi_W + C_N \cdot \Psi_N + C_A \quad (8)$$

对方程(8)可以采用不同的迭代方法进行求解。

6 离散方程的数值解法

对于有二维物理边界的代数方程(8)可以采用逐点迭代法或逐线迭代法进行迭代求解,不同的迭代方法有着不同的计算效果,下面将对这些方法进行比较研究,寻找出一种快速有效的迭代方法。

6.1 逐点迭代法

逐点迭代法可分为 Jacobi 逐点迭代法、Gauss-Seidel 逐点迭代法和 Gauss-Seidel 逐点超松弛迭代法。

Jacobi 逐点迭代法全部采用相关点的旧值进行迭代点的新值计算,迭代公式为

$$\Psi_p^{(n)} = (C_E \cdot \Psi_E^{(n-1)} + C_S \cdot \Psi_S^{(n-1)} + C_W \cdot \Psi_W^{(n-1)} + C_N \cdot \Psi_N^{(n-1)} + C_A) / C_P \quad (9)$$

Gauss-Seidel 逐点迭代法尽量采用相关点的新值进行迭代点的新值计算,迭代公式为

$$\Psi_p^{(n)} = (C_E \cdot \Psi_E^{(n-1)} + C_S \cdot \Psi_S^{(n)} + C_W \cdot \Psi_W^{(n)} + C_N \cdot \Psi_N^{(n-1)} + C_A) / C_P \quad (10)$$

Gauss-Seidel 逐点超松弛迭代法的迭代公式为

$$\begin{cases} \overline{\Psi_p^{(n)}} = (C_E \cdot \Psi_E^{(n-1)} + C_S \cdot \Psi_S^{(n)} + C_W \cdot \Psi_W^{(n)} + C_N \cdot \Psi_N^{(n-1)} + C_A) / C_P \\ \Psi_p^{(n)} = \omega \cdot \overline{\Psi_p^{(n)}} + (1.0 - \omega) \Psi_p^{(n-1)} \end{cases} \quad (11)$$

ω 为超松弛因子,当 $\omega = 1.0$ 时就是 Gauss-Seidel 逐点迭代法。

6.2 逐线迭代法

同样逐线迭代法可分为 Jacobi 逐线迭代法、Gauss-Seidel 逐线迭代法和 Gauss-Seidel 逐线超松弛迭代法,逐线迭代法需要求解三对角方程,三对角方

程可采用追赶法求解^[8],下面只给出沿轴线方向扫描的逐线迭代法迭代公式。

Jacobi 逐线迭代法迭代公式为

$$-C_S \cdot \Psi_S^{(n)} + C_P \cdot \Psi_P^{(n)} - C_N \cdot \Psi_N^{(n)} = C_E \cdot \Psi_E^{(n-1)} + C_W \cdot \Psi_W^{(n-1)} + C_A \quad (12)$$

Gauss-Seidel 逐线迭代法迭代公式为:

$$-C_S \cdot \Psi_S^{(n)} + C_P \cdot \Psi_P^{(n)} - C_N \cdot \Psi_N^{(n)} = C_E \cdot \Psi_E^{(n-1)} + C_W \cdot \Psi_W^{(n)} + C_A \quad (13)$$

Gauss-Seidel 逐线超松弛迭代法在每条线迭代后还要引入超松弛因子 ω 进行超松弛处理,当 $\omega = 1.0$ 时就是 Gauss-Seidel 逐线迭代法。

6.3 交替方向隐式(ADI)迭代法

交替方向隐式(ADI)迭代法在同一步迭代中要在两个方向进行逐线迭代,可分为 Jacobi ADI 迭代法、Gauss-Seidel ADI 迭代法和 Gauss-Seidel ADI 超松弛迭代法,迭代公式参见逐线迭代法迭代公式。

7 结果及讨论

采用 Jacobi 逐点迭代法,相对误差收敛到 10^{-9} 量级需要 959 个迭代步,最终收敛精度 10^{-15} 量级,迭代过程稳定。采用 Gauss-Seidel 逐点迭代法,相对误差收敛到 10^{-9} 量级需要 504 个迭代步,最终收敛精度 10^{-16} 量级,迭代过程稳定。采用 Gauss-Seidel 逐点超松弛迭代法,超松弛因子决定着收敛速度、迭代过程稳定性和最终收敛精度,超松弛因子太大或太小均会导致收敛速度降低,因此存在使得收敛速度最快的最佳超松弛因子,目前还没有特别有效的选取最佳超松弛因子的方法,本文采用试算法,最佳超松弛因子为 1.69,相对误差收敛到 10^{-9} 量级只需要 79 个迭代步,最终收敛精度 10^{-14} 量级,迭代过程稳定。太大的超松弛因子还会引起数值波动和最终收敛精度的很快降低,当达到 2.0 时迭代过程发散,在使得最终收敛精度最高的超松弛因子附近最终收敛精度变化不大,研究表明通常使得最终收敛精度最高的超松弛因子比最佳超松弛因子要小一些。图 1 为逐点迭代法迭代过程曲线。

采用 Jacobi 逐线迭代法,相对误差收敛到 10^{-9} 量级需要 196 个迭代步,最终收敛精度 10^{-16} 量级,迭代过程非常稳定。采用 Gauss-Seidel 逐线迭代法,相对误差收敛到 10^{-9} 量级需要 107 个迭代步,最终收敛精度 10^{-16} 量级,迭代过程非常稳定。采用 Gauss-Seidel 逐线超松弛迭代法,最佳超松弛因子为 1.46

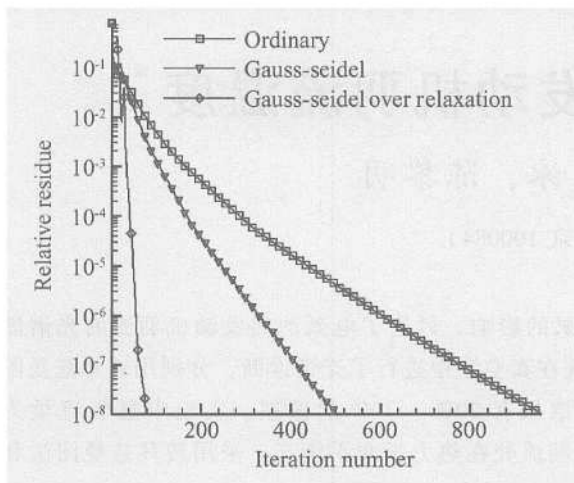


Fig 1 Convergence processes of point iteration techniques

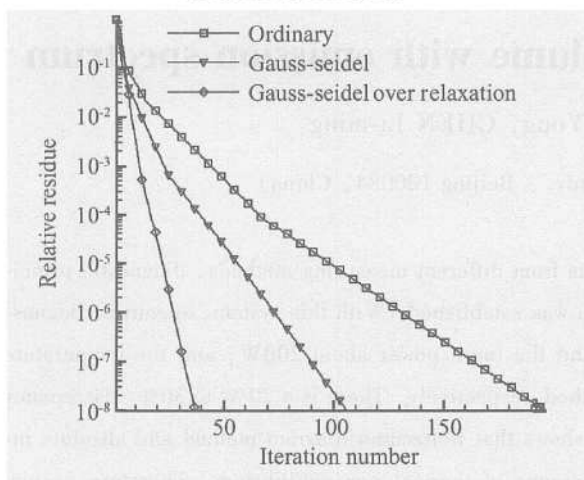


Fig 2 Convergence processes of line iteration techniques

相对误差收敛到 10^{-9} 量级只需要 38 个迭代步, 最终收敛精度 10^{-15} 量级, 迭代过程稳定。图 2 为逐线迭代法迭代过程曲线。

采用 JacobiADI 迭代法, 相对误差收敛到 10^{-9} 量级需要 137 个迭代步, 最终收敛精度 10^{-16} 量级, 迭代过程非常稳定。采用 Gauss-SeidelADI 迭代法, 相对误差收敛到 10^{-9} 量级需要 75 个迭代步, 最终收敛精度 10^{-16} 量级, 迭代过程非常稳定。采用 Gauss-SeidelADI 超松弛迭代法, 两个方向的最佳超松弛因子分别为 1.53 和 1.45, 相对误差收敛到 10^{-9} 量级只需要 22 个迭代步, 最终收敛精度 10^{-15} 量级, 迭代过程非常稳定。图 3 为 ADI 迭代法迭代过程曲线。

以上 9 种迭代方法都能够稳定有效地求解 Arcjet 流动区域电磁场离散方程。总体来说, 相对误差收敛到相同的精度, 逐线迭代法比逐点迭代法需要的迭代步数少得多, Gauss-Seidel 迭代法比 Jacobi 迭代法需要的迭代步数少得多, 最佳超松弛因子下的超松弛迭代法比 Gauss-Seidel 迭代法需要的迭代步数

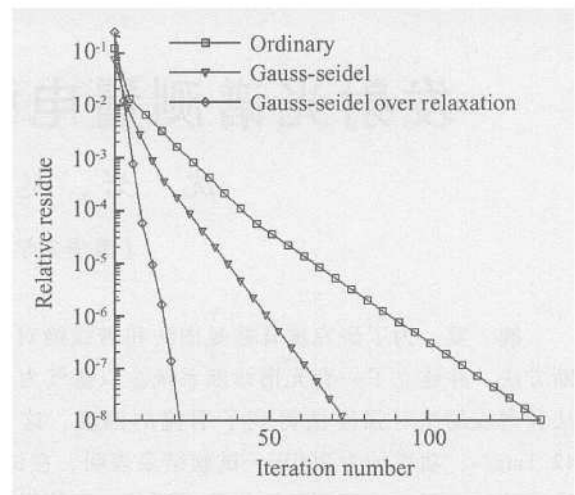


Fig 3 Convergence processes of ADI iteration techniques

少得多, ADI 迭代法比单方向逐线迭代法需要的迭代步数少得多, 但不同迭代法每步迭代计算时间不同, 一般总计算时间没有迭代步数差距明显, 对于本文 Arcjet 流动区域电磁场离散方程的迭代求解来说, 沿轴线方向扫描的逐线迭代法比 ADI 迭代法的计算效率还要稍高, 沿轴线方向扫描的 Gauss-Seidel 逐线超松弛迭代法计算效率最高, 同时也具有很高的最终收敛精度和迭代过程稳定性, 是求解 Arcjet 流动区域电磁场离散方程的一种快速有效的方法, 将其应用于全场耦合数值模拟能获得较高的计算效率, 相对误差收敛到 10^{-9} 量级早足以满足全场耦合数值模拟的收敛性、稳定性和精度要求。

对电磁场控制方程的有效求解揭示了 Arcjet 流动区域电磁场特征, 图 4 给出了电流密度矢量线。由于冷气流的不断注入, 在压缩室入口之前, 气体几乎没有电离, 所以几乎没有导电能力, 电流密度几乎为零, 由于电弧受到了冷气流的冲击压缩作用, 在压缩室轴线附近电流密度很大, 电弧能量输入作用很强, 由于电流在阴极尖端的集中, 这里的电流密度非常大, 由于电弧与推进剂气体之间的物质能量交换, 在压缩室壁面附近及压缩室出口之后高温电离气体具有一定的电离度和导电能力, 电流密度大小具有一定数值, 计算结果与理论分析相吻合, 肯定了本文电磁场模型的合理性和数值计算方法的有效性。

8 结 论

本文简要总结了电磁场核心理论, 在建立 Arcjet 流动区域电磁场模型的基础上, 从麦克斯韦方程组出发, 推导出了电磁场控制方程, 采用 (下转第 96 页)

明, S-2玻璃纤维试件的抗轴压性能比抗剪切性能更突出;另一方面说明, 轴压载荷主要是由纵向纤维承担, 混杂试件的纵向纤维采用 S-2玻璃纤维, 环向纤维保持 F12纤维不变, 试件整体能显著提高抗轴压能力。

5 结 论

(1)与 F12单一纤维复合材料壳体相比, 混杂纤维复合材料壳体的抗外载荷能力明显增强。

在使用同一种基体材料 4304环氧树脂, 采用同样的缠绕工艺条件下, 将 8层纵向铺层由 F12纤维改为 S-2玻璃纤维, 混杂壳体的扭矩破坏载荷增加 33% (表 3), 轴压破坏载荷增加 112% (表 4)。

(2)混杂纤维复合材料壳体与 F12单一纤维复合材料壳体相比, 消极质量增加了 31%, 但与 S-2单一玻璃纤维复合材料壳体相比, 却降低了 24%。

可见, 采用 F12纤维与 S-2玻璃纤维复合材料混杂技术可以有效地兼顾发动机的质量系数和抗外载荷指标, 实现发动机综合性能的优化。

(3)由于碳纤维的抗压缩性能更优, 且质量更轻, 采用碳纤维的混杂复合材料更有利于提高导弹发

动机的质量系数和抗外载荷能力, 但经济性较差。今后, 应加强对碳纤维复合材料混杂技术的研究。

参考文献:

- [1] 曾庆敦. 复合材料的细观破坏机制与强度 [M]. 北京: 科学出版社, 2002
- [2] 世界导弹与航天发动机大全 [M]. 北京: 军事科学出版社, 1999
- [3] 吴连元. 板壳稳定性理论 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1996
- [4] Meshkov E. Investigation of the mechanical characteristics of unidirectional composites at static loading [J]. *Mech. Composite Mater.*, 1991, 27: 459~467.
- [5] Mao R J Williams F W. Nonlinear analysis of cross-ply thick cylindrical shells under axial compression [J]. *Int J. Solids Structures*, 1998, 35(17).
- [6] Dongyao Tan. Torsional buckling analysis of thin and thick shells of revolution [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37: 3035~3078

(编辑: 梅 瑛)

(上接第 71 页)

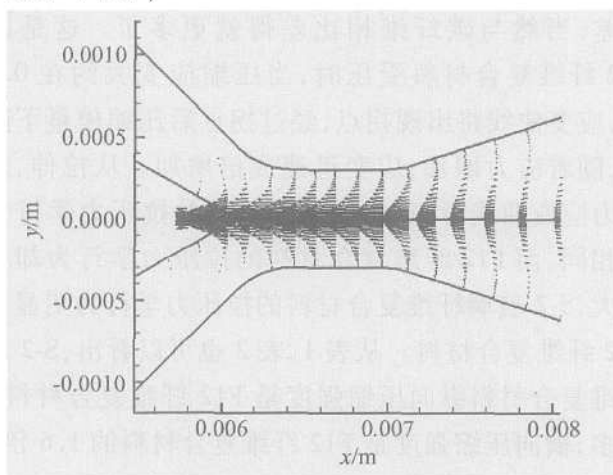


Fig 4 Current density vector

有限控制容积积分方法对控制方程进行离散, 并成功采用 9 种不同迭代方法对离散方程进行迭代求解。研究表明, Gauss-Seidel 逐线超松弛迭代法具有很快的收敛速度, 同时也具有很高的最终收敛精度和迭代过程稳定性, 是求解 Arcjet 流动区域电磁场离散方程的一种快速有效的方法, 将其应用于 Arcjet 全场耦合数值模拟能够获得较高的计算效率。本文 Arcjet 流动区域电磁场的数值解法对电磁流体电磁

场的数值求解具有广泛的参考意义。

参考文献:

- [1] 廖宏图, 吴铭岚, 汪南豪. 电弧喷射器流场模拟中电场计算的多重网格法 [J]. 推进技术, 1999, 20(5). (LIAO Hong-tu, WU Ming-lan, WANG Nan-hao. Calculation of electric field using multigrid method in numerical simulation of arcjet flow field [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 1999, 20(5).)
- [2] 肖应超, 汤海滨. 电弧等离子体发动机数值仿真计算研究 [D]. 北京: 北京航空航天大学, 2003
- [3] 杨显清, 赵家升, 王 园. 电磁场与电磁波 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2003
- [4] 陈 重, 崔正勤. 电磁场理论基础 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2003
- [5] 吴 季等译. 电磁波理论 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2003
- [6] 冯慈璋, 马西奎. 工程电磁场导论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2000
- [7] 陶文铨. 数值传热学 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1988
- [8] 颜庆津. 数值分析 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2000

(编辑: 梅 瑛)