

基于 Homotopy 算法发动机固定阶鲁棒控制*

孙护国, 李华聪, 樊思齐

(西北工业大学 动力与能源学院, 陕西 西安 710072)

摘 要: 针对某型涡扇发动机, 分析了 H_∞ , H_∞/H_2 和 μ 控制存在的不足, 提出了一种基于 Homotopy 算法发动机固定阶控制设计方法。采用规范形式控制器结构进行固定阶 H_∞/H_2 控制器设计, 推导出了固定阶 H_∞/H_2 控制器存在的必要条件, 使用 Homotopy 算法获得最优固定阶 H_∞/H_2 控制器的解。提出了将固定阶 H_∞/H_2 控制器与混合 μ 综合相结合获得固定阶混合 μ 控制器的策略。与全阶混合 μ 控制器不同, 固定阶混合 μ 控制器具有结构简单, 易于实现, 而其鲁棒性能和鲁棒稳定性与全阶 μ 控制器相近。使用该方法对某型涡扇发动机控制系统进行固定阶混合 μ 控制器设计, 仿真验证表明, 该控制系统其性能鲁棒性满足要求。

关键词: 航空发动机; 鲁棒控制; Homotopy 算法⁺; 仿真试验

中图分类号: V233.7

文献标识码: A

文章编号: 1001-4055(2005) 01-0050-04

Fixed-order robust control for a engine based on Homotopy algorithm

SUN Hu-guo LI Hua-cong FAN Si-qi

(School of Power and Energy, Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an 710072, China)

Abstract Focus on a turbo-engine the significant shortcomings of H_∞ , H_∞/H_2 and μ control is given. A new design method of fixed order mixed μ controller for turbofan engine is presented. Fixed order H_∞/H_2 controller is designed by use of a canonical controller construction form. Existent necessary conditions for an optimal fixed order H_∞/H_2 controller are derived. A homotopy algorithm is used to obtain the solution of an optimal fixed order H_∞/H_2 controller. A different control strategy of obtaining fixed order mixed μ controller is proposed that fixed order H_∞/H_2 controller incorporated into a mixed μ synthesis procedure. Comparison with a full order design, fixed order mixed μ controller reduce controller complexity and achieve robust performance levels similar to full order designs. The approach proposed is applied to turbo-engine fixed-order mixed μ controller design. The simulation results show that the robustness of controlled system performance is satisfied.

Key words Aircraft engine; Robust control; Homotopy algorithm⁺; Simulated test

1 引 言

现代航空发动机的控制系统采用鲁棒控制方法, 以保证其在一定的建模误差下仍能保持良好的稳定性以及动态性能^[1-3], 其中以 H_∞ , H_∞/H_2 , μ 控制居多。但这些现代鲁棒控制方法, 存在着一个内在的不足, 即: 综合所得的全阶控制器的阶数很高。解决该问题的途径之一就是采用模型降阶技术或对所设计的控制器在实现时进行降阶处理或对被控对象模型

降阶后再设计控制器。文献 [3] 对闭环控制系统的鲁棒性能考虑较少。避免出现高阶控制器的另一个途径是在设计时预先对控制器的阶数施加一个约束即进行固定阶控制器的设计。固定阶控制器的设计会在设计方程中增加新的附加方程, 这就使得获得控制器的解更加复杂和困难。文献 [4] 提供一个规范形式的控制器结构, 使其自由参数数目降至最小, 再将其扩展到系统, 这样控制器设计问题就转化为静态增益输出反馈问题。文献 [5] 使用微分方法推导出

* 收稿日期: 2004-07-18 修订日期: 2004-11-02

作者简介: 孙护国 (1966—), 男, 博士生, 研究领域为航空发动机先进鲁棒控制理论及应用。

Email: huguosen@ hotmail.com

了固定阶控制器存在的必要条件并用共扼梯度法获得控制器的解。它们都未涉及到利用 μ 鲁棒控制理论设计 μ 控制器问题。本文利用静态输出反馈的问题中的某些特殊结构, 采用规范形式的控制器结构, 给出固定阶 $H_\infty H_2$ 控制器设计方程, 运用 Homotopy 算法获得固定阶 $H_\infty H_2$ 控制器的解, 再将其应用到 μ 鲁棒控制理论 $D-K$ 迭代, 进行发动机固定阶混合 μ 控制器的综合。

2 $H_\infty H_2$ 控制问题及 Homotopy 算法

考虑具有如下特定结构的航空发动机线性定常系统的输出反馈控制器的设计问题并假设 (A, B_1, C_1) , (A, B_2, C_2) 和 (A, B_p, C_p) 是能控且能观测的。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_p w_p + B_1 w + B_2 u \\ z_p &= C_p x + D_{lp} u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{2p} w_p + D_{21} w + d_{22} u\end{aligned}\quad (1)$$

式中 $x \in R^n$ 是发动机的状态变量, $w_p \in R^{m_p}$ 和 $z_p \in R^{n_p}$ 分别为 H_2 控制问题定义的输入向量和输出向量。 $w \in R^m$ 和 $z \in R^{n_z}$ 分别为 H_∞ 控制问题定义的输入向量和输出向量。 $u_p \in R^{m_u}$, $y \in R^{n_y}$, 分别为控制向量和量测向量。设控制器为

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u_p &= C_c x_c\end{aligned}\quad (2)$$

式中 $x_c \in R^{n_c}$ 是待定维数控制器的状态向量。 (A_c, B_c, C_c) 为控制器状态空间的最小实现。

式 (2) 为通常控制器结构形式。控制器设置为一般形式的缺点是待求的参数过多, 为了避免待求参数过多问题, 控制器结构采用文献 [4] 使用的控制器规范形式即控制器采用如下形式

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= P^0 x_c + N^0 u_c - N^0 y \\ u_c &= -P x_c \\ u &= -H x_c\end{aligned}\quad (3)$$

式中 $x_c \in R^{n_c}$, $u_c \in R^{m_u}$, P 和 H 是待求的自由参数矩阵。 P^0 和 N^0 是由文献 [4] 定义的 0 和 1 组成的固定参数矩阵。采用规范形式控制器后, 控制系统扩展为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \bar{A} x + \bar{B}_p w_p + \bar{B}_1 w + \bar{B}_2 u \\ z_p &= \bar{C}_p x + \bar{D}_{lp} u \\ z &= \bar{C}_1 x + \bar{D}_{12} u\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \bar{C}_2 x \\ \bar{u} &= -G y\end{aligned}$$

$$\text{式中 } \bar{x} = \begin{bmatrix} x_p \\ x_c \end{bmatrix}, \bar{u} = \begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} A_p & O \\ -N^0 C_2 & P^0 \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_p = \begin{bmatrix} B_p \\ -N^0 D_{2p} \end{bmatrix}, \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_2 \\ -N^0 D_{21} \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} B_{2p} & 0 \\ -N^0 D_{22} & N^0 \end{bmatrix}, \bar{C}_p = \begin{bmatrix} C_p & d \end{bmatrix}, \\ \bar{D}_{lp} = \begin{bmatrix} D_{lp} & d \end{bmatrix}, \bar{C}_1 = [C_1 \quad 0], \bar{D}_{12} = [\bar{D}_{12} \quad 0], \\ \bar{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} H \\ P \end{bmatrix}.$$

控制器结构采用规范形式后, 待设计矩阵 G 的自由参数最少且扩展后的控制系统是一个静态输出反馈系统。由式 (4) 可得闭环控制系统为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\bar{A} - \bar{B}_2 G \bar{C}_2) \bar{x} + \bar{B}_1 w + \bar{B}_p w_p + \bar{B}_1 w \\ &= \tilde{A} \bar{x} + \tilde{B}_p w_p + \tilde{B} w\end{aligned}\quad (5)$$

$$z_p = (\bar{C}_p - \bar{D}_{lp} G \bar{C}_2) \bar{x} = \tilde{C}_p \bar{x}$$

$$z = (\bar{C}_1 - \bar{D}_{12} G \bar{C}_2) \bar{x} = \tilde{C} \bar{x}$$

对于 H_2 控制问题, 其控制目标是最小化从扰动输入 w_p 到性能输出 z_p 传递函数 $T_{z_p w_p}$ 的 2 范数即使 $\|T_{z_p w_p}\|_2$ 的值最小。对于 H_∞ 控制问题, 其控制目标是使从扰动输入 w 到性能输出 z 传递函数 $T_{z w}$ 的 ∞ -范数小于给定值 γ 即 $\|T_{z w}\|_\infty \leq \gamma$

对于混合 $H_\infty H_2$ 控制问题, 其控制目标的性能是在 H_∞ 控制问题的性能与 H_2 控制问题的性能之间综合考虑。为了获得固定阶 $H_\infty H_2$ 控制器的最优解, 引入 Lagrangian 函数, 设

$$\begin{aligned}L(Q_\infty, L, X, L_p, G) &= \text{tr}\{Q_\infty \tilde{B} \tilde{B}^T + (\tilde{A}^T Q_\infty + \\ &Q_\infty \tilde{A} + \tilde{C}^T \tilde{C} + \gamma^{-2} Q_\infty \tilde{B} \tilde{B}^T Q_\infty) L + \\ &\lambda \tilde{C}_p^T \tilde{C}_p + (\tilde{A} X + X \tilde{A}^T + \tilde{B}_p \tilde{B}_p^T) L_p\}\end{aligned}\quad (6)$$

式中 L 为拉格朗日算子。权值 λ 大小取决于设计人员在 H_2 性能与 H_∞ 性能之间权衡。固定阶 $H_\infty H_2$ 最优固定阶控制器存在的必要条件

$$\begin{aligned}\partial L / \partial Q_\infty &= (\tilde{A} + \gamma^{-2} \tilde{B} \tilde{B}^T Q_\infty) L + L (\tilde{A}^T + \\ &\gamma^{-2} \tilde{B} \tilde{B}^T Q_\infty)^T + \tilde{B} \tilde{B}^T = 0 \\ \partial L / \partial L &= \tilde{A}^T Q_\infty + Q_\infty \tilde{A} + \tilde{C}^T \tilde{C} + \\ &\gamma^{-2} Q_\infty \tilde{B} \tilde{B}^T Q_\infty = 0\end{aligned}$$

$$\partial L / \partial \tilde{X} = \tilde{A}^T L_p + L_p \tilde{A} + \lambda \tilde{C}_p^T \tilde{C}_p = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \partial L / \partial L_p &= \tilde{A} X + X \tilde{A}^T + \tilde{B}_p \tilde{B}_p^T = 0 \\ \partial L / \partial G &= 2(\tilde{D}_{12}^T \tilde{D}_{12} G \tilde{C}_2 \tilde{L} \tilde{C}_2^T - \tilde{D}_{12}^T \tilde{C}_1 \tilde{L} \tilde{C}_2^T - \\ &\quad \tilde{B}_2^T Q_\infty \tilde{L} \tilde{C}_2^T - \tilde{N} \tilde{D}_{1p}^T \tilde{C}_p X \tilde{C}_2^T + \\ &\quad \tilde{N} \tilde{D}_{1p}^T \tilde{D}_{1p} G \tilde{C}_2 X \tilde{C}_2^T - \tilde{B}_2^T L_p X \tilde{C}_2^T) = 0 \end{aligned}$$

非线性矩阵方程组式(7)即为固定阶 H_∞/H_2 控制器存在的必要条件, 求解式(7)可获得一族 $(\gamma$ 与 $\lambda)$ 满足要求的固定阶控制器。文献[5]使用共扼梯度算法求解固定阶控制器问题, 该算法的缺点是算法复杂且当接近最优解时收敛较慢。基于代数和微分同胚的 Homotopy 算法在近几年许多重要问题及数学迭代问题获得成功应用, 引起了极大的关注。与其它算法相比, Homotopy 算法在最优控制器的综合方面更有吸引力。Homotopy 算法基本思想是把一个具有简单已知解的问题通过变化同伦参数使之变形为具有期望解的问题。该算法的优点是其最优解不依赖问题的初始条件且具有全局收敛性。关于同伦算法的详细说明参见文献[6]。

3 μ 控制理论分析及固定阶混合 μ 控制算法

考虑图 1 混合 μ 鲁棒控制问题, 图中 P 代表系统的开环联接, 它包含所有已知环节, 如标称对象模型 P_0 , 不确定性加权函数; Δ 代表范数有界结构化不确定性摄动模型; K 表示 μ 调节器; P 有三个输入向量: 摄动 w , 控制作用量 u , Δ 输出的扰动 d ; 三个输出向量: 性能向量 z , Δ 输入的摄动 e , 量测输出 y 。

控制系统 $M \in C^{n \times n}$ 是由 P 与 K 下闭合决定的内联矩阵, 其线性分式为

$$M = F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (8)$$

结构奇异值 $\mu_\Delta(M)$ 定义为

$$\mu_\Delta(M) = \begin{cases} \max_{\Delta \in \Delta} \{\sigma(\Delta) : \Delta \in \Delta\} & \text{if } \det(I - M \Delta) = 0 \\ 0 & \text{if } \det(I - M \Delta) \neq 0 \forall \Delta \in \Delta \end{cases}^{-1}$$

式中 $\Delta = \{\text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_F]\}$:

$$\delta_i \in C, \Delta_j \in C^{m_j \times m_j}, 1 < i \leq s, 1 \leq j \leq F$$

$$B\Delta = \{\Delta \in \Delta : \sigma(\Delta) \leq 1\} \sum_{i=1}^s r_i + \sum_{j=1}^F m_j = n$$

基于结构奇异值鲁棒控制理论的 μ 控制理论在鲁棒性能分析与综合的统一框架内使用结构奇异值 μ 作为鲁棒性能和鲁棒稳定性的度量, 结构奇异值 μ

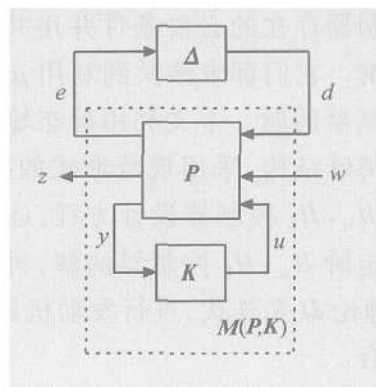


Fig 1 LFT framework for μ general synthesis and analysis

(μ) 的值是对控制系统进行鲁棒稳定性分析和性能鲁棒性评估与检验的关键, 结构奇异值 $\mu(\bullet)$ 的大小与给定摄动块的结构、类型、块的数目及每个块的维数有关。 μ 综合问题就是设计一个满足式(9)的控制器 K

$$\inf_{K \in K_s} \sup_{\omega \in R} \mu(M(P, K)(j\omega)) \quad (9)$$

式中 $\mu(M(P, K))$ 是控制对象 P 和控制器 K 的线性分式变换。 K_s 是能使控制对象 P 稳定的实有理控制器的集合。

从定义很难找到有效计算其值的方法。 $\mu(M)$ 近似计算方法是用 $\sigma(DF_l(P, K_\mu)D^{-1})$ 的最小值近似代替的 $\mu_\Delta(M(P, K))$ 。这样, μ 综合问题就转化

$$\inf_{K \in K_s} \sup_{\omega \in R} \inf_{D \in D} \sigma(DF_l(P, K)D^{-1}) \quad (10)$$

全阶混合 μ 控制器综合问题的算法是先让 D 保持不变, 求出该条件下 K , 再让 K 保持不变求出该条件下最小度量矩阵 D 的估计矩阵, 如此 $D-K$ 交替进行寻优。 $D-K$ 迭代寻优提供了一个即能保证鲁棒稳定性又能保证鲁棒性能的系统化的求解混合 μ 调节器 K 的方法。其中, $D-K$ 迭代前一步是一个标准的 H_∞ 设计问题。

使用 $D-K$ 迭代进行 μ 综合所得的全阶混合 μ 控制器阶数较高, 这是因为经度量矩阵增广的广义控制系统维数增加, 相应混合 μ 控制器阶数增加。为了解决该问题, 本文使用的方法是进行固定阶混合 μ 控制器设计即在 μ 综合 $D-K$ 迭代的第一阶段使用前面所设计的固定阶 H_∞/H_2 控制器代替全阶 H_∞ 控制器, 这样 μ 综合所得的控制器阶数就会明显下降。

固定阶混合 μ 控制器设计的关键是获得固定阶控制器的初始猜值以便使用 Homotopy 算法解非线性方程组(7)获得固定阶 H_∞ 控制器, 再将其用于 $D-K$ 迭代的第一阶段代替全阶 H_∞ 控制器, 进行固定阶混

合 μ 控制器阶的设计。

其算法为 (1) 对发动机进行全阶混合 μ 控制器综合; (2) 利用降阶技术, 如 Schur 均衡降阶方法、最优 Hankel 范数降阶方法, 在保证闭环系统稳定的条件下将全阶混合 μ 控制器阶数降至期望的阶数, 用它作为固定阶控制器的初始猜值; (3) 使用 Homotopy 解式 (7) 非线性方程组获得固定阶 $H_\infty H_2$ 控制器; (4) 二次使用 μ 综合且在 $D-K$ 迭代第一阶段进行前, 用所设计的固定阶 $H_\infty H_2$ 控制器替换 $D-K$ 迭代中的全阶 H_∞ 控制器, 再进行 $D-K$ 迭代, 这样 μ 综合所得的控制器即为固定阶混合 μ 控制器。

4 在某型涡扇发动机上的应用

在飞行包线内, 对某型涡扇发动机非线性模型进行线性化处理, 按最大工作状态调节规律, 选取高度 $H = 10\text{km}$, 马赫数 $Ma = 1.1$ 时的发动机的模型为标称模型 P_0 , 飞行区域其它各点的模型视为相对于标称模型的摄动。在设计点, 发动机广义模型为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

式中 $x = [n_H, n_L, m_b, A_8]^T$, $u = [u_b, u_2]^T$, $y = [n_H, \pi_T]^T$ 。

在该飞行区域其他非设计点时, 模型摄动是 Δ 且 $\|\Delta\|_\infty \leq 1$, 权函数为 W_b , 实际系统的模型:

$P = \{P_0(I + \Delta W_1) : \Delta \text{ 是稳定的, } \|\Delta\|_\infty \leq 1\}$ 分别选取恰当模型误差的权函数 W_1 和系统性能权函数 W_n 。

按 2 节的设计步骤, 获得的航空发动机全阶混合 μ 控制器为 18 阶控制器, 经 Schur 均衡降阶方法可获得 9 阶 μ 控制器, 航空发动机固定阶混合 μ 控制器阶数是 5 阶。在给定的不确定性条件下时, 三种控制器均能使发动机控制系统稳定工作, 与它们相对应的发动机控制系统鲁棒性能有所不同。图 2 所示的是在标准大气条件下, 对发动机控制系统在非设计点 $H = 5\text{km}$, $Ma = 1.3$ 时, n_H , π_T 分别在第 0s 第 3s 时的阶跃响应特性。由图可知固定阶发动机控制系统 (K_{fx}) 与全阶发动机控制系统 (K_{full}) 性能相近, 能够满意的跟踪输入信号, 稳态控制精度较高, 发动机控制变量之间耦合较小, 而降阶发动机控制系统 (K_{redu}) 性能差一些。其它非设计点的仿真结果与此类似。

5 结 论

大量仿真结果表明固定阶控制器设计方法应用到航空发动机控制系统是可行的。其优点是能够极大降低控制器的复杂性, 其性能与全阶控制系统相近, 较降阶控制器有明显的提高。

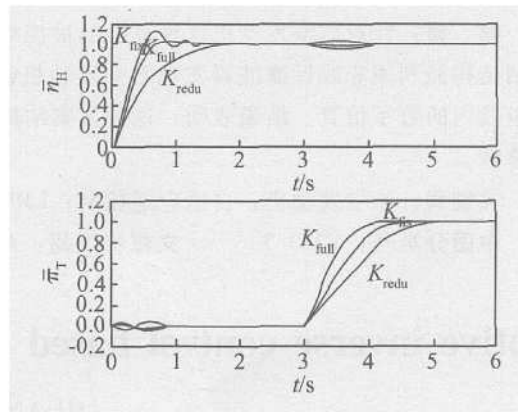


Fig 2 Step responses of the three systems

参考文献:

- [1] 王 曦, 姚 华. 弹用涡喷发动机鲁棒性能 μ 综合控制 [J]. 推进技术, 2003 24(3). (WANG Xi YAO Hua μ synthesis control with robust performance for missile turbojet engine [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2003 24(3).)
- [2] Nordgren R E, Gastineau Z, Adibbaia S. Robust multivariable turbofan engine control: A case study [C]. *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, 1994.
- [3] Balas Gary J, Jack Ryan. A new technique for design of controllers for turbofan engine [R]. AIAA-98-3751.
- [4] Sweriduk G D, Calise A J. Robust fixed order dynamic compensation: A differential game approach [C]. *Proceedings of the 1993 IEEE Conference on Aerospace Control Systems*, West Lake Village, CA, 1995.
- [5] Kramer F S, Calise A J. Fixed-order dynamic compensation for multivariable linear systems [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1998 11(1): 80~85.
- [6] Waston, Sosonkina M, Morgan R C. Algorithm 777: HOMPACK90: A suite of FORTRAN 90 codes for globally convergent homotopy-algorithm [R]. *ACM. Trans Math. Software*, 1997, 23: 514~558.

(编辑: 梅 瑛)