复合固体推进剂松弛模量与蠕变柔量转换关系*

阳建红[1,2], 刘朝丰[2], 徐景龙[2], 周 凯[2], 陈 飞[2],
岳应娟[2], 吕秋娟[2], 王佑君[2]

(1. 西安交通大学 材料科学与工程学院, 陕西 西安 710049; 2. 第二炮兵工程学院 机电工程系, 陕西 西安 710025)

摘 要: 以粘弹理论为基础, 采用 Volterra 算子, 建立了复合固体推进剂松弛模量和蠕变柔量之间的相互转换关系。结果表明: 由松弛模量计算蠕变柔量的理论值与实验值吻合; 该转换表达式避免了数值积分法求解蠕变柔量值产生舍入误差和采用拉氏变换的繁琐计算。研究方法可以用于固体推进剂其它力学参数的转换计算, 如体积松弛模量和体积蠕变柔量之间的转换计算。

关键词: 固体推进剂; 松弛; 蠕变; 弹性模量

中图分类号: V512.3 **文献标识码**: A **文章编号**: 1001-4055 (2004) 02-0159-03

Conversion relations between relaxation modulus and creep compliance of composite solid propellant

YANG Jian-hong[1], LIU Chao-feng[2], XU Jing-long[2], ZHOU Kai[2],
CHEN Fei[2], YUE Ying-juan[2], LÜ Qiu-juan[2], WANG You-jun[2]

(1. Dept. of Material Science and Engineering, Xi'an Jiaotong Univ., Xi'an 710049, China;
2. Dept. of Mechanics and Electrics, The Second Artillery Engineering Coll., Xi'an 710025, China)

Abstract: Based on viscoelastic theory, conversion relations between relaxation modulus and creep compliance of composite solid propellant was established. The results obtained from relaxation modulus show good agreement with experimental data of creep compliance. This expression avoids rounding error brought by numerical integral method and complex calculation of Laplace transforms. This method can be used in conversion of other mechanics parameters.

Key words: Solid propellant; Relaxation; Creep; Elastic modulus

1 引 言

复合固体推进剂应力松弛模量 $E(t)$ 与蠕变柔量 $J(t)$ 是粘弹性工程材料应力应变计算、固体火箭发动机装药结构完整性分析的重要参数。国家标准规定了 $E(t)$ 的标准测试方法[1], 而 $J(t)$ 的实验测定一般比较困难, 研究 $E(t)$ 与 $J(t)$ 的转换关系可以减少实验工作量, 节约研究经费。赵伯华[2] 在松弛模量的表达式为 Prony 级数基础上, 提出了一种数值积分法, 求得 $J(t)$ 的数值解; 文献[3] 中采用了曲线拟合的方法求的 $J(t)$ 的函数表达式, 造成乘积 $E(t)J(t)$ 在 0~ 1000s 前大于 1, 而根据粘弹理论[4], $E(t)J(t)$ 应小于等于 1, 与实际不符合。本文以线性粘弹理论为基础, 利用 Volterra 算子, 推导 $E(t)$ 和 $J(t)$ 之间的函数转换关系式, 根据 $E(t)$ 和 $J(t)$ 之间任意一个参数的实验测试值, 转换关系式可以计算另一个参数值, 并给出一种复合固体推进剂的 $E(t)$ 与 $J(t)$ 实测值与转换计算理论值的比较, 以便评估转换关系式计算结果的准确性。

2 Volterra 算子及性质

Volterra 原理是线性遗传性理论的一部分, 它在求解线粘弹性问题时, 将 Volterra 型积分算子视为常数, 由此得到两个函数的乘积, 其中一个是关于参数

* 收稿日期: 2003-05-26; 修订日期: 2003-07-28。
作者简介: 阳建红 (1963 —), 女, 博士, 教授, 研究领域为兵器发射理论与技术。

的时间函数,而另一个是相应弹性问题中的弹性常数及空间坐标的函数。

通常,第二类 Volterra 积分方程为[5,6]

$$e(t) = u(t) + a\int_{-\infty}^{t}\xi(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (1)$$

式中 a 为系数,函数 $\xi(t,\tau)$ 称为积分方程的核,令 $e=e(t)$, $u=u(t)$,则:

$$e = (1+a\xi)u \qquad (2)$$

若 $\xi u = \int_{-\infty}^{t}\xi(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$,则 ξ 称为 u 的 Volterra 算子。

从式(2)求解 u,有

$$u = (1-a\beta_\xi)e = e - \alpha\int_{-\infty}^{t}\beta_\xi(t,\tau)e(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (3)$$

β_ξ 称为 ξ 的 Volterra 预解算子。其核 $\beta_\xi(t,\tau)$ 称为 $\xi(t,\tau)$ 的预解核。可以证明:当 $\xi(t,\tau)=1$ 时,它的预解核是指数核。

预解核有如下性质:如果第二类 Volterra 积分方程的核是某核关于某个参数的预解核,那么该核的预解核是生成核关于另一个参数的预解核。

Volterra 算子乘积定理:

$$\beta(x)\beta(y) = (1/(x-y))[\beta(x)-\beta(y)] \quad (4)$$

3 松弛模量与蠕变柔量的转换

3.1 松弛模量转换为蠕变柔量

$E(t)$ 的 Prony 级数表达式为: $E(t) = E_0 - \sum_{i=1}^{n}a_i(1-\exp(-b_it))$,式中 a_i, b_i 为系数,E_0 为 $t=0$ 时即玻璃态时的松弛模量。由 Boltzmmann 迭加原理得[4]

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)\cdot E_0 + \int_{-\infty}^{t}E'(t-\tau)\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (5a)$$

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)\cdot J_0 + \int_{-\infty}^{t}J'(t-\tau)\sigma(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (5b)$$

式(5a)两边同除以 E_0 得,将 $E'(t-\tau)$ 的 Prony 级数得

$$\frac{\sigma(t)}{E_0} = \varepsilon(t) - \sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{E_0}\int_{-\infty}^{t}\exp(-b_i(t-\tau))\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (6)$$

比较式(1)和式(6),式(6)具有第二类 Volterra 积分方程的形式,令 $u=\sigma(t)/E_0$, $e=\varepsilon(t)$, $k_i=-a_ib_i/E_0$, $\beta(-b_i,t-\tau)=\exp(-b_i(t-\tau))$,定义 $\beta e = \int_{-\infty}^{t}\beta(t,\tau)e(\tau)\mathrm{d}\tau$,则 β 称为 e 的 Volterra 算子。有

$$u = (1-\sum_{i=1}^{n}k_i\beta(-b_i))e \qquad (7)$$

式(7)中 β 的核 $\beta(-b_i,t-\tau)$ 是 $\xi(t,\tau)=1$ 的预解核关于参数 b_i 的线性组合。从预解核的性质可知,式(7)中的预解核也是 $\xi(t,\tau)=1$ 的预解核关于另一个参数 d_s 的线性组合。而 $\xi(t,\tau)=1$ 的预解核是指数核。从式(7)求解 e,有

$$e = (1+\sum_{j=1}^{n}m_j\beta(-d_j))u \qquad (8)$$

式中 d_j, m_j 为参数, $\sum_{j=1}^{n}m_j\beta(-d_j)$ 称为 u 的 Volterra 预解算子。将 u, e 的值代入式(8),得

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} + \sum_{j=1}^{n}m_j\beta(-d_j)\frac{\sigma(t)}{E_0} \qquad (9)$$

比较式(5b)和式(9)得

$$J'(\tau) = \sum_{j=1}^{n}m_j\beta(-d_j,\tau)\Big/E_0 \qquad (10)$$

将式(8)代入式(7),并应用 Volterra 算子乘积定理,化简得:

$$\sum_{j=1}^{n}m_j\beta(-d_j) - \sum_{i=1}^{n}k_i\beta(-b_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_jk_i\frac{\beta(-d_j)-\beta(-b_i)}{b_i-d_j} = 0 \qquad (11)$$

要使上式成立,其系数必为零,即 Volterra 算子系数必为零:

$$1+\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{d_j-b_i} = 0;\ k_i = -\frac{a_ib_i}{E_0} \qquad (12a)$$

$$1+\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{d_j-b_i} = 0 \qquad (12b)$$

式(12a)是一个一元 n 次方程,求得 $d_j\,(j=1\sim n)$。将解得 d_j 代入式(12b)得到一个 n 元一次方程组,解得 m_j, $j=1\sim n$。将 d_j, m_j 的值代入式(10),两端同时积分得

$$J(t) = C + \left|\sum_{j=1}^{n}-\frac{m_j}{d_j}\exp(-d_jt)\Big/E_0\right| \qquad (13)$$

由 $J_0=1/E_0$;计算 C 值并代入式(13)得

$$J(t) = \left|1+\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{d_j}(1-\exp(-d_jt))\right|\Big/E_0 \qquad (14)$$

若已知 $E(t)$,就可以通过联解式(12),式(14)求得 $J(t)$ 的表达式。显然,式(12),式(14)转换表达式简洁,运算为代数运算,计算量小。当 $n=1$ 时,用上

述方法求得 $J(t)$ 的函数表达式与用拉氏变换方法求得的 $J(t)$ 结果相同, 显然, 本方法比拉氏变换方法简单。当 $n\geq 2$ 时, 用拉氏变换方法求解 $J(t)$ 就非常困难。

3.2　蠕变柔量转换为松弛模量

同样, 可以推导 $J(t)$ 向 $E(t)$ 转换的关系式。设复合固体推进剂蠕变柔量的 Prony 级数表达式为

$$J(t) = J_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i(1-\exp(-d_i t)) \tag{15}$$

式中 a_i, b_i 为系数, J_0 为零时刻的松弛模量, 同理可得

$$E(t) = \left| 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{b_j}(1-\exp(-b_j t)) \right| \Big/ J_0 \tag{16}$$

式中的 a_j, b_j 可由以下两式求出

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{d_i - b_j} = 0, \quad k_i = \frac{c_i d_i}{J_0} \tag{17a}$$

$$1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{d_i - b_j} = 0 \tag{17b}$$

联解式(16), 式(17), 就可以求得 $E(t)$ 的表达式。

4　实际算例

为了验证式(12), 式(14) 的准确性, 我们取国内公开发表的试验数据进行验证。文献[3] 采用松弛实验和蠕变实验测试了 SRM-EB 推进剂的 $E(t)$ 和 $J(t)$, 得到了 $E(t)$ 式(18), 用式(12), 式(14) 计算出该种 $J(t)$ 式(19), 并与文献[3] 实验测试得到的同种推进剂 $J(t)$ 比较, 如图 1 所示。

$$\begin{aligned} E(t) = {} & 0.705886 + 0.168169\exp(-3.318874\cdot 10-5\cdot t) \\ & + 0.098714\exp(-3.318874\cdot 10-4\cdot t) \\ & + 1.930384\exp(-3.318874\cdot 10-3\cdot t) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} J(t) = {} & 1.4166593 - 0.288193\exp(-2.662122\cdot 10-5\cdot t) \\ & - 0.1654795\exp(-2.29137\cdot 10-4\cdot t) \\ & - 0.618532\exp(-1.145942\cdot 10-3\cdot t) \end{aligned} \tag{19}$$

可以看出: 理论值与实验值吻合, 其函数转换式是正确可靠的。

图 2 给出了文献[3] 计算的 $E(t)J(t)$ 的值随时间的变化和用本文转换式计算得到的 $E(t)J(t)$ 值随时间的变化比较图, 可以看出: 本文计算的 $E(t)J(t)$ 值始终等于小于 1, 符合线性粘弹理论, 而文献[3] 中 $E(t)J(t)$ 在 0~ 1000s 前大于 1。

5　结　论

(1) 本文建立了复合固体推进剂松弛模量和蠕变柔量之间的转换关系, 可根据任意一个参数的Prony 级数表达式, 求得另外一个参数的函数表达式, 转换表达式简洁, 计算量小。

(2) 由复合固体推进剂松弛模量 $E(t)$ 求得蠕变柔量 $J(t)$ 的理论值与实验值吻合, 说明其函数转换式是符合实际的。

(3) 本文计算的 $E(t)J(t)$ 始终等于小于 1, 符合粘弹理论。

(4) 本方法同样可以用于固体推进剂其它力学参数的换算, 如体积松弛模量和体积蠕变柔量之间的转换等。

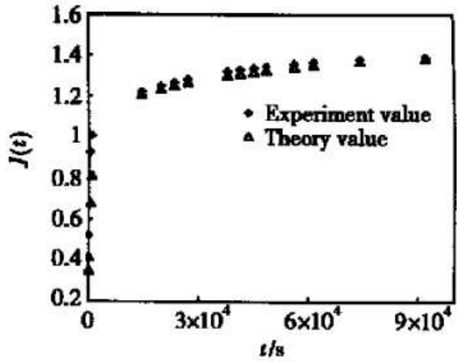

Fig. 1　Experiment and theoretical value of creep compliance

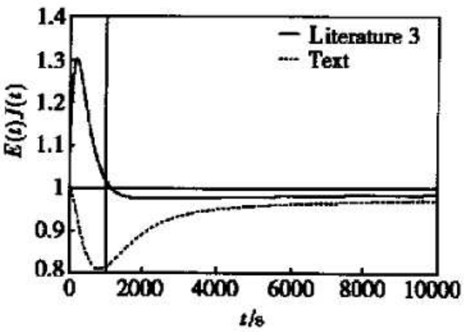

Fig. 2　Calculate value

参考文献:

[1]　QJ 2487-93, 复合固体推进剂单向拉伸应力松弛模量及其主曲线测定方法[S].

[2]　赵伯华. 松弛与蠕变力学特性转换关系的研究[J]. 实验力学, 1995, 10(2).

[3]　刘军虎, 王　铮. 由应力松弛试验数据确定松弛模量和蠕变柔量[J]. 固体火箭技术, 1995, 18(3).

[4]　杨挺青. 粘弹性力学[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1992.

[5]　Rabotnov Yu N. Elements of hereditary solid mechanics[R]. *M: MirPubl*, 1980.

[6]　张淳源. 粘弹性断裂力学[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1994.

(编辑: 梅　瑛)