

基于 QZ 算法的涡轮泵转子临界转速有限元计算^{*}

郑贇韬, 田爱梅, 王晓军

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100083)

摘 要: QZ 算法求解非对称矩阵广义特征值问题与转子动力学有限元法相结合计算涡轮泵转子临界转速, 发展了相应的计算程序 FEMQZ。在计算模型中考虑轮盘的陀螺力矩、轴套零件和叶轮浸液的影响。计算分析了某涡轮泵转子在弹性支承下的临界转速。实验结果表明, 计算得到的一阶临界转速与实测值吻合, 所发展程序能用于涡轮泵转子的动力特性分析。

关键词: 液体推进剂火箭发动机; 涡轮泵; 涡轮转子; 有限元法; 临界速度

中图分类号: V434.21 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-4055 (2004) 02-0114-04

Critical speed computation of turbopump rotor based on finite element method and QZ algorithm

ZHENG Yuntao, TIAN Aimei, WANG Xiaojun

(School of Astronautics, Beijing Univ. of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: To compute critical speed of turbopump rotor by finite element method for rotordynamic analysis combined with QZ Algorithm solving unsymmetrical matrix eigenvalue problem, the program FEMQZ has been developed. The FEM model includes the effects of Gyroscopic moment, inertia moment of sleeve of shaft and liquid action when the impeller is steeped in liquid. The critical speed of one turbopump rotor on elastic support was computed by FEMQZ. The results show that the computed results of first order critical speed agree well with the experimental results. The program FEMQZ can be used to dynamic analysis of turbopump rotor.

Key words: Liquid propellant rocket engine; Turbine pump; Turbine rotor; Finite element method; Critical velocity

1 引 言

涡轮泵是液体火箭发动机的重要组成部分, 在对以转子为主体的涡轮泵进行设计时, 临界转速的计算分析是必不可少的内容之一。由于实际转子系统的复杂性, 大多采用离散化手段近似求解临界转速。常用的有传递矩阵法、有限元素法、模态综合法等。

有限元素法是一种十分有效且精度高的数值计算方法。目前已经发展到能够解决包括陀螺力矩、剪切变形、内外阻尼等因素在内的转子临界转速、不平衡响应计算等问题。由于考虑各种因素在内的有限元模型是更接近真实结构、较精确的力学模型, 所以对畸形结构和多转子结构适应性更强。同时它还避免了传递矩阵法中的数值不稳定现象和漏根现象。

在涡轮泵转子系统动力特性分析的有限元法中, 转子-支承系统的临界转速求解转化为求解大型稀疏矩阵的广义特征值问题。刚度矩阵、质量矩阵和陀螺矩阵具有大型、稀疏、非对称的特点。求解非对称广义特征值问题常用的方法为 QR 法与 Lanczos 法。Moler C B^[1], Ward R C^[2] 等人提出、发展了不要求逆运算的 QZ 方法。本文应用有限元法分析计算了实际涡轮泵转子的临界转速, 对所形成的非对称广义特征值问题使用 QZ 算法编程求解。

2 转子临界转速的有限元法

有限元法将连续的转子系统离散为有限个单元, 单元间以节点相连, 表示为矩阵形式的已知弹性和惯性的离散单元组成转子-支撑系统的计算模型, 运动

^{*} 收稿日期: 2003-03-04; 修订日期: 2003-10-24。

作者简介: 郑贇韬 (1978—), 女, 博士生, 研究领域为液体火箭发动机涡轮泵装置数值仿真和多学科优化。

E-mail: hua mei@ 263.net

方程为^[3]

$$\dot{M}\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = a \cos \Omega t + b \sin \Omega t \quad (1)$$

其中 M 为质量矩阵, K 为刚度矩阵, D 中包含了阻尼矩阵和陀螺矩阵, q 为节点位移列阵。转子系统临界转速等于其振动固有频率, 求解临界转速的问题转化为求齐次方程

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = 0 \quad (2)$$

的广义特征值问题。令 $q = Ye^{\lambda t}$, 代入式(2), 得

$$(\lambda^2 M + \lambda D + K) Y = 0$$

$$\text{即} \quad \begin{vmatrix} 0 & I \\ K & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Y \\ \lambda Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -M \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Y \\ \lambda Y \end{vmatrix}$$

$$\text{令} \quad X = \begin{vmatrix} Y \\ \lambda Y \end{vmatrix}, A = \begin{vmatrix} 0 & I \\ K & D \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -M \end{vmatrix}$$

$$\text{则有} \quad AX = \lambda BX \quad (3)$$

λ 的虚部为转子系统振动固有频率 Ω 。

3 QZ 算法

求解广义特征值问题的 QZ 算法^[1,2] 是求解标准特征值问题的 QR 方法的推广, 当式(3)中的 $B = I$ 时, QZ 方法就约化为 QR 方法。QZ 算法中, 无需求矩阵 B 的逆矩阵, 分为单步、双步 QZ 算法等。双步 QZ 法适于求解具有复特征值的实矩阵。

设 A, B 是 $n \times n$ 阶矩阵, 则存在酉矩阵 Q 和 Z 使 A, B 同时酉等价于上三角阵 A', B' , 其中 $A' = Q^H A Z, B' = Q^H B Z$ 。其对角元素的商 a'_{ii}/b'_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n, b'_{ii} \neq 0$) 即为广义特征值问题 $AX = \lambda BX$ 的特征值, 且可在任意次序作出。

通过 Householder 变换(简称上 H 变换), 将矩阵对 (A, B) 约化为中间矩阵对 (A', B') , 其中 A' 是上 Hessenberg 矩阵, B' 是上三角阵。一般只对矩阵对 (A', B') 导出 QZ 方法。 Q 是一个 H 变换矩阵, 用一系列 H 变换矩阵左乘 B , 则 $B' = Q_{n-1} Q_{n-2} \dots Q_1 B$ 。对 A 进行同样变换, 得到 $A' = Q_{n-1} Q_{n-2} \dots Q_1 A$ 。进一步将 A' 变换为上 H 阵, 同时保持 B' 为上三角阵。每消去 A' 的一个元素时, B' 的次对角线上就产生一个非零元素。用适当的酉矩阵 Z 使之消去。

双步 QZ 算法与双步 QR 法类似, 先约化广义特征值问题, 然后再迭代。约化过程如上述。一般对矩阵对 (A', B') 导出 QZ 方法, 因此酉等价约化为中间矩阵的过程也可作为 QZ 算法的一部分。

双步 QZ 算法首先确定 Q 的第一行, 然后确定 Q 与 Z , 使 QAZ, QBZ 分别为上 Hessenberg 阵与上三角阵, 且 Q 有预先确定的第一行。

$$a_{10} = \left| \left| \frac{a_{nn}}{b_{nn}} - \frac{a_{11}}{b_{11}} \right| \left| \frac{a_{n-1, n-1}}{b_{n-1, n-1}} - \frac{a_{11}}{b_{11}} \right| - \left| \frac{a_{n, n-1}}{b_{n-1, n-1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{n-1, n}}{b_{nn}} \right| + \left| \frac{a_{n, n-1}}{b_{nn}} \right| \left| \frac{a_{n-1, n-1}}{b_{n-1, n-1}} \right| \left| \frac{a_{11}}{b_{11}} \right| \left| \frac{b_{11}}{a_{21}} \right| + \frac{a_{12}}{a_{22}} - \left| \frac{a_{11}}{b_{11}} \right| \left| \frac{b_{12}}{a_{22}} \right| \right|$$

$$a_{20} = \frac{a_{22}}{b_{22}} + \frac{a_{11}}{b_{11}} - \left| \frac{a_{21}}{b_{11}} \right| \left| \frac{b_{12}}{a_{22}} \right| - \frac{a_{nn}}{b_{nn}} - \frac{a_{n-1, n-1}}{b_{n-1, n-1}} + \left| \frac{a_{n, n-1}}{b_{n-1, n-1}} \right| \left| \frac{b_{n-1, n}}{b_{nn}} \right|, \quad a_{30} = \frac{a_{32}}{b_{22}}$$

$$a_{i,0} = 0, i = 4, \dots, n.$$

一次双步 QZ 迭代算法的计算过程为

(1) 先计算 a_{10}, a_{20}, a_{30} ;

(2) 对 $k = 1, 2, \dots, n-1$;

1) 确定 $Q_k \in H_3(k)$, 消去 $a_{k+1, k-1}, a_{k+2, k-1}$;

2) 确定 $Z'_k \in H_3(k)$, 消去 $b_{k+2, k+1}, b_{k+2, k}$;

3) 确定 $Z''_k \in H_2(k)$, 消去 $b_{k+1, k}$;

(3) 确定 $Q_{n-1} \in H_2(n-1)$, 消去 $a_{n, n-2}$;

(4) 确定 $Z_{n-1} \in H_2(n-1)$, 消去 $b_{n, n-1}$; (其中 $H_r(k)$ 为 Hermite 酉矩阵类)。

可见, B 的二阶顺序主子矩阵非奇异是双步 QZ 算法能进行的必要条件, 而并非要求 B 为非奇异。

在迭代过程中, 每次迭代循环后, 应由上到下检验矩阵 A 的次对角元。若某个元素可忽略, 则将问题收缩阶数, 化简为阶数更小的问题进行迭代^[2]。

求解转子振动问题的广义特征值问题的双步 QZ 算法的步骤总结为: (1) 约化 A, B 阵为上 Hessenberg 阵和上三角阵; (2) 对上 Hessenberg 阵和上三角阵, 应用双步 QZ 算法, 使 A 约化为拟上三角阵 A' , 同时保持 B 为上三角阵 B' ; (3) 求 $A'Y = \lambda B'Y$ 的特征值。

4 程序实现

将 QZ 算法与有限元法相结合, 完成了基于 QZ 算法的涡轮泵转子动力特性分析的有限元计算程序 FEMQZ。

4.1 QZ 算法的程序实现

QZ 算法程序应先输出 a'_{ii} 和 b'_{ii} , 然后输出 a'_{ii}/b'_{ii} , 以避免 b'_{ii} 近似为零, 同时了解矩阵 A 和 B 的性质。当 a'_{ii} 和 b'_{ii} 均很小时, 会出现虚假特征值。

收敛参数 EPS 根据文献[4]提供的经验参数选取。如果要计算结果精确至小数点后 7~10 位, 选取收敛参数 EPS 使

$$\text{Max}(EPS \times \|A\|, EPS \times \|B\|) \in (k_1 \times 10^{13}, k_2 \times 10^{17})$$

$$\text{其中}, 0.1 \leq k_1, k_2 \leq 1, \|A\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\|B\| = \max_i \sum_{j=1}^n |b_{ij}|.$$

4.2 有限元法的程序实现

采用一维梁单元^[3], 每个单元有两个节点, 每个节点有四个自由度。首先将转子离散为有限个单元组成的计算模型; 将单元的几何参数和物理参数、轮盘和支承的物理参数输入程序, 给定转子转速的初值和步长。然后计算单元质量矩阵、刚度矩阵和陀螺矩阵; 将盘或支承放在单元末端, 计入盘的质量、惯性力矩和支承刚度; 最后组集得到式(2)中的总体质量矩阵 M , 总体刚度矩阵 K 和总体阻尼矩阵 D 。

由此可得到式(3)中 A 和 B 。应用 QZ 算法, 得到一组转子不同工作转速 $\omega(i)$ 下的固有频率 $\Omega(i)$, 绘制相应的 Campbell 图, 得到转子的临界转速。

4.3 考虑的影响因素

计算模型中考虑了轮盘陀螺力矩的影响。

涡轮泵泵转轴上常有轴套类零件, 其对弯曲产生附加阻力, 会提高轴的固有频率。这种影响对柔性轴的表现很突出。用解析法解决这个问题较困难, 借助实验可确定轴套零件对轴刚度的影响。文献[5]中给出了通过实验得到的轴刚度影响系数 J_1/J 与无因次参数 $D/d, L/d$ 的关系。其中, J_1 为装有轴套轴的折算惯性矩, J 为光轴的惯性矩, D 为轴套外径, L 为轴套长度, d 为轴径。本文参考文献[5]中的实验结果, 对有轴套轴段的惯性力矩进行了相应的折算。

泵叶轮在液体中偏心旋转会受到升力、阻力、摩擦阻力矩、偏摆阻力矩等流体的作用。本文考虑了叶轮浸于液体中所受升力对转子临界转速的影响。升力为^[6]

$$P = \Gamma \Omega^2 A$$

其中, $\Gamma = \rho V \{ [-1 + (r/r_0)^2] + [1 + 3(r/r_0)^2] \omega / \Omega - 2(r/r_0)^2 \omega^2 / \Omega^2 \} / [1 - (r/r_0)^2]$, r 是叶轮的外径, r_0 是蜗壳内径, ρ 是液体的密度, V 是叶轮容积。

不同转速下, 液体对转子的作用力不同。比较流体升力与离心力, Γ 相当于质量。在计算模型中, Γ 加入单元质量矩阵。

5 计算分析

利用基于 QZ 算法的转子动力特性分析有限元程序 FEMQZ, 对实际涡轮泵转子的动力特性进行了分析。

某涡轮泵转子结构示意图如图 1 所示。转子由两级离心泵叶轮和一级涡轮盘组成。图 2 为转子计算模型。由于涡轮泵壳体较厚, 轴承支座被认为是刚性的, 而滚动轴承径向刚度大约为 $1.0 \times 10^8 \text{ N/m} \sim 2.0 \times 10^8 \text{ N/m}$, 转子支承设计成泵端两个轴承支承在刚性支座上, 涡轮端两轴承支承在一个弹性支承上, 两轴承支承刚度之和即为弹性支承刚度。

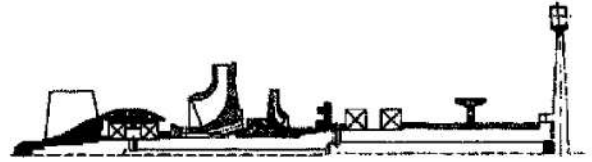


Fig. 1 Turbopump rotating assembly schematic

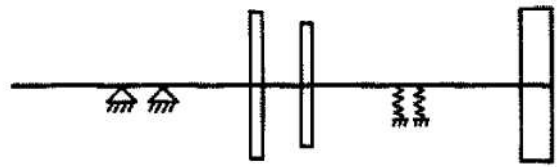


Fig. 2 Turbopump structural dynamic model

转子离散为 20 个梁单元, 轴的材料密度为 $\rho = 7910 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$, 取泵端支承刚度为 $2.0 \times 10^8 \text{ N/m}$ (两轴承刚度之和), 涡轮端支承刚度为 $0.3 \times 10^8 \text{ N/m}$ (单个弹性支承刚度), 计算所得频率绘制的 Campbell 图如图 3 所示, 图中交点分别为一阶进动频率 1181 rad/s 和二阶进动频率 3412 rad/s , 对应的临界转速分别为 11283 r/min 和 32598 r/min 。此结果与用传递矩阵法计算的结果相同。

当涡轮泵转子工作转速为 20000 r/min 时, 转子将经过一阶临界转速, 工作在一阶临界转速和二阶临界转速之间, 并有足够的安全裕度。

图 4 和图 5 分别示出了刚性支承刚度 $k_p = 1.0 \times 10^8 \text{ N/m}$ 和 $k_p = 2.0 \times 10^8 \text{ N/m}$ 时, 临界转速随弹性支承刚度变化的曲线。对不同支承刚度组合计算显示, 转子的各临界转速能满足安全裕度的要求。

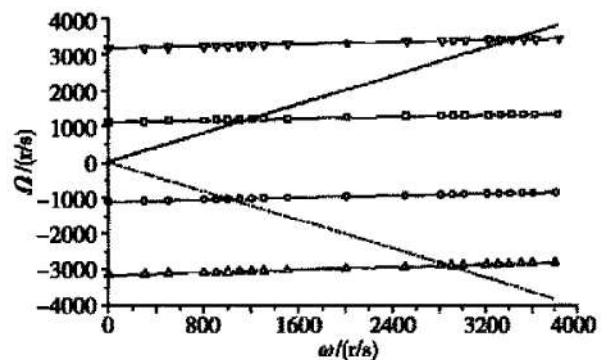


Fig. 3 Campbell diagram

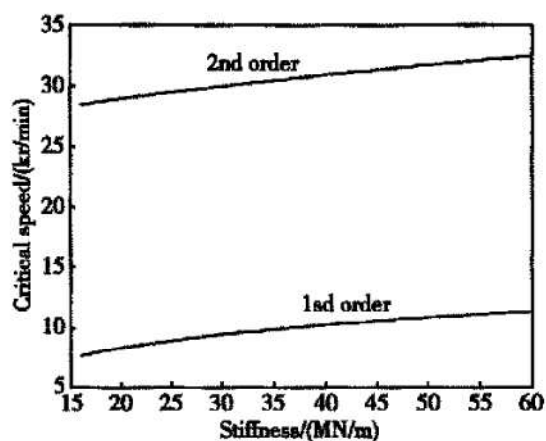


Fig. 4 Critical speed versus stiffness of elastic support ($k_p = 1.0 \times 10^8 \text{ N/m}$)

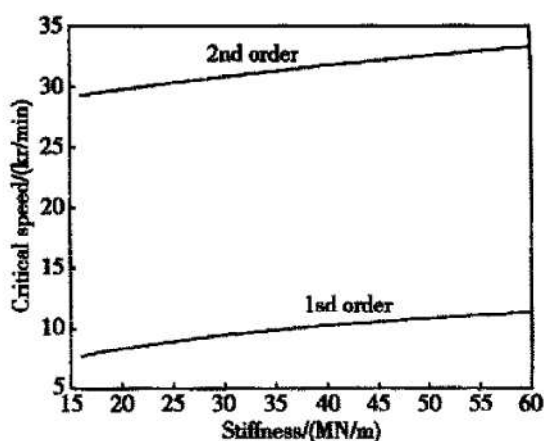


Fig. 5 Critical speed versus stiffness of elastic support ($k_p = 2.0 \times 10^8 \text{ N/m}$)

以上结果未考虑叶轮浸液的影响。考虑叶轮浸于液体中进行了涡轮泵转子临界转速计算。结果表明,考虑液体对叶轮的升力后,在所考虑的刚度系数范围内,各阶临界转速值均有降低。叶轮浸液对转子临界转速的影响还需实验验证。

6 结 论

涡轮泵转子的实验表明,本文计算的一阶临界转速与实验测得的一阶临界转速吻合。说明在转子动力特性分析的有限元程序中引入 QZ 算法,结果令人满意,程序能用于涡轮泵转子的动力特性分析。

参考文献:

- [1] Moder C B, Stewart G W. An algorithm for the generalized matrix eigenvalue problem $Ax = \lambda Bx$ [R]. AD746896.
- [2] Ward B C. The combination shift QZ algorithm [J]. *SIAM J.*

Numer. Anal., 1975, 12(6).

- [3] 晏砺堂, 朱梓根, 宋兆泓, 等. 结构系统动力特性分析 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989.
- [4] 周树荃, 戴 华. 计算非对称矩阵广义特征值问题的组合 QZ 法 [C]. 飞机结构动力学第三次学术会议文集, 1983.
- [5] 关醒凡, 姚兆生, 译. 泵零件强度计算 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1981.
- [6] 何洪庆, 张小龙, 沈达宽, 等. 涡轮泵转子的临界转速研究 (④ 计入液体作用力时涡轮泵转子的临界转速 [J]. 推进技术, 1999, 20(2). (HE Hong-qing, ZHANG Xiaolong, SHEN Da-kuan, et al. Study on critical rotational speed of turbopump rotors (④ for turbopump rotors taking account of liquid acting forces [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 1999, 20(2).)

(编辑: 梅 瑛)

(上接第 113 页)

参考文献:

- [1] Vanka S P, Stull F D, Craig R R. Analytical characterization of flow fields in side inlet dump combustors [R]. *AIAA Paper* 83-1399.
- [2] Sosounov V. Research and development of ramjets/rockets, part a: integral solid propellant rockets [R]. NASA, N94-29294.
- [3] Dijkstra F, Mayer A E H J, Wilson k J, et al. Ducted rocket combustion experiments at low gas-generator combustion temperatures [R]. *AIAA Paper* 95-2415.
- [4] 马智博, 张振鹏, 蔡选义. 火箭冲压发动机掺混流场数值方法研究 [J]. 推进技术, 1998, 19(4). (MA Zhi-bo, ZHANG Zhen-peng, CAI Xuan-yi. Numerical study of mixing flows in a ducted rocket combustor [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 1998, 19(4).)

- [5] 张家骅, 胡顺南, 顾炎武, 等. 整体式固体火箭冲压发动机研制 [J]. 推进技术, 1998, 19(2). (ZHANG Jia-hua, HU Shun-nan, GU Yan-wu, et al. Development of an integral solid rocket ramjet engine [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 1998, 19(2).)

(编辑: 梅 瑛)