

热平衡等离子体的二维复合流动数值计算

杨 涓, 何洪庆, 毛根旺

(西北工业大学 航天工程学院, 陕西 西安 710072)

摘 要: 采用中性气体流动欧拉方程的近似因子分解法, 耦合等离子体的热平衡模型方程, 对用微波产生的等离子体在喷管内二维轴对称复合流动进行了数值计算。计算结果表明: 微波等离子体电子数密度不超出临界值, 1kW 以下功率微波产生的是弱电离等离子体; 气流的马赫数分布不受微波加热功率、喷管入口压强的影响, 喷管内等离子体中电子数密度随微波功率的加大而增加, 随入口压强的增加而减小。

关键词: 微波; 等离子体发动机; 欧拉方程; 热平衡; 电子密度; 数值计算

中图分类号: V439.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-4055 (2003) 02-0152-04

Numerical calculation of thermal-equilibrium plasma composite flow with two-dimension

YANG Juan, HE Hong-qing, MAO Gen-wang

(Coll. of Astronautics, Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an 710072, China)

Abstract: With the approximate-factorization algorithm of Euler equation describing the neutron gas flow fields, coupling with the thermal equilibrium model equation of plasma, the composite fluid fields of plasma, flowing in two dimensional axial asymmetry nozzle after generated by microwave, were numerically calculated. The results show that the numerical density of electron is less than critical value, the microwave energy power under 1kW produces weak plasma, the Mach number distribution is not effected by the power and the pressure of nozzle entrance, the numerical density of electron is increased with the increasing of microwave power and the decreasing of entrance pressure.

Key words: Microwave; Plasma engine; Euler equation; Heat balance; Electron density; Numerical calculation

1 引 言

等离子体的电子数密度预估一直是等离子体研究的热点。可以采用静电探针测出等离子体的电流电压特性曲线,并从中推算出电子数密度,但是电流电压特性曲线本身的解释有时有一定的难度,从而影响推算的准确性,需要配合理论方法进行计算,全面地对等离子体电子数密度进行预估。本文利用热平衡模型,对用微波产生的等离子体在喷管中进行二维轴对称复合流动进行数值计算。在处理微波能量产生等离子体时,认为等离子体为静止状态,采用热平衡模型计算所形成等离子体的温度与各类粒子数密度。

在真空以及地面大气条件下喷管内等离子体的压强为 1kPa ~ 400kPa,这时为热平衡等离子体^[1];等离子体中各粒子的温度相等,自由电子与离子的数密度符合沙哈方程,并且可由气体的温度唯一地确定。应用二维中性气体流动的近似因子分解数值模拟方法^[2],耦合一次电离的热平衡等离子体模型^[1],可以实现喷管内的等离子体复合流动计算。

2 计算模型

微波能量通过探针被传输进圆柱腔内,并在喷管的入口处形成强电场强度区,气体进入腔体后被该区的强电场强度击穿,产生等离子体,等离子体在喷管内进行复合流动以后被释放到外界(见图 1)。

• 收稿日期: 2002-05-20; 修订日期: 2002-07-25。基金项目: 航天创新基金。

作者简介: 杨 涓 (1963—), 女, 博士, 副教授, 研究领域为电推进、火箭发动机内流场。

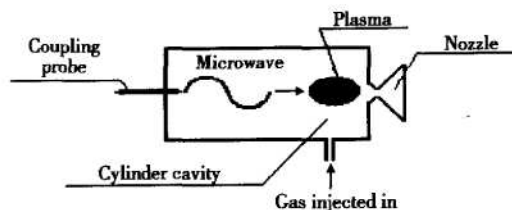


Fig. 1 Physical model

描述气体流动的经典方程为有粘的 N-S 偏微分方程、无粘的 Euler 偏微分方程。数值求解不可压气体流动方程时,可用 SIMPLE 方法,数值求解可压气体流动方程时,可用近似因子分解法(AF方法)、矢通量分解法、NND 差分格式、ENO 差分格式^[2-4]。后三种方法较适合于求解间断流场,尤其是 NND 差分格式、ENO 差分格式对捕获激波有更高的精度。近似因子分解法差分格式构造简单,可用解析解法求解由差分方程构成的矩阵方程,耗费计算机机时较少,比较适合于数值计算连续的全速流场,也适合于计算图1喷管内气体的流动。本文的计算只考虑无粘流动情况,对气体的欧拉方程进行数值求解。计算过程中,认为欧拉方程中的物性参数(如气体常数、比热比等)由电子、离子、中性粒子所贡献,热焓、压强、密度为各类粒子之和;各类粒子数由等离子体的热平衡模型方程计算,从而实现气体欧拉方程的近似因子分解数值解法与热平衡等离子体模型的耦合。

2.1 二维欧拉气体流动方程

在柱坐标下,气体的欧拉方程为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{H} \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u u + p \\ \rho u v \\ (e + p)u \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho u v + p \\ \rho v v \\ (e + p)v \end{Bmatrix}$$

计算域内相应的欧拉方程变换为

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}}{\partial \eta} = \tilde{\mathbf{H}} \quad (2)$$

其中, $\tilde{\mathbf{U}} = J\mathbf{U}$, $\tilde{\mathbf{F}} = J(\xi_x \mathbf{F} + \xi_y \mathbf{G})$,

$$\tilde{\mathbf{G}} = J(\eta_x \mathbf{F} + \eta_y \mathbf{G}), \quad \tilde{\mathbf{H}} = J\mathbf{H},$$

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

2.2 欧拉方程的隐式近似因子差分格式

利用二阶台劳公式与近似因子分解公式可以把方程(2)展开为以下的形式

$$\begin{cases} \left[I + \Delta t \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^n \right] \Delta \mathbf{U}^{*n} = \mathbf{R}^n \\ \left[I + \Delta t \left(\frac{\partial B}{\partial \eta} \right)^n + J \Delta t C^n \right] \Delta \mathbf{U}^n = \Delta \mathbf{U}^{*n} \end{cases}$$

$$\text{其中, } A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial U}, B = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial U}, C = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial U},$$

$$\Delta \mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n,$$

$$\mathbf{R}^n = -\Delta t \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} + J\mathbf{H} \right\}^n$$

方程中的偏导数项采用具有二阶精度的中心差分格式,最终构造出的差分格式为

$$\begin{cases} (I + \Delta t \mu_j \delta_j A^n)_{j,k} \Delta \mathbf{U}^{*n} = \mathbf{R}_{j,k}^n \\ (I + \Delta t \mu_k \delta_k B^n + J \Delta t C^n)_{j,k} \Delta \mathbf{U}^n = \Delta \mathbf{U}^{*n} \end{cases}$$

其中:

$$\mathbf{R}_{j,k}^n = -\Delta t (\mu_j \delta_j \mathbf{F}^n + \mu_k \delta_k \mathbf{G}^n + J\mathbf{H}^n)_{j,k}$$

2.3 边界条件

(1) 亚声速入口边界

入口处给定气流总压、气体流动方向角,用特征线方程补充如下的方程计算气体流速。

$$u_i = \frac{1}{C} \left\{ u_\infty + \frac{x_i \lambda_-}{y_\eta} v_\infty + \frac{J a_-^2 \lambda_-}{a^2 \rho} p_\infty + D \right\}$$

(2) 轴对称边界条件

$$v = 0$$

$$\partial p / \partial n = \partial u / \partial n = \partial T / \partial n = 0$$

(3) 壁面边界条件

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \eta_y & -\xi_y \\ -\eta_x & \xi_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_\infty + (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_\eta = -\rho_\infty (\eta_x u_\infty + \eta_y v_\infty)$$

(4) 出口边界

三点外插公式计算出口边界。

$$U_{JMAX,K} = U_{JMAX-3,K} + 3(U_{JMAX-1,K} - U_{JMAX-2,K})$$

2.4 完全热平衡等离子体模型

对于处于热平衡状态的等离子体,电子温度、离子温度、中性粒子温度及宏观气体温度相平衡,自由电子温度与离子温度相等,这时电子数密度、中性粒子数密度服从 Saha 公式^[1]。考虑一次电离时,Saha 公式为

$$\frac{n_e n_1}{n_0} = \frac{2z_1}{z_0} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{E_0^*}{kT}\right)$$

其中,第 r 种粒子的配分函数

$$z_r = \sum_i g_i \exp\left(-\frac{E_{r,i}}{kT}\right),$$

式中 $r=0$ 代表中性粒子, $r=1$ 代表离子。外界加给等

离子体的能量用于提高焓值,即: $\dot{m}(h_1 - h_0) = \eta W$

焓由三部分构成 $h = h_e + h_b + h_{ion}$

电子具有的焓为 $h_e = \frac{1}{\rho} \left(\frac{5}{2} kT \right) n_e$

气体电离能为 $h_{ion} = \frac{1}{\rho} (n^+ E_0^\infty)$

重粒子的焓值

$$h_b = \frac{1}{\rho} \left[(n_a + n^+) \frac{5}{2} kT + kT^2 \left(n_a \frac{\partial \ln z_0}{\partial T} + n^+ \frac{\partial \ln z_1}{\partial T} \right) \right]$$

式中, $z_1 \approx g_1$, $z_0 = g_0$ 。离子与中性粒子的数密度 n^+ , n_a 由以下方程计算

$$\frac{(n^+)^2}{n_a} = \frac{2g_1}{g_0} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{E_0^\infty}{kT}\right)$$

$$p = k(n_a + 2n^+)T$$

当给定压强与外界输入的能量时,就可以由以上各方程解出等离子体的温度、密度、电子数密度、离子及中性粒子的数密度。

3 计算结果与分析

以 2.45GHz 的微波能加热氩气,根据前述的计算

方法编制计算机程序。计算过程中,首先由欧拉方程计算出喷管内各点处气体的温度、压强、密度;再由热平衡等离子体方程计算气体中的电子、离子以及中性粒子的数密度,并由此确定气体常数、比热比、定压与定容比热容、热焓。所有这些计算参数为下一时刻计算的初值,再进行反复迭代,直至最后收敛。计算过程中,还应不断地调整功率、流量,使等离子体的电子数密度不超出临界值,其值的计算见参考文献[5]。图 2~4 为不同微波功率(p)产生的等离子体在不同喷管入口压强(p_{in})条件下的马赫数(Ma)、电子数密度(N_e)、中性粒子数密度(N_a)与温度的计算结果。这些结果说明:

(1) 用 2.45GHz 频率的微波加热气体时,产生的等离子体中电子数密度不会超出临界电子数密度每立方米为 7.4×10^{16} 个。

(2) 电子数密度远远小于中性粒子数密度,用微波能加热气体时产生的等离子体是一种弱电离气体。

(3) 喷管内气流的马赫数分布几乎不受输入功率、入口压强的影响。

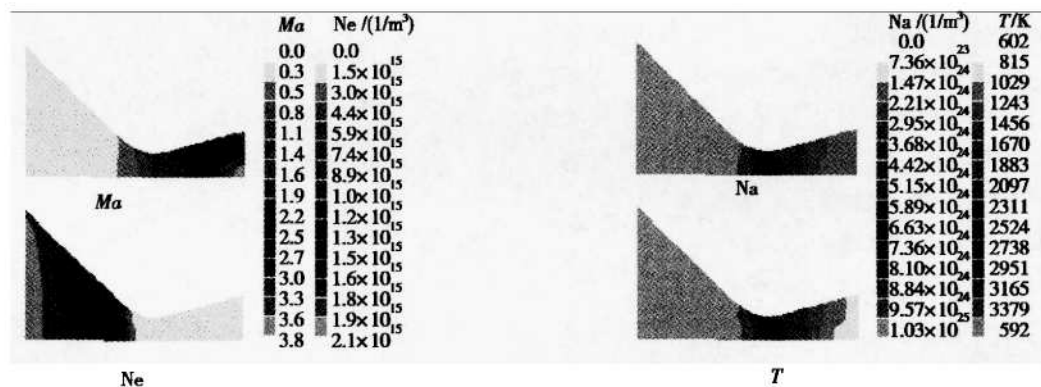


Fig.2 The calculate result ($p_{in} = 500 \text{ kPa}$ $p = 700 \text{ W}$)

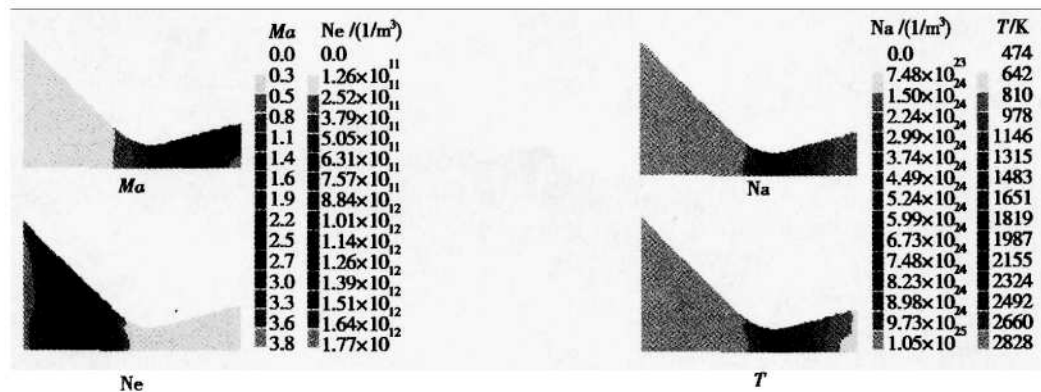
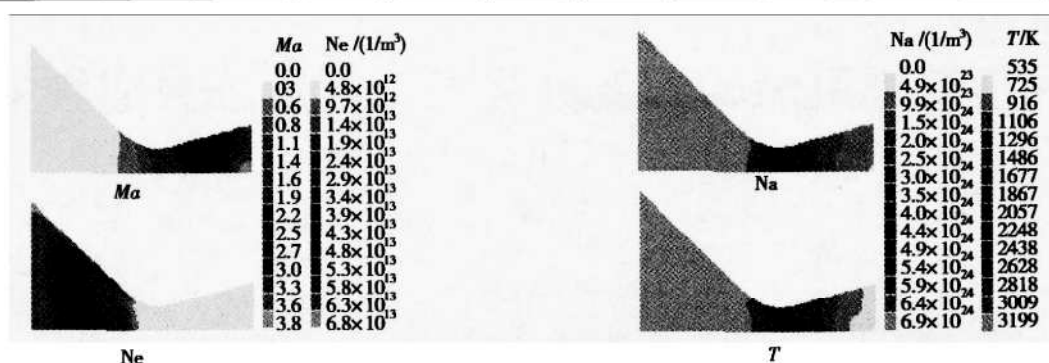


Fig.3 The calculate result ($p_{in} = 400 \text{ kPa}$ $p = 500 \text{ W}$)

Fig. 4 The calculate result ($p_{in} = 300\text{kPa}$ $p = 400\text{W}$)

(4)增加微波功率时,等离子体中的电子数密度增加。当电子数密度达到临界值时,再增加功率,电子数密度将保持不变,等离子体温度不再增加,将造成能量的浪费。这时应该加大喷管入口压强或者加大气体流量,以使等离子体的生成量增加,提高能量的利用效率。

4 结 论

根据二维中性无粘气体流动的近似因子分解数值模拟方法,耦合热平衡等离子体模型,对微波等离子体在喷管内的二维轴对称复合流动所进行的计算表明:用2.45GHz频率的微波加热气体产生等离子体时,喷管内流动的是弱电离等离子体,微波功率、喷管入口压强对等离子体的温度、中性与带电粒子数密度

都有影响。

参考文献:

- [1] 陈 熙. 高温电离气体的传热与流动[M]. 北京:科学出版社,1993.
- [2] 马铁犹. 计算流体动力学[M]. 北京:北京航空学院出版社,1986.
- [3] 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式[J]. 空气动力学学报,1991,6(2).
- [4] Harten A. ENO schemes with subcell resolution[J]. *J. of Comp. Phys.* 1989, 83:148 ~ 184.
- [5] 罗思 J R. 工业等离子体工程[M]. 北京:科学出版社,1998.9.

(编辑:王居信)



2002 年超燃冲压发动机研究进展

(1)在多国合作的 HyShot 计划研制中,2002 年 7 月,超燃冲压发动机飞行器在武麦拉靶场成功地进行了飞行试验,昆士兰大学的研究者成功地实现了超声速燃烧。试验飞行器用一枚两级火箭助推至 330km 的高空,在下降过程中,当飞行器在 $Ma = 7.6$ 飞行时,氢燃料喷入超燃冲压发动机。

(2)由霍普金斯大学应用物理实验室领导的一个协作小组,在 NASA 兰利研究中心的 2.44m 风洞中,进行了普通液体碳氢燃料的、完全一体化的高超声速巡航导弹发动机全尺寸试验,获得了净推力。这种双燃烧室超燃冲压发动机已成为在高超声速飞行验证计划下研制高超声速攻击导弹方案的基础。导弹发动机地面试验的飞行马赫数为 6~6.5,攻角为 0° 和 5° 。

(3)NASA 领导的 X43A 计划,在继续为下一次非制导的、与载机一体化的超燃冲压发动机验证机的飞行试验作准备。

(4)法国的 MBDA 公司和法国航空航天研究院(ONERA)正指挥两台全尺寸可变几何双模态冲压发动机的试验,一台在 ONERA ($Ma = 2.0 \sim 4.0$),另一台在莫斯科航空学院 ($Ma = 2.0 \sim 7.0$) 试验。

(秦宝元)