

二维 Euler 方程的自适应非结构网格生成方法^{*}

常利娜, 尹 河, 严传俊

(西北工业大学 航空动力与热力工程系, 陕西 西安, 710072)

摘 要: 发展了一种用于数值模拟二维 Euler 方程的自适应非结构网格的生成方法。这一方法根据背景网格提供的信息直接确定内部结点的位置, 然后依照 Delaunay 准则, 将新结点加入到已有网格划分中。用于平面流及管道流的实际计算中, 结果表明, 该方法不受流场形状及流动特征的限制, 具有较好的通用性。

关键词: 自适应处理; 非结构网格; 欧拉方程; 计算网格; 网格生成

中图分类号: V231

文献标识码: A

文章编号: 1001-4055 (2002) 01-0019-05

Adaptive unstructured grid for two-dimensional Euler equations

CHANG Li-na, YIN He, YAN Chuan-jun

(Dept. of Aeroengine Engineering, Northwestern
Polytechnical Univ., Xi'an 710072, China)

Abstract: An approach for generating adaptive unstructured grid was developed to solve the two-dimensional Euler equations. The internal point position was computed according to the size parameter prescribed by the background grid. It was then introduced into the existing grid utilizing Delaunay criterion. The related algorithm is of great simplicity allowance for automatic and flexible treatment of arbitrary shapes and flow features.

Key words: Adaptive processing; Unstructured grid; Euler equations; Computational grid; Grid generation

1 引 言

对于物理域复杂的发动机内流流场, 自动生成相应的结构网格划分比较困难, 而在非结构网格中, 由于每一特定结点周围的单元数目是不固定的, 因此更容易实现自动划分, 并且能够更为灵活地设置各处的网格分辨率, 这一点对于精确地捕捉爆震波等复杂流动特征尤为重要。非结构网格生成法主要包括阵面推进法^[1]和 Delaunay 网格生成法。当计算域外形比较复杂时, 阵面推进法本身面临拓扑验证与封闭性检验的困难, 不利于实现网格生成的自动化。Delaunay

网格生成法, 能够自动处理任意给定的平面凸点集, 但如何给出理想的结点集仍有待于进一步研究。Holmes 和 Snyder 所给的结点生成方法^[2], 在均匀网格划分中获得了较为成功的应用, 但是难以直接用于自适应网格的生成中。比较而言, Rebay S 所给的 Voronoi 边法^[3]更为灵活, 但是根据这一方法对外形复杂的几何体进行网格划分时, 边界附近的网格质量比较差。

文献[4]给出了一种按照给定尺寸, 生成均匀 Delaunay 非结构网格划分的方法。这一方法能够更好地保证边界附近网格单元的质量, 因此更适用于流场

^{*} 收稿日期: 2001-01-31; 修订日期: 2001-04-23。基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (59776001)。

作者简介: 常利娜 (1973—), 女, 博士, 研究领域为计算流体力学。

计算。本文进一步发展了文献[4]所给的结点生成方法,根据计算精度的要求,确定流场各点处网格单元的尺寸,所给算法结合了 Delaunay 网格生成法和阵面推进法的特点,一方面可以实现算法的自动化,另一方面又具有灵活的几何特性,对于流场中的细节特征具有较高的分辨率。

2 误差估计

二维 Euler 方程可以记为守恒方程的形式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^x}{\partial x} + \frac{\partial F^y}{\partial y} = 0$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, F^x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uE + up \end{bmatrix}, F^y = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vE + vp \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中, ρ 表示密度, u 和 v 分别表示 x 和 y 方向的速度分量, E 表示单位质量的总能量。对完全气体,压力的计算式为

$$p = (\gamma - 1) [\rho E - \rho(u^2 + v^2)/2] \quad (2)$$

在式(1)中,状态量 U 是由四个变量 ρ , ρu , ρv 和 ρE 构成的矢量,对矢量直接进行误差估计比较困难,本文选取密度 ρ 作为表征状态矢量误差的关键量,并根据一阶梯度值 $\Delta\rho$ 衡量 ρ 的计算误差的大小^[5]。

用 δ_{T_j} 表示计算域中某一点处三角形单元 T_j 的特征尺寸,根据误差均匀分布的原则^[6], δ_{T_j} 的估计式为

$$\delta_{T_j}^2 \mid \Delta\rho \mid_{T_j} = \text{const} \quad (3)$$

3 网格结点的生成

在自适应网格生成算法中,需要构造背景网格来描述计算误差的分布情况,并据此确定各点处单元的特征尺寸,本文以三角形单元的外接圆半径作为特征尺寸。用 V_{backg} 表示背景网格划分, V_{backg} 表示背景网格覆盖的区域, $V_{\text{backg}} = \bigcup_{K_j \in \mathcal{K}_{\text{backg}}} K_j$, 其中 K_j 表示 V_{backg} 中的网格单元,取式(3)中的常数为

$$\text{const} = r_{\min} \max_{K_j \in \mathcal{K}_{\text{backg}}} \mid \Delta\rho \mid_{K_j} \quad (4)$$

其中, $r_{\min}$ 表示新的自适应网格中,限定的最小的三角形外接圆半径。由于精确解一般是不知道的,本文根据数值解来估计 $\Delta\rho$ 的值。这样,根据式(3)和(4),就可以计算出任意一点处三角形外接圆半径的期望值,并根据正三角形的几何性质进而确定单元边长的期望值。

网格结点包括边界结点和内部结点。边界结点的生成算法相对比较直观,这一算法可以表述为:根据计算域边界上各点处边长的期望值对边界进行离散,就可以得到边界点的集合。

下面给出了由背景网格确定内部结点的算法。在图1中,三角形 $T_{\text{front}} = \{P_1 P_2 P_3\}$ 表示了网格划分过程中某一特定时刻,半径最小的有效三角形^[4],不失一般性,假设需要由边 $P_1 P_2$ 来确定新加结点 P 的位置。

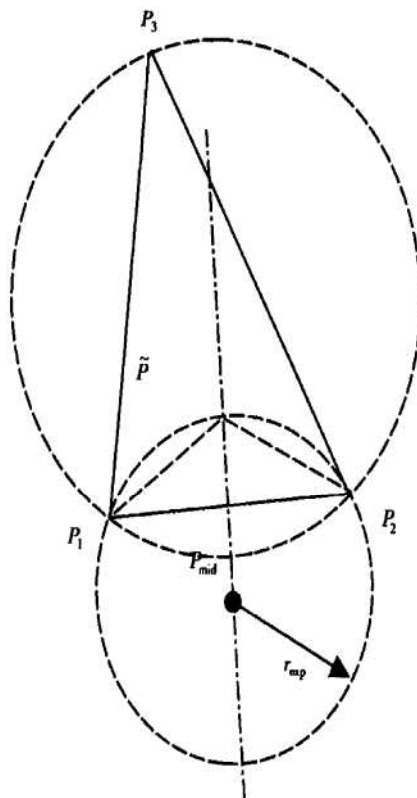


Fig. 1 The position of interior point

(1) 找出单元 $K_{p, \text{backg}}$, $K_{p, \text{backg}}$ 需要满足条件: $K_{p, \text{backg}} \subset V_{\text{backg}}$, $P_{\text{mid}} \in K_{p, \text{backg}}$, 其中, P_{mid} 表示 $P_1 P_2$ 的中点;

(2) 计算出 P_{mid} 处的密度梯度 $\mid \Delta\rho \mid_{P_{\text{mid}}} = \mid \Delta\rho \mid_{K_{p, \text{backg}}}$;

(3) 计算出 P_{mid} 处, 三角形外接圆半径的期望值: $r_{\text{exp}} = \text{const} / |\Delta \rho|_{P_{\text{mid}}}$;

(4) 比较 r_{exp} 与 $\frac{1}{2}|P_1P_2|$, $|P_1P_2|$ 表示边 P_1P_2 的长度。若 $r_{\text{exp}} \leq \frac{1}{2}|P_1P_2|$, 则取 P_{mid} 为新加点 P , 计算过程结束;

(5) 确定圆 B , B 需要满足条件: B 通过点 P_1 和 P_2 , 且 B 半径为 r_{exp} ;

(6) 求出边 P_1P_2 的垂直平分线与圆 B 的交点, 选取其中一个交点 P 为新加点(如图 1 所示)。

4 算例

本文将这一自适应网格的生成方法用于根据 Godunov 方法求解二维 Euler 方程的问题中。基于进口处的气体状态将方程(1)无量纲化, 无量纲后的变量用上划线表示。用下标“0”表示进口处的状态参数或长度的参考值, 算例 4.1 中, 密度、压力、速度和时间的参考值分别为 ρ_0 , p_0 , $\sqrt{p_0/\rho_0}$ 和 $x_0/\sqrt{p_0/\rho_0}$, 其中 x_0 为进口处的高度; 算例 4.2 中, 密度、压力、速度和时间的参考值分别为 ρ_0/γ , p_0 , $\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ 和 $x_0/\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$, 其中 x_0 为管道的直径。

为了减少计算所需时间, 同时保证计算精度, 首先在大尺寸的均匀初始网格上得到问题的初步解, 由这一初步解生成自适应网格, 自适应网格上的计算初值可以在上一次计算结果的基础上插值得到。这样根据已有网格上的数值解, 可以不断地生成自适应网格, 并以自适应网格作为计算网格, 在已有解的基础上继续进行计算, 最终得到较为精确的数值解。

4.1 15°平面斜坡上的流动

来流马赫数 $Ma_\infty = 2.28$ 时, 这一问题的理论解是: 产生一道与来流方向成 40° 角的斜激波, 激波在上壁处发生反射, 反射角大约为 $40^{[8,9]}$ 。图 2(a) 给出了计算所用的初始网格及一系列自适应网格, 所包含的网格结点数依次为: 290, 396, 869 和 1251。可以看

出, 随着网格的不断更新, 对斜激波位置和范围的限定也越来越精确。实际计算中, Godunov 方法在初始网格上一共迭代了 500 步, 在一系列自适应网格上依次迭代了 100 步, 图 2(b) 给出了相应的密度等值线图, 可以看出, 数值解与理论解符合得很好, 由于自适应网格生成技术的采用, 网格结点数增加不多时, 数值解的精度明显提高。

4.2 带有台阶的超声速管流

这一问题相关几何尺寸如图 3(a) 所示, 边界条件为: 进口和出口处均为超声速流, 进口处压力为 1.0, 密度为 1.4, 速度为 3.0, 出口处的外部条件不会对管内流动产生影响。Woodward 和 Colella 在结构网格上对这一算例做了计算^[10], 所采用的网格尺度为 $\Delta x = \Delta y = 1/80$, 本文在自适应非结构网格上进行了计算。

在流动没有稳定之前, 流场中流动特征的具体形式和位置是不断变化的。由于本文所给的网格生成方法是根据上一时刻迭代计算的结果, 确定各点处网格单元的尺寸, 因此能够根据流场中流动特征的变化, 不断调整网格加密区域。图 3(a), (b), (c) 和 (d) 分别给出了计算所用的初始网格及几个特定时刻的自适应网格, 初始网格中, 三角形单元的边长为 0.1, 自适应网格中, 单元的最大边长为 0.1, 最小边长为 0.012。可以看出, 自适应网格中网格分辨率的分布, 较好地反映了流动特征计算精度的需要, 而且与 Woodward 所用的计算网格相比, 单元数目要少得多。

图 4(a) 与图 5(a) 给出了计算时间 $\bar{t} = 4.0$ 时, 本文计算所得的密度等值线图和马赫数等值线图, 图 4(b) 与图 5(b) 给出了 Woodward 采用 PPMLR 格式得到的计算结果, 此时流动仍然是不稳定的。可以看出, 本文的计算结果与 Woodward 的计算结果基本一致, 只是在台阶附近细部特征略有不同, 这可能是因为在这一区域, 不同算法引起的数值耗散不同, 从而使计算收敛于不同的流动。

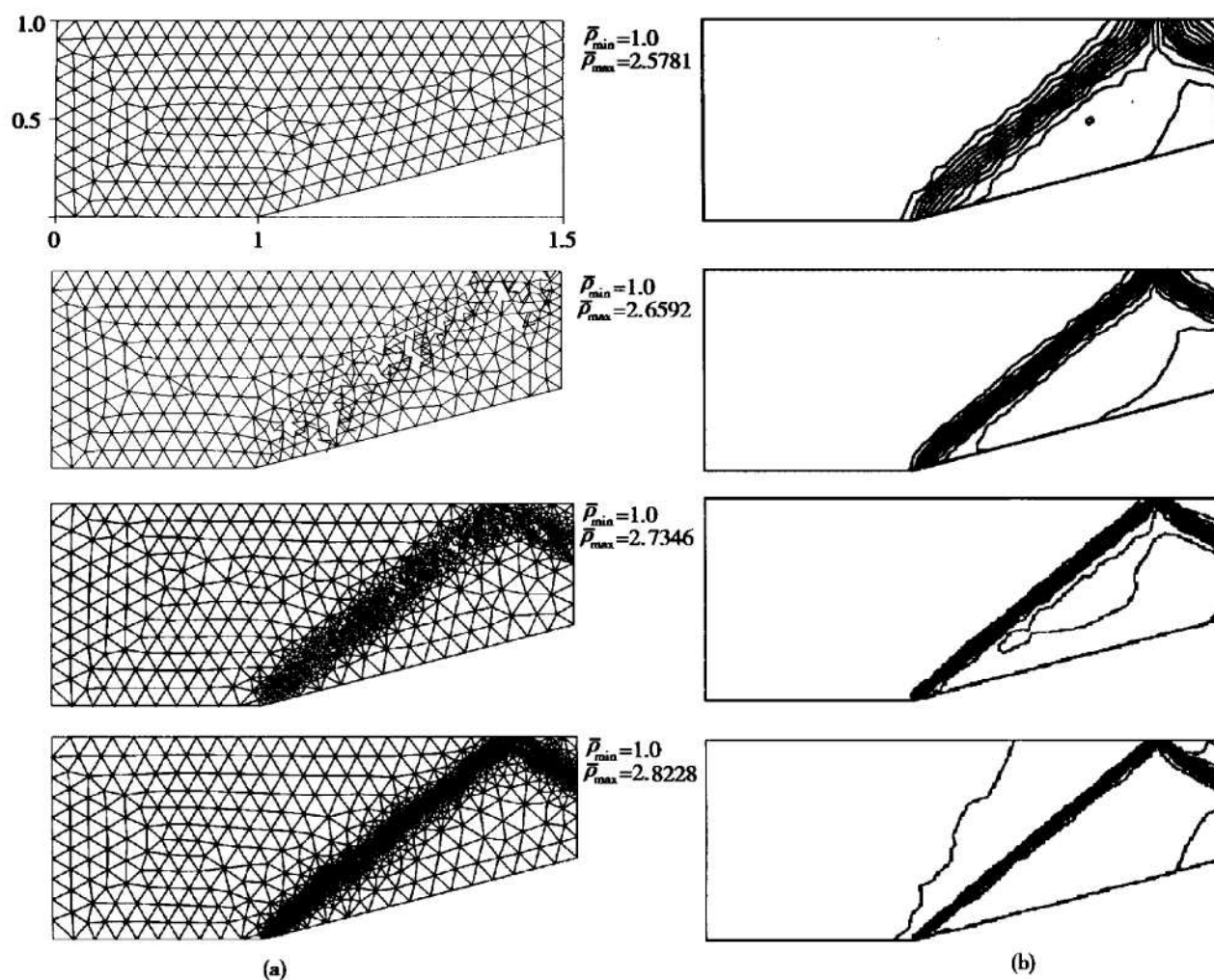


Fig. 2 Supersonic flow over a planar 15° ramp (adaptive remeshing)

(a) The sequence of grids; (b) Pressure contours(32 contours)

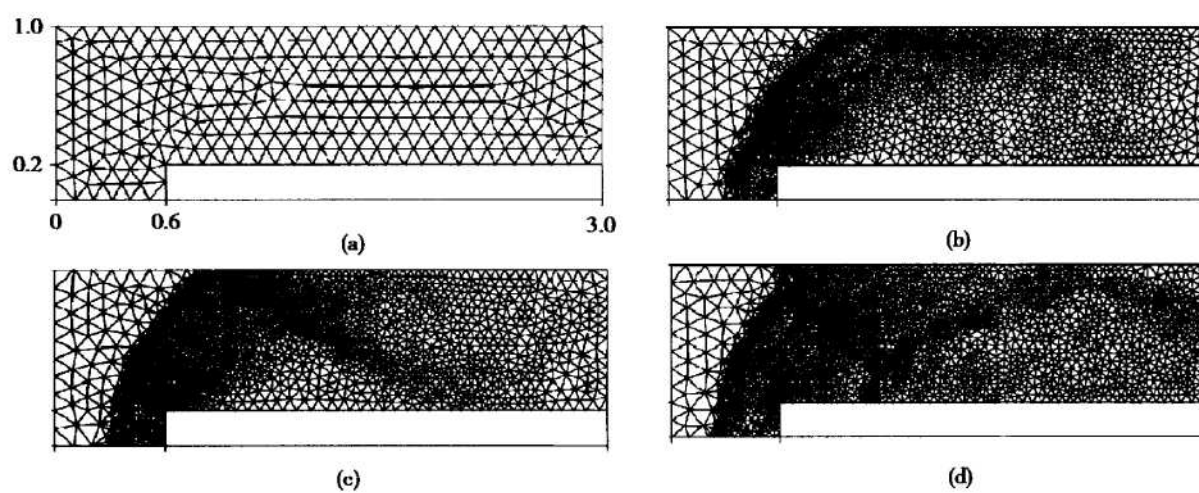


Fig. 3 A Mach 3 wind tunnel with a step

(a) Initial grid; (b) Adaptive grid for $t=0.7$; (c) Adaptive grid for $t=1.2$; (d) Adaptive grid for $t=4.0$

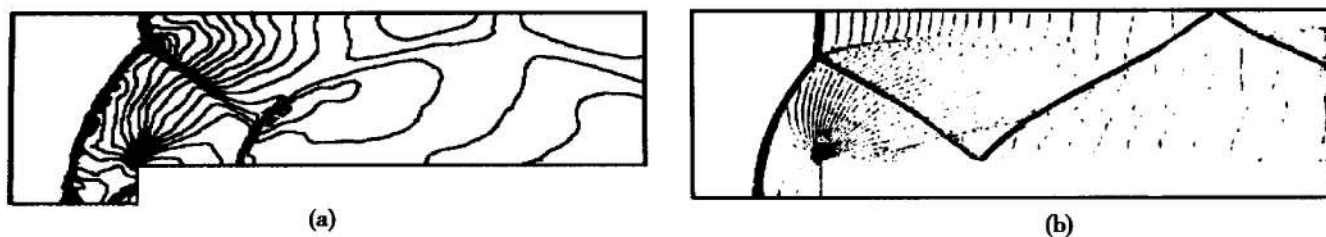


Fig. 4 Density contours for $\bar{t} = 4.0$ (30 contours)

(a) Result of this paper; (b) Woodward's result

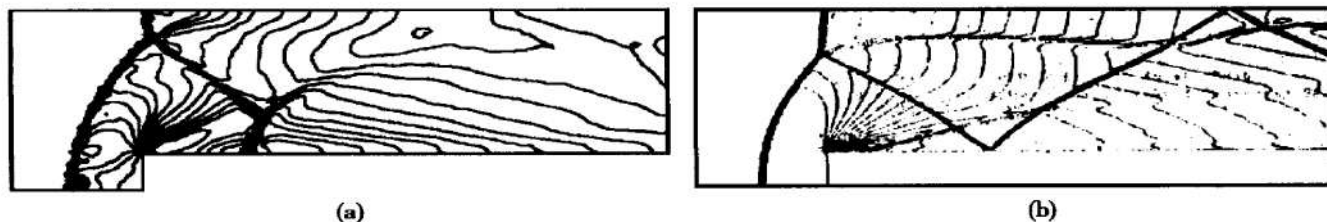


Fig. 5 Mach contours (30 contours) for $\bar{t} = 4.0$

(a) Result of this paper; (b) Woodward's result

5 结 论

本文所给的自适应网格生成方法具有以下特点:

(1) 以密度的一阶梯度衡量状态向量数值解的误差,对激波具有较高的分辨能力;

(2) 结点之间的连接关系是由 Delaunay 准则确定的,在网格生成过程中不需要人工干预;

(3) 基于阵面推进法直接根据数值解的误差计算新的自适应网格中结点的位置,因此更容易保证结点的合理分布。

参考文献:

- [1] Peraire J, Vahdati M, Morgan K, et al. Adaptive remeshing for compressible flow computation[J]. *J Comp Phys*, 1987, 72: 449~ 446.
- [2] Holmes D G, Snyder D D. The Generation of unstructured triangular meshes using delaunay triangulation, numerical grid generation in computational fluid mechanics[M]. *Pineridge Press, Swansea*, 1988.
- [3] Rebay S, Efficient unstructured mesh generation by means of Delaunay triangulation and Bowyer-Watson algorithm[J]. *J Comp Phys*, 1993, 106: 125~ 138.
- [4] 尹 河,常利娜,严传俊. 一种用于二维燃烧室流场计算的非结构网格的生成方法[J]. *航空动力学报*, 1999, 14: 413~ 416.
- [5] HWANG C J and WU S J. Global and local remeshing algorithms for compressible flows[J]. *J Comp Phys*, 1992, 102: 98 ~ 113.
- [6] Oden J T. Grid optimisation and adaptive meshes for finite element methods[M]. *University of Texas at Austin Notes*, 1983.
- [7] 尹 河,常利娜,严传俊. 在非结构网格上求解 Euler 方程的一种新算法,西北工业大学学报,2000, 18(增刊): 193~ 195.
- [8] Pepper D W, Humphrey J W, A hybrid finite element method for compressible flow[R]. *AIAA 90-0399*.
- [9] Liepmann H W, Roshko A 著. 气体动力学基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 1982.
- [10] Woodward P, Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks[J]. *J Comput Phys*, 1984, 54: 115~ 173.

(编辑: 王居信)