论加速可靠性增长试验
(五)分组数据的数值方法*

周源泉[1], 朱新伟[2]

(1. 北京强度与环境研究所, 北京 100076; 2. 中国海鹰机电技术研究院, 北京 100074)

摘 要: 基于 Arrhenius-幂律模型, 给出了分析恒定应力加速可靠性增长试验 (CSARGT) 分组数据的数值方法, 它们包括对 CSARGT 四项基本假定的统计检验, 在诸加速应力水平 S_i 下幂律模型参数与 MTBF 的极大似然估计 (MLE) 与区间估计, 加速方程系数的最佳线性无偏估计 (BLUE), 加速系数与正常应力水平 S_0 下折算的 MTBF 的区间估计, 并用数值例说明了这些方法。

关键词: 可靠性增长试验; 加速寿命试验; 故障分析; 分组数据; 数值法和计算方案; 加速系数

中图分类号: V430 **文献标识码**: A **文章编号**: 1001-4055 (2001) 03-0177-06

Research on accelerated reliability growth testing
(五) Numerical methods for grouped data

ZHOU Yuan-quan[1], ZHU Xin-wei[2]

(1. Beijing Inst. of Structure and Environment, Beijing 100076, China;
2. China Haiying Electro-Machanical Technology Academy, Beijing 100074, China)

Abstract: Based on Arrhenius-Power law model, the numerical methods for analysed grouping the data of Constant Stress Accelerated Reliability Growth Testing (CSARGT) were given. They included the statistical tests of four fundamental hypotheses of CSARGT, the Maximum Likelihood Estimation (MLE) and interval estimation of the parameters of the power law model and MTBF at accelerated stress levels S_i, the Best Linear Unbiased Estimation (BLUE) of the coefficient of acceleration equation, the interval estimations of acceleration factor and converted MTBF at normal stress level S_o. These methods were illustrated.

Key words: Reliability growth testing; Acceleration life test; Fault analysis; Grouped data; Numerical method and Procedure; Acceleration factor

1 引 言

作者对加速可靠性增长试验(ARGT)这个新方向及其理论基础进行了讨论[1,2], 并给出了分析恒定应力加速可靠性增长试验(CSARGT)分组数据的图方法[3]。本文基于 Arrhenius-幂律模型给出了分析 CSARGT 分组数据的数值方法, 包括 CSARGT 四个基本假定的统计检验, Arrhenius-幂律模型参数、加速系数、激活能及系统 MTBF 的统计估计, 并用工程实例说明了这些方法。

2 CSARGT 前三项假定的统计检验方法

其第一项假定 A1 是: 在加速应力水平 S_i ($i=1, 2, \cdots, m$) 下, 故障数据均有显著的可靠性正增长, 对分组数据的情况, 一般用 x^2 检验, 对单台场合, 可见文献[4]; 对多台场合, 可见文献[5]。

将 K_i 台同型可修系统投入 S_i 下作 ARGT, 在时间区间 (t_{j-1}, t_j) 内, K_i 台系统的故障数记为 $N_i(t_{j-1}, t_j)$, 其观测值为 n_{ij}, $i=1, 2, \cdots, m$, $j=1, 2, \cdots, d$; 这里 $t_o=0$, t_d 是截尾时间, 并记

* 收稿日期: 2000-05-17; 修订日期: 2000-11-09。
作者简介: 周源泉 (1937 —), 男, 研究员, 研究领域为可靠性评定与可靠性增长及加速试验。

$$n_i = \sum_{j=1}^{d} n_{ij}, \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

增长检验方法如下：取规范化时间 $p_j = t_j/t_d, j = 1,2,\cdots,d$，记 $\rho_j = (t_j - t_{j-1})/t_d, j = 1,2,\cdots,d$，对每个区间，要求 $\rho_j n_i \geqslant 5$，否则，需在增长检验前将相邻区间合并，然后，计算统计量

$$_{1i}x^2 = \sum_{j=1}^{d} \frac{(n_{ij} - \rho_j n_i)^2}{\rho_j n_i} = n_i^{-1} \sum_{j=1}^{d} \frac{n_{ij}^2}{\rho_j} - n_j,$$

$$i = 1,2,\cdots,m \qquad (1)$$

当 $_{1i}x^2 \geqslant x^2_{d-1,1-\alpha}$ 时，则 S_i 下有正或负的可靠性增长。通常，显著性水平 α 取 0.2。这里 $x^2_{d-1,1-\alpha}$ 是自由度为 $(d-1)$ 的 x^2 分布的 $(1-\alpha)$ 分位数。此时，应继续作增长分析，若 $_{1i}x^2 < x^2_{d-1,1-\alpha}$，则认为相继的故障间隔服从指数分布，此时，终止增长分析。

为了进一步判定是正增长还是负增长，必须计算 AMSAA-BISE 模型的形状参数 b_i 的极大似然估计 $\hat{b}_i$，它由下式解出：

$$\sum_{j=1}^{d} n_{ij} \frac{\left[p_j^{\hat{b}_i} \ln p_j - p_{j-1}^{\hat{b}_i} \ln p_{j-1} \right]}{p_j^{\hat{b}_i} - p_{j-1}^{\hat{b}_i}} = 0,$$

$$j = 1,2,\cdots,m \qquad (2)$$

注意，在 $p_0 = 0$ 时，$p_0^{\hat{b}_i} \ln p_0 = 0$，上式通常可用 Brent 迭代求解。当 $0 < \hat{b}_i < 1$ 时，认为是正增长；当 $\hat{b}_i > 1$ 时，认为是负增长。

CSARGT 的第二项假定 A2 是：在 S_i 下的故障数据服从 AMSAA-BISE 模型，在分组故障数据下，作拟合优度检验，也可用 x^2 检验，这在文献[4]（对单台系统）及文献[5]（对多台系统）中可以找到，其检验统计量为

$$_{2i}x^2 = \sum_{j=1}^{d} \frac{\left[n_{ij} - e_{ij} \right]^2}{e_{ij}} = \sum_{j=1}^{d} \frac{n_{ij}^2}{e_{ij}} - n_i$$

$$i = 1,2,\cdots,m \qquad (3)$$

式中 $e_{ij} = n_j(p_j^{\hat{b}_i} - p_{j-1}^{\hat{b}_i})$ 是 S_i 下，K_i 台系统落入区间 (t_{j-1}, t_j) 内的理论故障次数。注意，e_{ij} 应不小于 5，否则，在拟合优度检验之前，应将相邻区间合并。

当 $_{2i}x^2 \leqslant x^2_{d-2,1-\alpha}$ 时，则认为 S_i 下的故障数据可用 AMSAA-BISE 模型拟合；否则，拒绝该模型。这里的显著性水平 α 通常取 0.1。

CSARGT 的第三项假设 A3 是：S_i 下的形状参数 b_i 相等，即需检验假设 H_0: $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = b \leftrightarrow H_1$: b_i 不全相等。用大样本正态近似，认为 $\hat{b}_i \sim N(b_i, Db_i)$，文献[5]指出，$\hat{b}_i$ 的方差 $D\hat{b}_i$ 为 $D\hat{b}_i = \hat{b}_i^2/(A_i n_i)$，$i = 1,2,\cdots,m$，式中

$$A_i = \sum_{j=1}^{d} \frac{\left[p_j^{\hat{b}_i} \ln p_j^{\hat{b}_i} - p_{j-1}^{\hat{b}_i} \ln p_{j-1}^{\hat{b}_i} \right]^2}{p_j^{\hat{b}_i} - p_{j-1}^{\hat{b}_i}},$$

$$\mathrm{i} = 1,2,\cdots,\mathrm{m} \qquad (4)$$

注意，上式中 $p_0 = 0$ 时，$p_0^{\hat{b}_i} \ln p_0^{\hat{b}_i} = 0$，对 H_1 检验 H_0 的显著水平 α 的接收域为

$$\max \left| \, | \hat{b}_i - \hat{b}_k | \Big/ \sqrt{\frac{\hat{b}_i^2}{A_i n_i} + \frac{\hat{b}_k^2}{A_k n_k}} \, \right| \leqslant u_{1-\alpha'/2},$$

$$1 \leqslant k < i \leqslant m \qquad (5)$$

式中 $u_{1-\alpha'/2}$ 是标准正态分布的 $(1-\alpha'/2)$ 分位数。因式(5)能够成立的概率为 $1-\alpha$，因而它又等于 $(1-\alpha')^{m(m-1)/2}$，故

$$1 - \alpha'/2 = [1 + (1-\alpha)^{2/[m(m-1)]}]/2$$

通常取 $\alpha = 0.1$，对常见的 m 下的 $u_{1-\alpha'/2}$ 值，可算得如表 1。在接收 H_0 后，应继续进行 ARGT 分析。

Table 1 $u_{1-\alpha'/2}$ table($\alpha = 0.1$)

m	2	3	4	5	6
$1-\alpha'/2$	0.95	0.982 745	0.991 297	0.994 760	0.996 500
$u_{1-\alpha'/2}$	1.644 854	2.114 05	2.378 00	2.559 55	2.696 88

3 $a_i, b, M_i(t_d), K_{ik}$ 的极大似然估计

在 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = b$ 时，CSARGT 结果的似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{d} p\{N_i(t_{j-1}, t_j) = n_{ij}\} =$$

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{d} \frac{[K_i a_i (p_j^b - p_{j-1}^b)]^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \exp[-K_i a_i (p_j^b - p_{j-1}^b)]$$

则对数似然函数为

$$\ln L = c + \sum_{i=1}^{m} n_i \ln a_i + \sum_{j=1}^{d} (\sum_{i=1}^{m} n_{ij}) \cdot$$

$$\ln(p_j^b - p_{j-1}^b) - \sum_{i=1}^{m} K_i a_i$$

由 $\partial \ln L / \partial a_i = 0$, $\partial \ln L / \partial b = 0$ 可给出 a_i, b 的极大似然估计 $\hat{a}_i, \hat{b}$:

$$\hat{a}_i = n_i / K_i \qquad i = 1,2,\cdots,m \qquad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{d} (\sum_{i=1}^{m} n_{ij}) \frac{p_j^{\hat{b}} \ln p_j - p_{j-1}^{\hat{b}} \ln p_{j-1}}{p_j^{\hat{b}} - p_{j-1}^{\hat{b}}} \qquad (7)$$

上式中要注意：当 $p_0 = 0$ 时，$p_0^{\hat{b}} \ln p_0 = 0$. S_i 对 S_k 的加速系数为

$$K_{ik} = (a_i / a_k)^{1/b}, \qquad 1 \leqslant k < i \leqslant m$$

其极大似然估计为 $K_{ik} = (\hat{a}_i/\hat{a}_k)^{1/\hat{b}}$，在 S_i 下，系统于 t_d 的 MTBF 记为 $M_i(t_d)$，其极大似然估计（它

与 t_d 有相同的单位) 为 $M_i(t_d) = t_d/(\hat{a}_i\hat{b})$

4　$b, M_i(t_d), K_{ik}$ 的置信上(下)限

在大样本正态近似下, 要给出 $b, M_i(t_d), K_{ik}$ 的置信上(下)限, 必须先求出 $(a_1, a_2, \cdots, a_m, b)$ 的协方差矩阵 $\boldsymbol{V}$, 它是观测信息阵 $\boldsymbol{I}_0$ 的逆矩阵[6]。

$$\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{I}_0 \begin{pmatrix} -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_1^2} & -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_1 a_2} & \cdots & -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_1 a_m} & -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_1 \partial b} \\ -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_1 a_2} & -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_2^2} & \cdots & -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_2 a_m} & -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_2 \partial b} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_1 a_m} & -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_2 a_m} & \cdots & -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_m^2} & -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_m \partial b} \\ -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_1 \partial b} & -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_2 \partial b} & \cdots & -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_m \partial b} & -E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} \end{pmatrix}_{(\hat{a}_i, \hat{b})}$$

因　$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_i^2} = -\frac{n_i}{a_i^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_i \partial a_k} = 0, \quad 1 \leqslant k < i \leqslant m$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_i \partial b} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} = \sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{i=1}^{m} n_{ij}\right)\frac{p_j^b \ln^2 p_j - p_{j-1}^b \ln^2 p_{j-1}}{p_j^b - p_{j-1}^b} - \sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{i=1}^{m} n_{ij}\right)\frac{(p_j^b \ln p_j - p_{j-1}^b \ln p_{j-1})^2}{(p_j^b - p_{j-1}^b)^2}$$

注意到

$$\left. E\left(\sum_{i=1}^{m} n_{ij}\right)\right|_{a_i=\hat{a}_i} = \left.\sum_{i=1}^{m} K_i a_i (p_j^b - p_{j-1}^b)\right|_{a_i=\hat{a}_i} = (p_j^b - p_{j=1}^b)\sum_{i=1}^{m} n_i$$

故　$\partial^2 \ln L/\partial b^2$ 第一项的均值

$$\sum_{j=1}^{d}\left(E\sum_i n_{ij}\right)\frac{p_j^b \ln^2 p_j - p_{j-1}^b \ln^2 p_{j-1}}{p_j^b - p_{j-1}^b} = \sum_{i=1}^{m} n_j \sum_{j=1}^{d}\left(p_j^b \ln^2 p_j - p_{j-1}^b \ln^2 p_{j-1}\right) = \sum_{i=1}^{m} n_i p_d^b \ln^2 p_d = 0$$

则 $\left(-E\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2}\right)_{(\hat{a}_i, \hat{b})} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{\hat{b}^2}\sum_{j=1}^{d}\frac{(p_j^{\hat{b}} \ln p_j^{\hat{b}} - p_{j-1}^{\hat{b}} \ln p_{j-1}^{\hat{b}})^2}{p_j^{\hat{b}} - p_{j-1}^{\hat{b}}}$$

记
$$A = \sum_{j=1}^{d}\frac{(p_j^{\hat{b}} \ln p_j^{\hat{b}} - p_{j-1}^{\hat{b}} \ln p_{j-1}^{\hat{b}})^2}{p_j^{\hat{b}} - p_{j-1}^{\hat{b}}} \tag{8}$$

注意, 上式中当 $p_0 = 0$ 时, $p_0^{\hat{b}} \ln p_0^{\hat{b}} = 0$.

由上述计算可知, $\boldsymbol{V}$ 是对角矩阵, 且

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}_0^{-1} = \begin{pmatrix} n_1/K_1^2 & & & & \\ & n_2/K_2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & n_m/K_m^2 & \\ & & & & \hat{b}^2/(A\sum_1^m n_i) \end{pmatrix}$$

故 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_m, \hat{b}$ 相互独立, 且

$$\mathrm{D}\hat{a}_i = n_i/K_i^2 = \hat{a}_i^2/n_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{9}$$

$$\mathrm{D}\hat{b} = \hat{b}^2/\left(A\sum_{i=1}^{m} n_i\right) \tag{10}$$

由此可得置信水平为 γ 时, b 的置信上限 b_u 为

$$b_u = \hat{b}\left(1 + u_\gamma/\sqrt{A\sum_{i=1}^{m} n_i}\right) \tag{11}$$

为了求出 $M_i(t_d), K_{ik}$ 的置信下限, 下面先用线性化方法求 $\hat{M}_i(t_d), \hat{K}_{ik}$ 的方差。

因　$\frac{\mathrm{d}\hat{M}_i(t_d)}{\hat{M}_i(t_d)} = -\left(\frac{\mathrm{d}\hat{a}_i}{\hat{a}_i} + \frac{\mathrm{d}\hat{b}_i}{\hat{b}}\right)$

故 $\mathrm{D}\hat{M}_i(t_d) = \hat{M}_i^2(t_d)\left(\frac{\mathrm{D}\hat{a}_i}{\hat{a}_i^2} + \frac{\mathrm{D}\hat{b}}{\hat{b}^2}\right) = \hat{M}_i^2(t_d)\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{A\sum_1^m n_i}\right)$

则置信水平为 γ 时 $M_i(t_d)$ 的置信下限为

$$M_{i,\mathrm{L}}(t_d) = \hat{M}_i(t_d)\left(1 - u_\gamma\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{A\sum_i n_i}}\right) \tag{12}$$

因 $Q = \ln\hat{K}_{ik} = \hat{b}^{-1}(\ln\hat{a}_i - \ln\hat{a}_k) \quad 1 \leqslant k < i \leqslant m$

故 $\mathrm{d}Q = \frac{1}{\hat{b}}\left(\frac{\mathrm{d}\hat{a}_i}{\hat{a}_i} - \frac{\mathrm{d}\hat{a}_k}{\hat{a}_k} - \ln\left(\frac{\hat{a}_i}{\hat{a}_k}\right)\frac{\mathrm{d}\hat{b}}{\hat{b}}\right)$

则有 $\mathrm{D}Q = \frac{1}{\hat{b}^2}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_k} + \ln^2\left(\frac{\hat{a}_i}{\hat{a}_k}\right)\Big/\left(A\sum_1^m n_i\right)\right)$

对 $Q \sim N(Q, \mathrm{D}Q)$, 则　$Q_L = Q - u_\gamma\sqrt{\mathrm{D}\hat{Q}}$

故置信水平为 γ 时, K_{ik} 的置信下限为

$$K_{ik,\mathrm{L}} = \hat{K}_{ik}\exp\left(-\frac{u_\gamma}{\hat{b}}\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_k} + \ln^2\left(\frac{\hat{a}_i}{\hat{a}_k}\right)\Big/\left(A\sum_1^m n_i\right)}\right) \tag{13}$$

5　加速方程系数的 BLUE

为方便, 将 $\varphi(S_i)$ 简记为 φ_i, 则加速方程可写为

$$\mu_i = \ln a_i = c + d\varphi_i$$

$$\mathrm{D}\mu_i = \mathrm{D}\hat{a}_i/\hat{a}_i^2 = n_i^{-1} \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

且　$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ 相互独立, 记

$$\mu=\begin{vmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_m\end{vmatrix},\qquad \theta=\begin{vmatrix}c\\ d\end{vmatrix}$$

$$X=\begin{vmatrix}1 & \varphi_1\\ 1 & \varphi_2\\ \vdots & \vdots\\ 1 & \varphi_m\end{vmatrix},\ A_0=\begin{vmatrix}n_1^{-1} & & & \\ & n_1^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & n_m^{-1}\end{vmatrix}$$

故有 $E\mu=X\theta$, $D\mu=A_0$

由 Gauss-Markov 定理[7]，可得 θ 的 BLUE $\hat\theta$ 为

$$\hat\theta=\begin{vmatrix}\hat c\\ \hat d\end{vmatrix}=(X'A_0^{-1}X)^{-1}X'A_0^{-1}\mu$$

$\hat\theta$ 的协方差阵为 $V(\hat\theta)=(X'A_0^{-1}X)^{-1}$

可算得 $X'A_0^{-1}X=\begin{vmatrix}B & I\\ I & G\end{vmatrix}$, $B=\sum_{i=1}^{m}n_i$, $I=\sum_{i=1}^{m}n_i\varphi_i$, $G=\sum_{i=1}^{m}n_i\varphi_i^2$，则 $(X'A_0^{-1}X)^{-1}=\frac{1}{BG-I^2}\begin{vmatrix}G & -I\\ -I & B\end{vmatrix}$

故 $\hat c$, $\hat d$ 的方差、协方差分别为 $D\hat c=G/(BG-I^2)$, $D\hat d=B/(BG-I^2)$, $\mathrm{Cov}(\hat c,\hat d)=-I/(BG-I^2)$.

而 $X'A_0^{-1}\mu=\begin{vmatrix}H\\ M\end{vmatrix}$，式中

$$H=\sum_{i=1}^{m}n_i\mu_i,\ M=\sum_{i=1}^{m}n_i\mu_i\varphi_i,\ 故$$

$$\begin{vmatrix}\hat c\\ \hat d\end{vmatrix}=\frac{1}{BG-I^2}\begin{vmatrix}G & -I\\ -I & B\end{vmatrix}\begin{vmatrix}H\\ M\end{vmatrix}=\frac{1}{BG-I^2}\begin{vmatrix}GH-IM\\ BM-IH\end{vmatrix}$$

即 $$\hat c=(GH-IM)/(BG-I^2)\tag{14}$$

$$\hat d=(BM-IH)/(BG-I^2)\tag{15}$$

因 $\hat a_i=\exp(\hat c+\hat d\varphi_i)\qquad i=0,1,2,\cdots,m$

故 $$\hat k_{i0}=(\hat a_i/\hat a_0)^{1/\hat b}=\exp\left|\frac{\hat d}{\hat b}(\varphi_i-\varphi_0)\right|\qquad i=1,2,\cdots,m\tag{16}$$

将 S_m 下达到的 MTBF $M_m(t_d)$ 折算到 S_0 下，其 MTBF 的估计量为

$$\hat M_m=K_{m0}M_m(t_d)=\frac{t_d}{\hat a_m\hat b}\exp\left|\frac{\hat d}{\hat b}(\varphi_m-\varphi_0)\right|\tag{17}$$

6 加速模型的检验(检验假定 A4)

这里用相关系数法来检验此加速模型的显著性[8]。注意到 μ_i 不是等精度的，但 $\sqrt{n_i}\mu_i$ 就是等精度的，故加速模型可改写为

$$\mu_i\sqrt{n_i}=c\sqrt{n_i}+d\varphi_i\sqrt{n_i}$$

则对 $(x_i,y_i)=(\sqrt{n_i}\varphi_i,\sqrt{n_i}\mu_i)\qquad i=1,2,\cdots,m$，它们的经验相关数为 $\rho=l_{xy}/\sqrt{l_{xx}l_{yy}}$

式中 $l_{xy}=\sum_{i=1}^{m}n_i(\mu_i-\bar\mu)(\varphi_i-\bar\varphi)=$

$\sum n_i\mu_i\varphi_i-\bar\mu\bar\varphi\sum_{1}^{m}n_i=$

$\sum n_i\mu_i\varphi_i-\sum n_i\varphi_i\cdot\sum n_i\mu_i/\sum n_i$

这里 $\bar\mu=\sum n_i\mu_i/\sum n_i$, $\bar\varphi=\sum_i n_i\varphi_i/\sum_i n_i$,

$l_{xx}=\sum n_i\varphi_i^2-(\sum n_i\varphi_i)^2/\sum n_i$,

$l_{yy}=\sum n_i\mu_i^2-(\sum n_i\mu_i)^2/\sum_{1}^{m}n_i$.

记 $$W=\sum n_i\mu_i^2\tag{18}$$

则 $$\rho=\frac{BM-IH}{\sqrt{(BG-I^2)(BW-H^2)}}\tag{19}$$

对给定的显著性水平 α，若 $|\rho|>\rho_\alpha$，则认为 x_i, y_i 相关，该加速模型可以使用。这里 ρ_α 是理论相关系数 $\rho=0$ 时 ρ 的临界值，其自由度 $f=m-2$。这里 α 通常取 0.05 或 0.01，ρ_α 可在文献[5]的 179 页查到。

7 激活能 E、加速系数 K_{i0} 及 S_0 下 MTBF 的置信下限

文献[3]指出，激活能 $E=-kd/b$，式中 $k=8.617\times10^{-5}$ eV/K 是 Boltzman 常数。由 d 的 BLUE，b 的 MLE 可得 E 的点估计 $\hat E=-k\hat d/\hat b$，由于 $\hat d$ 是由 $\hat a_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 估计出的，故 $\hat d$, $\hat b$ 相互独立。据此，可求出 $\hat E$ 的方差

$$D\hat E=\hat E^2(D\hat d/\hat d^2+D\hat d/\hat d^2)$$

由正态近似可得 E 的置信水平为 γ 的置信下限

$$E_LE_L=\hat E(1-u_\gamma\cdot\hat\sigma_E)\tag{20}$$

式中 $$\hat\sigma_E=\sqrt{D\hat d/\hat d^2+D\hat d/\hat d^2}\tag{21}$$

K_{i0} 的点估计为

$$\hat K_{i0}=\exp|(\varphi_i-\varphi_0)\hat d/\hat b|=\exp|-\hat E(\varphi_i-\varphi_0)/k|$$

由于 K_{i0}，是 E 的严格单调上升函数，故 K_{i0} 的置信水平为 γ 的置信下限为

$$K_{i0,L}=\exp|-E_L(\varphi_i-\varphi_0)/k|=\hat K_{i0}^{(1-u_r\hat\sigma_E)}\tag{22}$$

记 $\hat\omega=\ln\hat M_m$, $\omega=\ln M_m$，则

$$\hat\omega=\ln t_d-\mu_m-\ln\hat b+(\varphi_m-\varphi_0)\hat d/\hat b$$

记 $$\hat d=\sum_{i=1}^{m}n_i(B\varphi_i-I)\mu_i/\Delta$$

$$\Delta=BG-I^2$$

则 $d\hat\omega=-\frac{d\hat b}{\hat b}\left|1+\frac{\varphi_m-\varphi_0}{\hat b}\hat d\right|-d\mu_m+\frac{\varphi_m-\varphi_i}{\hat b}\cdot$

$$\sum_{1}^{m}\frac{n_i(B\varphi_i - I)}{\Delta}d\mu_i = \frac{d\hat{b}}{\hat{b}}\left[1+\frac{\varphi_m-\varphi_0}{\hat{b}}\hat{d}\right]+\left[\frac{\varphi_m-\varphi_0}{\hat{b}}n_m(B\varphi_m - I)/\Delta - 1\right]d\mu_m+\frac{\varphi_m-\varphi_0}{\hat{b}}\cdot\sum_{1}^{m-1}n_i(B\varphi_i - I)d\mu_i/\Delta$$

故 $\hat{\omega}$ 的方差为

$$D\hat{\omega} = \left[1+\frac{\varphi_m-\varphi_0}{\hat{b}}\hat{d}\right]^2\frac{Db}{\hat{b}^2}+\left[\frac{\varphi_m-\varphi_0}{\hat{b}}\right]^2 D\hat{d}+\frac{1}{n_m}-2\frac{\varphi_m-\varphi_0}{\hat{b}}\cdot\left[\varphi_m-\frac{I}{B}\right]D\hat{d} = \left[1+\hat{d}\frac{\varphi_m-\varphi_0}{\hat{b}}\right]^2\frac{D\hat{b}}{\hat{b}^2}+D\hat{d}\left[\frac{\varphi_m-\varphi_0}{\hat{b}}\right]\left[\frac{\varphi_m-\varphi_0}{\hat{b}}-2(\varphi_m-\frac{I}{B})\right]+\frac{1}{n_m}$$

由正态近似, 可得置信水平为 γ 时 ω 的置信下限 $\omega_L = \hat{\omega} - u_\gamma\sqrt{D\hat{\omega}}$, 则置信水平为 γ 的 M_m 置信下限为

$$M_{m,L} = \exp\left[\hat{\omega} - u_\gamma\sqrt{D\hat{\omega}}\right] = \hat{M}_m\exp\left[-u_\gamma\sqrt{D\hat{\omega}}\right] \tag{23}$$

8　数值例

某电子产品以温度作为加速变量, 在 4 组加速应力水平 S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 下作 CSARGT, 取得的分组数据如表 2 所示, 试作 CSARGT 的数值分析。

Table 2　CSARGT data of a type electronics

			j	1	2	3	4	5	6	7	
i	T_i	K_i	$n_{ij} \backslash t_j$	2h	4h	6h	8h	10h	12h	14h	n_i
1	308 K	11 200	n_{1j}	62	23	16	13	12	10	11	147
2	313 K	11 230	n_{2j}	81	38	19	20	12	17	9	196
3	318 K	11 136	n_{3j}	105	44	27	19	19	19	15	248
4	323 K	11 140	n_{4j}	130	49	33	26	22	20	20	300

(1) 假定 A1~ A3 的统计检验

对各组数据均有 $\rho_j n_i \geqslant 5$, $e_{ij} \geqslant 5$, 故不必重新划分区间, 据此可算得表 3 中的数据。

Table 3　Data required to test A1~ A3

i	1	2	3	4
${}_{1i}\chi^2$	98. 857 14	135. 428 57	175. 330 64	221. 500 00
${}_{2i}\chi^2$	0. 294 81	5. 651 13	2. 050 21	0. 622 72
$\hat{b}_i$	0. 443 946	0. 439 332	0. 433 744	0. 425 639
$b_{i,u}$	0. 505 737	0. 492 462	0. 480 564	0. 4676 63
A_i	0. 576 72	0. 572 96	0. 568 36	0. 561 60

由于 ${}_{1i}\chi^2 > \chi^2_{6,0.9999} = 27.856\,34$ 及 $\hat{b}_i < 1$, 故各组故障数据均有显著的可靠性正增长。

因 ${}_{2i}\chi^2 > \chi^2_{5,0.9} = 9.236\,36$, 故各组数据均可用 AMSAA-BISE 模型拟合。在此前提下, 由于在置信水平 $\gamma = 0.9$ 时的 $b_{i,u} < 1$, 也表明各组数据有显著的可靠性正增长。因

$$\max\left[\,|\hat{b}_i - \hat{b}_k|/\sqrt{\hat{b}_i^2/(A_in_i)+\hat{b}_k^2/(A_kn_k)}\,\right] = 0.314\,0 < u_{1-\alpha/2} = 2.378$$

故在显著性水平 $\alpha = 0.10$ 下, 不能拒绝假设 H_0: $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b$。

(2) 求 $b, K_{i1}, M_i(t_d)$ 等的 MLE 及置信上(下)限

b 的 MLE $\hat{b}$ 及 $\gamma = 0.9$ 的置信上限分别为 $\hat{b} = 0.433\,894\,8$, $b_u = 0.458\,602$, b 的误差系数 $A = 0.568\,488\,3$。对置信水平 $\gamma = 0.9$, 算得有关参数的点估计与置信下限, 列于表 4 。

Table 4　Point estimations and lower confidence limits of a_i, $M_i(t_d)$, K_{i1}

i	1	2	3	4
a_i	0. 013 125	0. 017 453 25	0. 022 270 115	0. 026 929 982
$M_i(t_d)/h$	2 458. 35	1 848. 70	1 448. 84	1 198. 14
$M_{i,L}(t_d)/h$	2 163. 20	1 649. 40	1 304. 94	1 086. 28
K_{i1}	/	1. 928 7	3. 382 3	5. 240 6
$K_{i1,K}$	/	1. 394 4	2. 467 9	3. 836 2

(3) 加速方程的检验(即检验假定 A4)

计算经验相关系数 ρ(其中间结果见表 5) 。

$$\rho(BM - IH)/\sqrt{(BG - I^2)(BW - H^2)} = -0.9970$$

对 $\alpha = 0.01$, 自由度 $f = m - 2 = 2$, $\rho_\alpha = 0.99 < |\rho|$.

故 μ_i 与 T_i^{-1} 之线性相关性甚好, 可以接收此加速模

型,并用它进行外推。

(4) 求加速方程的系数 C, d 的 BLUE 与加速系数、激活能, S_0 下的 MTBF 的点估计如下:

计算 $\hat{c}, \hat{d}$ 等的中间结果见表 5, 据此可算得

$\hat{C} = (GH - IM)/(BG - I^2) = 10.962\ 3$

$\hat{d} = (BM - IH)/(BG - I^2) = -4703.08\mathrm{K}$

$D\hat{d} = B/(BG - I^2) = 381\ 691.456$

$D\hat{d}/\hat{d}^2 = 0.017\ 256\ 308\ 44$

Table 5 Estimation of coefficient of accelerated equation and test of accelerated equation

i	K_i	n_i	T_i	μ_i	n_i/T_i	n_i/T_i^2	$n_i\mu_i$	$n_i\mu_i^2$	$n_i\mu_iT_i$
1	11 200	147	308	− 4.333 236 471	0.477 272 727 3	$1.549\ 586\ 777\times10^{-3}$	− 636.985 761 2	2 760.209 931	− 2.068 135 588
2	11 230	196	313	− 4.048 229 388	0.626 198 083 1	$2.000\ 632\ 853\times10^{-3}$	− 793.452 960 1	3 212.079 592	− 2.534 993 483
3	11 136	248	318	− 3.804 509 636	0.779 874 213 8	$2.452\ 434\ 635\times10^{-3}$	− 943.518 389 8	3 589.624 806	− 2.967 038 962
4	11 140	300	323	− 3.614 515 039	0.928 792 569 7	$2.875\ 518\ 792\times10^{-3}$	− 1 084.354 512	3 919.415 69	− 3.357 134 711
Σ		B = 891			I = 2.812 137 594	$G = 8.878\ 173\ 057\times10^{-3}$	H = − 3 458.311 623	W = 13 481.330 02	M = − 10.927 302 74

加速系数 k_{i0} 的点估计为

$$\hat{k}_{i0} = \exp\left[(T_i^{-1} - T_0^{-1})\hat{d}/\hat{b} \right]$$

故 $\hat{k}_{10} = 3.257\ 5$, $\hat{k}_{20} = 5.715\ 2$, $\hat{k}_{30} = 9.851\ 5$, $\hat{k}_{40} = 16.697\ 6$.

将 S_4 下的 MTBF$M_4(t_d)$ 折合到 S_0 下, 其 MTBF 的点估计 $\hat{M}_4$ 为 $\hat{M}_4 = \hat{K}_{40}\hat{M}_4(t_d) = 20\ 006$ h

激活能 E 的点估计为 $\hat{E} = -k\hat{d}/\hat{b} = 0.934\ 0$ eV

(5) 求 E, K_{40}, M_4 的置信下限

取 $\gamma = 0.8$, $\mu_\gamma = 0.841\ 62$, 可求得 $E_L = 0.825\ 0$ eV, $K_{40,L} = 12.02$, $M_{4,L} = 14\ 580$ h.

适当地选择 m 的大小很重要, m 太大, 将耗费大量经费与时间; m 太小, 将无法满足精度要求。表 6 列出不同 m 下, $EP = (\hat{E} - E_L)/\hat{E}$, $KP = (\hat{K}_{40} - K_{40,L})/\hat{K}_{40}$, $MP = (\hat{M}_4 - M_{4,L})/\hat{M}_4$ 的数值。

从表 6 可知, m 取 4 是恰当的。至少 m 要取 3, 否则误差将太大, 而且无法检验加速方程的适用性。

Table 6 Value of EP, KP, MP for m = 2, 3, 4

m	EP	KP	MP	Used data
2	0.383	0.595	0.585	Data of i = 3, 4
3	0.183	0.381	0.369	Data of i = 2, 3, 4
4	0.117	0.280	0.271	Data of i = 1, 2, 3, 4

参考文献:

[1] 周源泉, 朱新伟. 论加速可靠性增长试验(I): 新方向的提出[J]. 推进技术, 2000, 21(6).

[2] 周源泉, 朱新伟. 论加速可靠性增长试验(II): 理论基础[J]. 推进技术, 2001, 22(1).

[3] 周源泉, 朱新伟. 论加速可靠性增长试验(III): 分组数据的图方法[J]. 推进技术, 2001, 22(2).

[4] Reliability growth-statistical test and estimation methods[R]. IEC 1164, 1995.

[5] 周源泉, 翁朝曦. 可靠性增长[M]. 北京: 科学出版社, 1992.

[6] 周源泉, 翁朝曦. 可靠性评定[M]. 北京: 科学出版社, 1990.

[7] 茆诗松, 王玲玲. 可靠性统计[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1984.

[8] 茆诗松, 王玲玲. 加速寿命试验[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

(编辑: 王居信)