

航空发动机小偏差状态变量模型的建立方法^{*}

冯正平¹, 孙健国²

(1. 上海交通大学 船舶与海洋工程学院, 上海 200030;

2. 南京航空航天大学 动力工程系, 江苏 南京 210016)

摘 要: 采用最小二乘拟合法建立用于航空发动机鲁棒控制系统设计的小偏差状态变量模型, 即根据发动机非线性模型的小偏差动态响应数据直接拟合出其小偏差状态变量模型。由于建模误差在最小二乘意义下最小, 因而应用该方法可以保证所建模型具有较高精度。此外该方法亦不受模型阶次的限制。应用该方法建立某型涡扇发动机的小偏差状态变量模型, 具有较高的精度, 从而验证了该方法的有效性。

关键词: 航空发动机; 控制系统; 状态变量模型; 最小二乘法

中图分类号: V233.7

文献标识码: A

文章编号: 1001-4055 (2001) 01-0054-04

Modeling of small perturbation state variable model for aeroengines

FENG Zheng-ping¹; SUN Jian-guo²

(1. Coll. of Naval Architecture and Ocean Engineering, Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai 200030, China;

2. Dept. of Power Engineering, Nanjing Univ. of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Modeling of small perturbation State Variable Model (SVM) for the design of aeroengines' multivariable robust control system was studied. The small perturbation SVM of an aeroengine was derived directly by fitting its nonlinear simulation data under small perturbation about the steady operating point. The SVM established by this approach has high accuracy since the modeling error is minimized under the meaning of least square. Moreover the approach is not limited by the plant order. The application of the approach to establishing the small perturbation SVM for a turbofan engine shows its effectiveness.

Key words: Aircraft engine; Control system; State variable model; Least square method

1 引 言

在航空发动机多变量控制方法中, 较为完善和成熟的仍是线性控制方法。由于航空发动机本质上是一个非线性对象, 其线性化状态变量模型只能是在发动机的某个平衡工作点附近通过线性化近似得到, 此即发动机小偏差状态变量模型。可见建模误差是不可避免的, 虽然采用鲁棒控制方法可以使控制系统在模型存在一定误差的条件下仍具有稳定鲁棒性及性能鲁棒性, 但鲁棒性要求对模型误差的限定相当苛刻, 因此建立一个精确的小偏差状态变量模型对航空发动机控制系统设计而言是十分必要的。

目前求取系统矩阵 $ABCD$ (连续形式) 的方法主要是偏导数法^[1], 其机理是: (1) 对某状态变量作小扰动, 而强制控制变量及其它状态变量不变, 分别计算状态变量变化率及输出变量对该状态变量的偏导数, 得 A, C 矩阵中对应的元素。(2) 对某控制变量作小扰动, 而强制状态变量及其它控制变量不变, 分别计算状态变量变化率及输出变量对该控制变量的偏导数, 得 B, D 矩阵中对应的元素。显然这种方法只具有理论上的意义, 因为对任何状态变量或控制变量作小扰动均会引起其它状态变量的变化。因而, 偏导数法的建模误差较大。

文献[2]提出用最小二乘拟合方法来求取系统矩

^{*} 收稿日期: 2000-06-08; 修订日期: 2000-07-24。基金项目: 航空科学基金资助项目 (96C52029)。

作者简介: 冯正平 (1966—), 男, 博士后, 研究领域为航空发动机控制、潜水器操纵与控制。

阵,其机理是首先建立小偏差状态变量模型的线性动态响应与其系统矩阵各元素之间的解析关系式,然后根据发动机非线性模型在各采样时刻的小扰动动态响应数据来拟合出系统矩阵各元素,使建模误差在最小二乘意义下最小,从而大大提高了建模精度。但由于要建立的解析关系式较为繁琐,不适用于高阶对象的建模。

本文针对文献[2]中的方法进行了改进,即根据发动机非线性模型在各采样时刻的小偏差动态响应数据,应用最小二乘法直接拟合出其离散型的系统矩阵,可不受模型阶次限制,且同样具有较高建模精度。需要指出的是,若要得到连续形式的系统矩阵,只需按一定采样周期进行转换即可。

2 最小二乘拟合建模方法

设航空发动机的离散化数学模型为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^m$, $\mathbf{y} \in R^p$ 分别为状态向量、控制向量和输出向量,下标 $k, k+1$ 表示对应采样时刻。

设平衡工作点为 (x_0, u_0, y_0) , 在该平衡工作点处线性化式(1)得离散型小偏差状态变量模型

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{E} \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{F} \Delta \mathbf{u}_k \\ \Delta \mathbf{y}_k &= \mathbf{G} \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0, \Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_0, \Delta \mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_0$$

$\mathbf{E} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{F} \in R^{n \times m}$, $\mathbf{G} \in R^{p \times n}$, $\mathbf{H} \in R^{p \times m}$ 为待定的系统矩阵。

为了提高建模精度,对式(2)的输入及输出变量作归一化处理,即令

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_k &= \mathbf{S}_u \delta \mathbf{u}_k \\ \Delta \mathbf{y}_k &= \mathbf{S}_y \delta \mathbf{y}_k \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_u &= \text{diag}(u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0m}) \\ \mathbf{S}_y &= \text{diag}(y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0p}) \end{aligned} \quad (4)$$

$u_{0i} (i = 1, 2, \dots, m)$ 为平衡工作点处的控制变量, $y_{0i} (i = 1, 2, \dots, p)$ 为平衡工作点处的输出变量, $\text{diag}(\ast)$ 表示对角矩阵,且以括号内的变量为对角元素。由式(2),式(3)得

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_{k+1} &= \overline{\mathbf{E}} \Delta \mathbf{x}_k + \overline{\mathbf{F}} \delta \mathbf{u}_k \\ \delta \mathbf{y}_k &= \overline{\mathbf{G}} \Delta \mathbf{x}_k + \overline{\mathbf{H}} \delta \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\overline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}, \overline{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \mathbf{S}_u, \overline{\mathbf{G}} = \mathbf{S}_y^{-1} \mathbf{G}, \overline{\mathbf{H}} = \mathbf{S}_y^{-1} \mathbf{H} \mathbf{S}_u \quad (6)$$

从 $k = 1$ 起对发动机的各控制变量分别作小阶跃扰动而保持其它控制变量不变,即在式(3)中取

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0 + \mathbf{S}_u \delta \mathbf{u}^i \quad (7)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, m$ (下同)。

由式(3)及式(7)得

$$\delta \mathbf{u}_k = \delta \mathbf{u}_i \quad (8)$$

其中

$$\delta \mathbf{u}^i = [0 \dots 0 \underset{i-1}{\underset{\overbrace{1}}{\epsilon}} 0 \dots 0]^\top \quad (9)$$

ϵ 为第 i 个控制变量的扰动幅度,通常 $|\epsilon| < 5\%$ 。

在式(7)所示控制变量作用下,发动机将经历 m 个不同的过渡过程,由于发动机本质上是非线性的,这些过渡过程是非线性的,设其动态响应数据分别为 $\mathbf{y}_k^1, \mathbf{y}_k^2, \dots, \mathbf{y}_k^m$, 根据式(3)得

$$\delta \mathbf{y}_k^i = \mathbf{S}_y^{-1} (\mathbf{y}_k^i - \mathbf{y}_0) \quad (10)$$

不难得出,在如式(8)所示控制量作用下,小偏差状态变量模型式(5)的线性动态响应 $\delta \mathbf{y}_k^i$ 满足

$$\delta \mathbf{y}_k^i = \overline{\mathbf{H}} \delta \mathbf{u}^i \quad (11)$$

$$\delta \mathbf{y}_1^i = [\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{I} + \overline{\mathbf{E}} + \dots + \overline{\mathbf{E}}^{k-2})\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{H}}] \delta \mathbf{u}^i (k > 1) \quad (12)$$

设发动机在平衡点 (x_0, u_0, y_0) 的邻域内稳定,则 $\overline{\mathbf{E}}$ 的特征根严格位于单位圆内,故 $(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{E}})$ 可逆,于是式(12)可化为

$$\delta \mathbf{y}_k^i = [\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{E}}^{k-1})(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{E}})^{-1}\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{H}}] \delta \mathbf{u}^i \quad (13)$$

由于 $\delta \mathbf{y}_k^i$ 及 $\delta \mathbf{y}_1^i$ 分别为发动机及其对应小偏差状态模型在第 i 个控制变量作相同小扰动下的动态响应,所以两者应一致,且两者接近程度反映了建模误差大小。据此再由式(11)及式(13)可得

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{H}} \delta \mathbf{u}^i &= \delta \mathbf{y}_1^i \\ [\overline{\mathbf{G}}(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{E}}^{k-1})(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{E}})^{-1}\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{H}}] \delta \mathbf{u}^i &= \delta \mathbf{y}_k^i \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)左边为待定动态系数矩阵,而右边为测得的非线性动态响应数据,因而建模问题转化为用系统矩阵来拟合非线性动态响应数据。

而在式(14)中,每对应一个采样时刻,有 mp 个方程,因而若选取全部非线性动态响应数据来拟合,则式(14)对应的方程数目将是巨大的,这不仅增加了计算的复杂程度,也无必要。文献[2]指出:只需选取少数特征数据即可,设选取 L 个特征采样点,即 $k = k_1, k_2, \dots, k_L$ (其中 $k_1 = 1$), 则式(14)变为

$$\begin{aligned} \bar{H} \delta u^i &= \delta y_1^i \\ [\bar{G}(\mathbf{I} - \bar{E}^{k-1})(\mathbf{I} - \bar{E})^{-1}\bar{F} + \bar{H}] \delta u^i &= \delta y_{k_2}^i \quad (15) \\ [\bar{G}(\mathbf{I} - \bar{E}^{k_L-1})(\mathbf{I} - \bar{E})^{-1}\bar{F} + \bar{H}] \delta u^i &= \delta y_{k_L}^i \end{aligned}$$

式(15)对应于 Lmp 个方程。通过迭代的方法可以求出系统矩阵 $\bar{E} \bar{F} \bar{G} \bar{H}$ 的最小二乘数值解(可借助于 Matlab 语言中的 Optimization Toolbox), 由式(11), 式(12)及式(14)知, 此解使如下指标极小。

$$J = \sum_{k=1}^{k_L} \sum_{i=1}^m [\delta y_k^i - \delta y_{f_k}^i]^T [\delta y_k^i - \delta y_{f_k}^i] \quad (16)$$

显然 J 极小意味着建模误差在最小二乘意义下极小。

在求出 $\bar{E} \bar{F} \bar{G} \bar{H}$ 之后, 再由式(6)可得

$$\bar{E} = \bar{E}, \bar{F} = \bar{F} S_u^{-1}, \bar{G} = S_y \bar{G}, \bar{H} = S_y \bar{H} S_u^{-1} \quad (17)$$

3 算 例

以某型涡扇发动机为例, 取状态变量 $x = [N_1, N_2]^T$, 控制变量 $u = [W_f, A_8]^T$, 输出变量 $y = [N_1, N_2, p_{36}]^T$, 其中 N_1, N_2, p_{36} 分别为风扇转速、压气机转速、压气机与风扇涡轮两者出口压力之比, W_f, A_8 分别为主供油量及尾喷口面积。应用本文方法分别建立包线内不同点处的小偏差状态变量模型, 限于篇幅, 这里给出包线内两点处的计算结果。

(1) 高度为 0 km、马赫数为 0。取平衡工作点为

$$x_0 = [8\ 777.27\ \text{r/min}, 14\ 532.57\ \text{r/min}]^T,$$

$$u_0 = [5\ 000\ \text{kg/h}, 3\ 000\ \text{cm}^2]^T,$$

$$y_0 = [8\ 777.27\ \text{r/min}, 14\ 532.57\ \text{r/min}, 10.491]^T$$

在该点处分别作主供油量及尾喷口面积的小扰动, 扰动幅度为 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1\%$ 。以 20 ms 为采样周期, 采集发动机非线性动态响应, 如图 1(a), (b) 中细线所示。

取 8 组特征数据: $k = 1, 6, 16, 31, 51, 81, 91, 100$, 可以求得系统矩阵如下

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 9.1373715 \times 10^{-1} & 3.5777391 \times 10^{-2} \\ -1.9188322 \times 10^{-2} & 9.5041942 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \\ F &= \begin{bmatrix} 2.2093264 \times 10^{-2} & 3.4591816 \times 10^{-2} \\ 3.6064909 \times 10^{-2} & 4.6363270 \times 10^{-2} \end{bmatrix}, \\ G &= \begin{bmatrix} 1.0000000 & 0.0000000 \\ 0.0000000 & 1.0000000 \\ -1.2029824 \times 10^{-3} & 1.7278150 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \\ H &= \begin{bmatrix} 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0.0000000 & 0.0000000 \\ 1.3879884 \times 10^{-4} & 2.2546398 \times 10^{-3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

为检验建模精度, 对所建小偏差状态变量模型分别作主供油量及尾喷口面积的小扰动, 扰动幅度亦为 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1\%$, 其线性动态响应如图 1(a), (b) 中的粗线所示。容易看出所建模型具有满意的精度。

(2) 高度为 10 km, 马赫数为 1.5。取平衡工作点为

$$x_0 = [8\ 341.16\ \text{r/min}, 14\ 633.46\ \text{r/min}]^T,$$

$$u_0 = [3\ 500\ \text{kg/h}, 3\ 500\ \text{cm}^2]^T,$$

$$y_0 = [8\ 341.16\ \text{r/min}, 14\ 633.46\ \text{r/min}, 10.964]^T.$$

在该点处分别作主供油量及尾喷口面积的小扰动, 扰动幅度为 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1\%$ 。以 20 ms 为采样周期, 采集发动机非线性动态响应, 如图 2(a), (b) 中细线所示。

取 8 组特征数据: $k = 1, 6, 16, 31, 51, 81, 91, 100$, 可以求得系统矩阵如下:

$$E = \begin{bmatrix} 9.1540239 \times 10^{-1} & 2.261290 \times 10^{-2} \\ -3.8010483 \times 10^{-3} & 9.4562981 \times 10^{-1} \end{bmatrix},$$

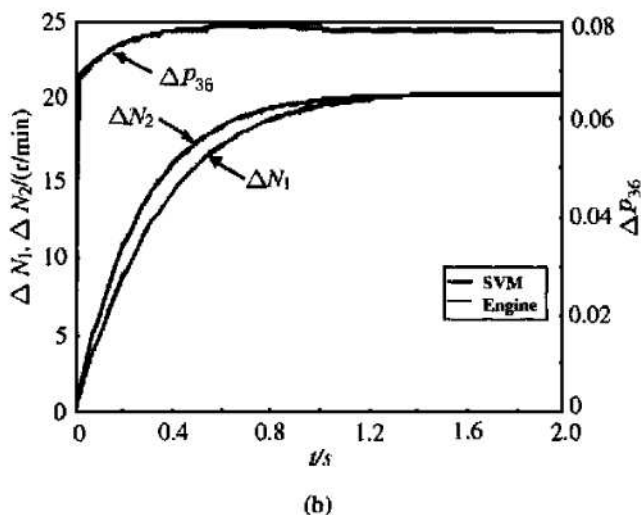
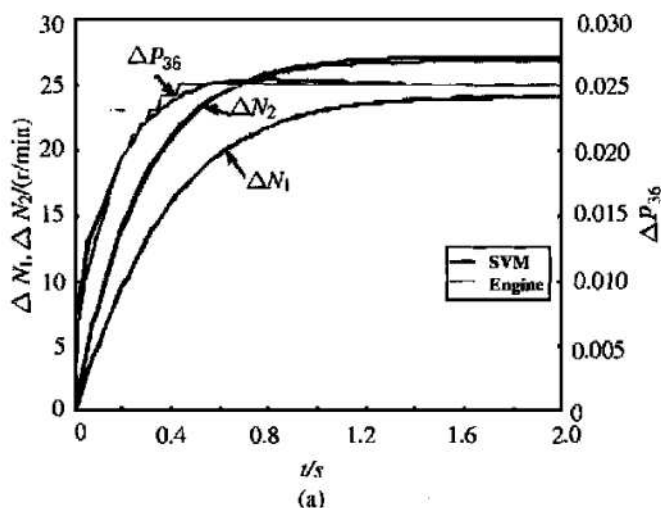


Fig. 1 Comparison of step response between nonlinear model and its small perturbation SVM at $h = 0, Ma = 0$

(a) Step response of main fuel flow

(b) Step response of nozzle area

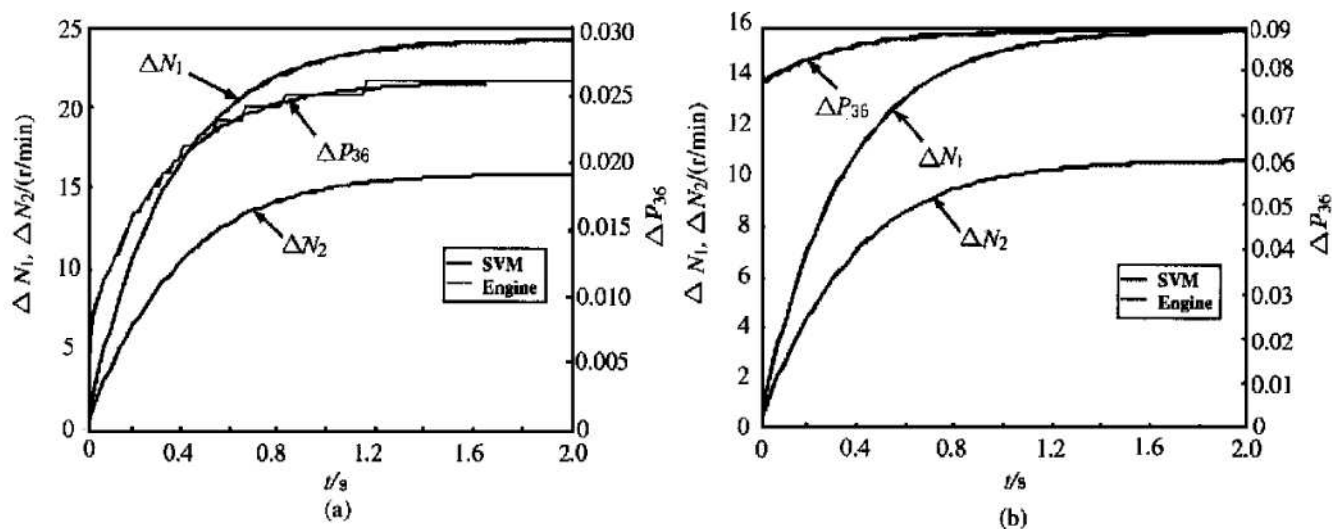


Fig. 2 Comparison of step response between nonlinear model and its small perturbation SVM at $h = 10\text{km}$, $Ma = 1.5$

(a) Step response of main fuel flow

(b) Step response of nozzle area

$$F = \begin{bmatrix} 2.2890097 \times 10^{-2} & 1.5433114 \times 10^{-2} \\ 3.9558974 \times 10^{-2} & 2.5809431 \times 10^{-2} \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1.0000000 & 0.0000000 \\ 0.0000000 & 1.0000000 \\ -4.7949398 \times 10^{-4} & 1.0956164 \times 10^{-3} \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0.0000000 & 0.0000000 \\ 2.0085768 \times 10^{-4} & 2.1953998 \times 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

为检验建模精度,对所建小偏差状态变量模型分别作主供油量及尾喷口面积的小扰动,扰动幅度亦为 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1\%$,其线性动态响应如图 2(a), (b) 中的粗线所示。容易看出所建模型具有满意的精度。

由图 1 和图 2 中发动机非线性模型与小偏差状态变量模型的动态响应比较,可以验证本文方法的有效性。

4 结 论

本文应用最小二乘法建立航空发动机小偏差状

态模型,使建模误差在最小二乘意义下最小。所建模型可用于航空发动机控制系统设计。与文献中方法相比,本文方法更加简单直接。

需要指出的是,由于施加的小扰动为阶跃型,故本文方法只能保证所建模型在低频段的精度,至于高频建模误差,可通过控制器的鲁棒性加以克服。

参考文献:

- [1] Sugiyama N. Derivation of ABCD system matrices from nonlinear dynamic simulation of jet engines[R]. AIAA 92-3319.
- [2] 冯正平,孙建国,黄金泉,等. 一种建立航空发动机状态变量模型的新方法[J]. 航空动力学报, 1998, 13(4).
- [3] 冯正平. 航空发动机多变量鲁棒控制[D]. 南京: 南京航空航天大学, 1999.
- [4] 樊思齐,徐芸华. 航空推进系统控制[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1995.

(编辑: 盛汉泉)