

非线性转子-轴承系统 Hopf 分叉点的计算^{*}

张新江, 夏松波, 武新华, 韩万金

(哈尔滨工业大学 能源科学与工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 针对非线性转子-轴承系统的具体特点, 引入扩展方程方法, 对采用长轴承模型的刚性 Jeffcott 转子系统增加约束方程, 消除系统分叉的奇异性, 使系统的 Hopf 分叉点在定解条件下得以准确求解。同时, 为验证该方法, 在相同条件下对该系统进行数值仿真研究。结果表明, 扩展方程方法可以快速准确地确定转子-轴承系统的 Hopf 分叉点, 分析结果为定性控制转子的稳定运行状态提供了理论依据。

关键词: 转子; 轴承; 非线性系统; 系统稳定性; 扩展方程; 数值计算

中图分类号: TH133.3

文献标识码: A

文章编号: 1001-4055(2000)04-0057-03

Calculating Hopf bifurcation point of a nonlinear rotor-bearing system

ZHANG Xin-jiang, XIA Song-bo, WU Xin-hua, HAN Wan-jin

(School of Energy Science and Engineering, Harbin Inst. of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Considering the characteristics of a nonlinear rotor-bearing system, the extended equation method was presented. In order to obtain the system Hopf bifurcation point under conditions of determined solution accurately, the constrained equations to the rigid Jeffcott rotor system based on the long-bearing model was added and the singularity of system bifurcation was eliminated. At the same time, the system was tested by means of numerical simulation. The result shows that this method can determine the Hopf bifurcation point of a nonlinear rotor-bearing system effectively. And the theoretical foundation of qualitative control for the stable operating state of rotors is provided.

Key words: Rotor; Bearing; Nonlinear system; System stability; Extended equation; Numerical calculation

1 引言

转子-轴承系统是各类叶轮机机械的常见结构, 对于该类系统的描述, 稍微准确一些的方程都是非线性的^[1], 人们对非线性转子-轴承系统进行了大量的研究, 文献 [2] 用打靶法和连续算法, 对经模态降维的转子-轴承系统求解了周期解; 文献 [3] 用伪不动点追踪法对该类系统多重周期解进行了计算。由于系统中非线性油膜力的存在, 使转子-轴承系统的稳定性在 Hopf 分叉点附近会产生突变, 即系统在超过 Hopf 分叉点后将由稳定的周期运动转变为概周期或混沌运动, 诱发转子-轴承系统失稳, 使系统产生疲劳损伤, 给系统带来巨大危害。因此, 准确计算转子-轴承系统的 Hopf 分叉点对于该类系统稳定

运行的控制具有重要意义, 而系统在 Hopf 分叉点处方程的奇异性使问题难以求解。本文在非线性 Jeffcott 转子模型基础上, 利用扩展方程^[4]具有的直接处理高维问题和其结果可直接用于计算机上的数值计算等优点, 将求解一般非线性分叉问题的扩展方程方法用于转子-轴承系统的 Hopf 分叉计算, 使该类系统的 Hopf 分叉点得以准确求解。

2 非线性 Jeffcott 转子模型

非线性 Jeffcott 转子-轴承系统在直角坐标系中的力学模型如图 1 所示, 图中 G 为外载荷, O 为轴瓦几何中心, O_1 为转子几何中心, O_c 为转子质心, f_x, f_y 为无量纲非线性油膜力分量, ω 为转子角速度。在自治系统假设条件下, 系统的运动方程为

^{*} 收稿日期: 1999-08-18; 修订日期: 2000-03-07。基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19990510)

作者简介: 张新江 (1967—), 男, 博士生, 研究方向为转子动力学。

$$\begin{cases} dx_1/d\tau = x_3 \\ dx_2/d\tau = x_4 \\ dx_3/d\tau = f_x \\ dx_4/d\tau = f_y + G \end{cases} \quad (1)$$

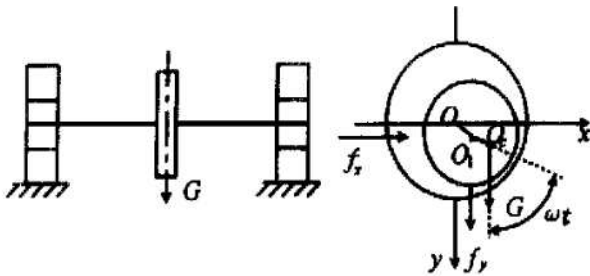


Fig. 1 Scheme of Jeffcott rotor-bearing system

其中, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}^T = \{x, y, dx/d\tau, dy/d\tau\}^T$ 为轴心的无量纲位置和速度变量, τ 为无量纲时间。

3 扩展方程方法

扩展方程的方法是通过引入新的方程来扩展原来的非线性方程, 从而消除分叉问题的奇异性。其基本思想是: 根据 Hopf 分叉的发生条件, 对系统方程适当增加约束方程, 从而形成系统动力学特性随某一参数变化而发生 Hopf 分叉的定解条件。对于非线性方程 $u_t = f(u, \lambda), f: U \times R \rightarrow V$ 确定 Hopf 分叉点的扩展方程为

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(u, \lambda) \\ f_u(u, \lambda) \alpha + \varepsilon \beta \\ l_0 \alpha - 1 \\ f_u(u, \lambda) \beta - \varepsilon \alpha \\ l_0 \beta \end{pmatrix} = 0, F: X_1 \rightarrow Y_1$$

$$x = (u, \alpha, \beta, \lambda, \varepsilon), x_0 = (u_0, \alpha_0, \lambda_0, \alpha_1, \varepsilon),$$

$$X_1 = U^2 \times R^2, Y_1 = V^2 \times R^2 \quad (2)$$

这里, U 和 V 是两个 Banach 空间, R 为实数域, 假定 $U \subset V$, f 是光滑的非线性算子, f_u 为 Jacobi 矩阵, u 是状态变量, λ 是控制参数, ε 为参变量。 $l_0 \subset V'$ 是以 α, β 为变量并满足 $l_0 \alpha - 1 = 0$ 及 $l_0 \beta = 0$ 的某一线性泛函。可以证明 (u_0, λ_0) 是 Hopf 分叉点, 且仅当存在 $0 \neq \varepsilon_0 \in R$, $a = a_R + a_I \in U \cdot iU$ 及 $l_0 \subset V'$ 使 x_0 为 (2) 式的正则解, V' 为 V 的对偶空间。

4 算例

采用长轴承模型, 用湍流摩擦系数对 Reynolds 方程进行修正, 得到非线性油膜力在直角坐标系下的公式^[5,6]

$$f_x = \frac{1}{m}(k - 2\Psi) \left[\frac{-2s}{(1-s^2)(2+s^2)}x + \frac{\pi}{2(1-s^2)^{1/2}(2+s^2)}y \right] - \frac{s^2}{(1-s^2)(2+s^2)} \left[\frac{(1+2s^2)\pi}{s(1-s^2)^{1/2}} - \frac{16(1-s^2)}{\pi s} \right] x - 4y;$$

$$f_y = -\frac{1}{m}(k - 2\Psi) \left[\frac{2s}{(1-s^2)(2+s^2)}y + \frac{\pi}{2(1-s^2)^{1/2}(2+s^2)}x \right] - \frac{s^2}{(1-s^2)(2+s^2)} \left[\frac{(1+2s^2)\pi}{s(1-s^2)^{1/2}} - \frac{16(1-s^2)}{\pi s} \right] y + 4x;$$

其中 $\Psi = \cos^{-1}(\frac{y}{s})$; $s = \sqrt{x^2 + y^2}$, m_R 为转子质量, $m = \frac{m_R}{2} \cdot \frac{c\omega^2}{k^2\sigma}$; k 为正整数, 同步或超谐波解时, $k=1$, c 为轴承半径间隙, $\sigma = \frac{R_1 L^3 k_z \eta \omega}{72 k c^2}$ 为无量纲化油膜力因子, R_1 为轴颈半径, L 为轴瓦宽度, η 为润滑油粘度, $k_z = 12 + 0.8 Re^r$; Re 为 Reynolds 数; β, r 为常数。取 $m_R = 8500(\text{kg})$; $R_1 = 150.1(\text{mm})$; $c = 0.699(\text{mm})$; $L = 300.2(\text{mm})$; $\eta = 17.8 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$; 外载荷 $G = m_R g/2$ 为转子半重, ω 为第 14 个未知数。将油膜力公式及各已知数值代入转子运动方程后, 用 (2) 式得到 14 维非线性方程组, 用牛顿迭代法进行计算; 所得 Hopf 分叉点处各参数变量的值由表 1 给出。

为验证所计算的结果, 本文在相同条件下进行了计算机仿真, 仿真采用龙格-库塔法, 由于非线性 Jeffcott 转子模型为二维自治系统, 在 Hopf 分叉点处其轴心轨迹为一孤立的闭轨道, 即极限环。仿真采用表 1 所列数据作为初值, 其结果证实了在 Hopf 分叉点处存在极限环, 如图 2 所示。图 3 为运动方程在 x 方向的时间波形, 说明龙格-库塔法已迭代收敛。

Table 1 Parameters of the Hopf bifurcation point

ω	ε	x	$x>$	y	$y>$
		0.6048	0.0000	0.5577	0.0000
842.0001	420.9943	α_1	α_2	α_3	α_4
		0.0000	0.9943	0.0002	0.0000
		β_1	β_2	β_3	β_4
		0.0000	0.0000	0.0013	-0.1104

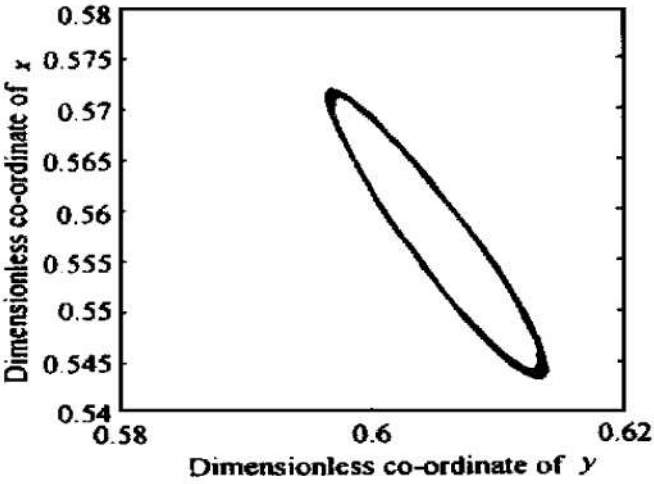


Fig. 2 Shaft center orbit

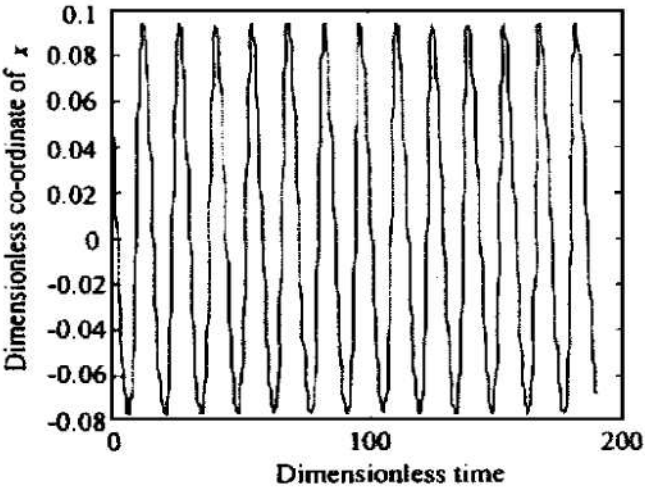


Fig. 3 Response of x

5 结 论

(1) Hopf 分叉点准确计算, 对于定性分析转子-轴承系统的稳定性具有重要意义。本文应用扩展方程方法对该类系统进行分叉计算, 并仿真加以验证, 结果表明该方法可实现其准确计算。

(2) 由于非线性转子轴承系统方程的复杂性, 在应用扩展方程方法时, 求 Jacobi 矩阵的解析表达式耗费的工作量很大。

参 考 文 献

[1] Chen Chieh-Li, Yua Her-Terng. Chaos in the imbalance response of a flexible rotor supported by oil film bearing with non-linear suspension [J]. Nonlinear Dynamics, 1998, 16: 71~ 90.

[2] Sundararajan P, Noah S T. An algorithm for response and stability of large order non-linear systems: application to rotor systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 214 (4): 695~ 723.

[3] 刘 恒, 虞 烈, 谢友柏. 非线性动力系统多重周期解的伪不动点追踪法 [J]. 力学学报, 1999, 31 (2): 222~ 229.

[4] 吴 微著. 解非线性问题的扩展方程方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1993.

[5] 钟一谔. 转子动力学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.

[6] 温诗铸. 摩擦学原理 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.

(责任编辑: 龚士杰)