

涡轮泵转子的临界转速研究 (V) 临界转速的有限元法^{*}

张小龙, 何洪庆

(西北工业大学 航天工程学院, 陕西 西安 710072)

摘 要: 通过对轴段和盘的受力分析得出轴段和盘单元的运动方程, 把支承和密封对轴的作用力按节点力处理, 再由单元运动方程综合出转子系统的运动方程。求解临界转速归结为实数特征值的计算, 并以计算实例验证了有限元法的正确性、有效性和准确性。

关键词: 液体推进剂火箭发动机; 涡轮泵; 涡轮转子; 转子速度; 有限元法

中图分类号: V434.21 文献标识码: A 文章编号: 1001-4055(2000)03-0040-03

Critical rotational speed of turpump rotors (V) finite element method for critical rotation speed calculation

ZHANG Xiao-long, HE Hong-qing

(Coll. of Astronautics, Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an 710072, China)

Abstract: The computation of critical rotation speed is one of the important issues in the design for turbo pump rotor bearing system. The moving equations for shaft and rigid disk were given by way of analyzing the force acted on them. The force acted on shaft by the bearing and sealing components was treated as nodal force. Then, the moving equations for rotor systems were obtained. The solution for real eigenvalue problem gave out the critical rotation speed. The computational examples demonstrated the correctness, validity and high precision of the current method.

Key words: Liquid propellant rocket engine; Turbine pump; Turbine rotor; Rotor speed; Finite element method⁺

1 引 言

转子的振动分析,除了极少数简单情况用解析法以外,对于实际转子大多采用传递矩阵法^[1~3]或有限元法^[4,5]等。有限元法是以变分原理和剖分插值为基础求解偏微分方程问题的一类数值方法。虽然有限元法繁、编程复杂,但是计算精度高,可以避免传递矩阵法计算中可能出现的数值不稳定现象,便于应用于复杂的次同步进动计算中。

2 涡轮泵转子的有限元模型

把涡轮泵转子看成是由刚性圆盘和分布质量弹性轴构成,而滚动轴承及轴承座则以其等效刚性和阻尼(加有阻尼器,如金属丝网阻尼器等)的组合形式

来表示其对转子的作用力(节点力或力矩),该等效刚性和阻尼的具体值由支承系统的动力学分析得出。至于涡轮、泵轮及密封等处的流体对转子的作用力也可以类似支承系统来处理,如 Alford 定义的涡轮级“空气动力干扰”力模型^[6], Childs 和 Black 的密封数学模型^[7,8]等都是以假想的刚度和阻尼等表示其作用。刚度和阻尼的具体计算这里不讨论。

2.1 转子单元运动方程式

取单元没有产生横向位移时的中心线和 Z 轴一致,第 i 个节点(单元间的节点和转子端点)的线位移、角位移为 u_i , φ (X 轴正向线位移和绕 Y 轴的角位移)和 v_i , θ (Y 轴正向线位移和绕 X 轴的角位移)。

2.1.1 弹性轴段运动方程式

^{*} 收稿日期: 1999-04-18; 修订日期: 1999-09-01。

作者简介: 张小龙(1963—),男,博士生,研究领域为转子系统动力学及其数值计算,机械转动等。

设无分布外载荷的等截面弹性轴段长为 l , 密度为 ρ , 截面积为 A , 有效剪切面积为 A_s , 截面二次轴矩 I , 二次极矩为 J , 弹性模量为 E , 剪切模量为 G , 转速为 Ω 两端节点 1、2 的力及力矩 (来自相邻轴段或来自外部) 为 V_x, T_y (XOZ 平面) 和 V_y, T_x (YOZ 平面), 如图 1 所示。位移和力矢量为

$$\{\xi\} = (u_1, \varphi_1, u_2, \varphi_2)^T, \quad \{\eta\} = (v_1, \theta_1, v_2, \theta_2)^T$$

$$\{f_\xi\} = (V_{x1}, T_{y1}, V_{x2}, T_{y2})^T,$$

$$\{f_\eta\} = (V_{y1}, T_{x1}, V_{y2}, T_{x2})^T$$

则该弹性轴段的方程式为^[4, 5]

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{bmatrix} \quad (1)$$

这里 m, g, k 分别为质量矩阵、陀螺矩阵和刚度矩阵。

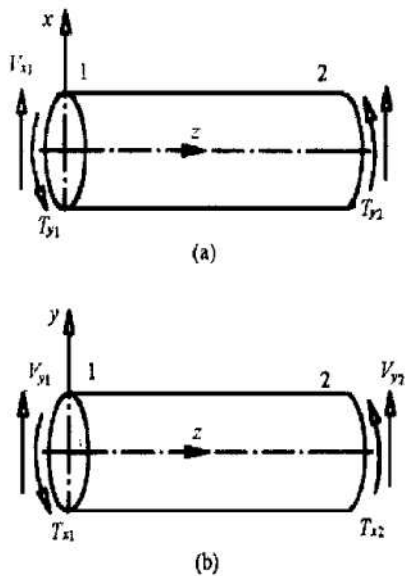


Fig. 1 Elastic shaft with equal cross-section

2.1.2 盘运动方程式^[5]

设盘的质量为 m , 直径转动惯量为 I_D , 极转动惯量为 J_D , 位移为 $u_D, \varphi_D, v_D, \theta_D$, 作用于盘左右两侧的力为 $V_{xD}^L, V_{xD}^R, V_{yD}^L, V_{yD}^R$ (沿坐标轴正向), 两侧的力矩矢量为 $T_{xD}^L, T_{xD}^R, T_{yD}^L, T_{yD}^R$, 如图 2 所示。记

$$\{\xi_D\} = (u_D, \varphi_D)^T, \quad \{\eta_D\} = (v_D, \theta_D)^T$$

$$\{f_{\xi D}\} = (V_{xD}^L + V_{xD}^R + T_{yD}^L + T_{yD}^R)^T$$

$$\{f_{\eta D}\} = (V_{yD}^L + V_{yD}^R + T_{xD}^L + T_{xD}^R)^T$$

则盘的运动方程^[5]为

$$\begin{bmatrix} m_D & 0 \\ 0 & m_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_D \\ \ddot{\eta}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & g_D \\ -g_D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_D \\ \dot{\eta}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\xi D} \\ f_{\eta D} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$[m_D] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_D \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[g_D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega J_D \end{bmatrix} \quad (4)$$

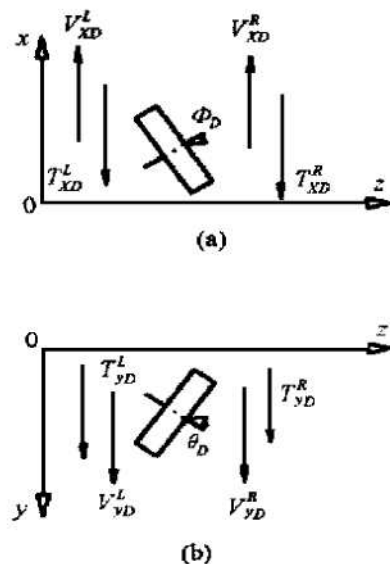


Fig. 2 Rigid disk

盘位于转子的某一节点处, 盘的位移就是该节点处转子的位移。

2.1.3 支承的作用力

支承力 (矩) 和支承特性及节点位移有关, 且对转子系统而言是真正的外力。设支承作用力和力矩的一般表达式为

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ T_y \\ T_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{uu} & K_{uv} \\ K_{vu} & -K_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_{uu} & C_{uv} \\ C_{vu} & -C_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_y \\ T_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{uu} & B_{uv} \\ B_{vu} & -B_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -D_{uu} & D_{uv} \\ D_{vu} & -D_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中 V_x, V_y 为 x, y 方向作用力; K 为刚度系数; C 为阻尼系数; T_y, T_x 分别为绕 y 轴和绕 x 轴的力矩; B 为回转刚性系数; D 为回转阻尼系数。

2.2 转子支承系统运动方程^[5, 9]

根据转子系统的结构划分出许多单元, 先由上节内容算出各轴段单元的系数矩阵, 以各轴段单元的局部坐标系 (左端 1 为原点, 见图 1) 计算的结果。由轴段单元系数矩阵可以看出, 它依赖于单元的长度, 不依赖于坐标原点, 所以这样做是可以的。然后, 将所有节点 (包括转子两端的端点) 统一从左到右编号, 设共有 n 个节点, 位移向量包含全体节点的位移, 即

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1, \varphi_1, u_2, \varphi_2, \dots, u_i, \varphi_i, \dots, u_n, \varphi_n)^T \\ (v_1, \theta_1, v_2, \theta_2, \dots, v_i, \theta_i, \dots, v_n, \theta_n)^T \end{bmatrix} \quad (6)$$

把每一个轴段单元系数矩阵按其两端节点在全体节点编号顺序排列中的位置及式 (6) 扩充成 $2n \times 2n$ 阶矩阵后, 所有单元同类系数矩阵相加。根据各盘处节点号在式 (6) 中的位置, 将盘的系数矩阵 (3) 和式

(4) 也扩充到 $2n \times 2n$ 阶后, 再同类系数矩阵相加。组装时, 对于转子而言, 各单元间的相互作用力成为内力, 相互抵消, 仅存转子系统的真正外力。支承的作用力式 (5) 就是转子真正的外力, 应根据各支承处的节点号将支承的作用力加到系统方程右边的外力项上, 综合出转子支承系统方程

$$\begin{bmatrix} M_{xx} & 0 \\ 0 & M_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式中 $\{F_x\}, \{F_y\}$ 是外力矢量; M_{xx}, M_{yy} 是由轴单元的质量矩阵和盘的质量矩阵 (3) 总装而成, $C_{xx}, C_{xy}, C_{yx}, C_{yy}$ 是由支承作用力式 (5) 中的阻尼和回转阻尼系数矩阵总装成, G 是由轴单元和盘的陀螺力矩阵和式 (4) 总装成, $K_{xx}, K_{xy}, K_{yx}, K_{yy}$ 是由轴单元的刚度矩阵和式 (5) 中支承的刚性和回转刚性系数矩阵总装成, 均为 $2n \times 2n$ 阶矩阵。

3 临界转速算例及分析

当支承看成无阻尼, 刚性沿圆周均匀、无耦合时, 方程 (7) 中的子矩阵 $C_{xx} = C_{xy} = C_{yx} = C_{yy} = K_{xy} = K_{yx} = 0$, 同时不考虑方程右边和转子运动无关外力项 F_x, F_y , 则变成齐次方程, 可用求特征值或行列式值加一维搜索的方法计算出临界转速。如果转子某支承是刚性支承, 刚度值趋于无穷大, 而支承模型式 (5) 中的刚度是以某一值给出的, 数值计算中可取相对比轴刚度大很多值作为该支承的刚度值, 用此办法可求得有刚性支承转子系统的临界转速。

算例 1: 对图 3 所示的涡轮泵转子用分布质量轴的传递矩阵法^[3]和有限元法进行临界转速对比计算, 材料和转子参数见文献 [3] 中例 3。计算结果如表 1 所示, n 为有限元法的元素数, r 为轴单元长度与其直径之比的范围。由表 1 可见, 用本文有限元法的计算结果与成熟的传递矩阵法的计算结果基本一致, 表明本文算法的推导和编程正确; 有限元法中, 随单元数的增加, 单元的长度减小, 计算值逐渐降低并收敛于临界转速值, 且低阶收敛速度快, 高阶收敛速度慢, 单元数少时收敛速度快, 单元数多时收敛速度慢, 具体的收敛过程随单元的取法不同而不同; 有限元法是转子系统分析的一种行之有效的方法, 精度较高。

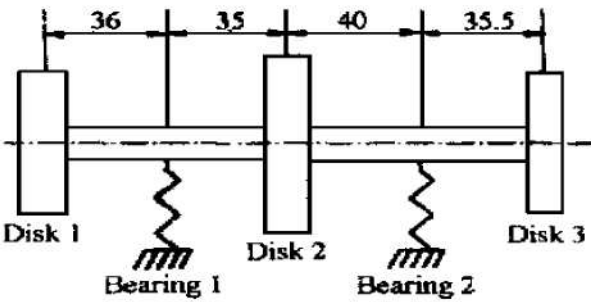


Fig. 3 Three-disk rotor system with elastic bearings

Table. 1 Critical speeds (rad/s) of the rotor on Fig. 3

Step	Transfor-	$n=4$ $r=$	$n=8$ $r=$	$n=16$ $r=$
No.	mation matrix	1.96~2.24	0.98~1.12	0.49~0.56
1	1 758.4	1 758.2	1 758.1	1 758.1
2	5 139.4	5 136.3	5 135.9	5 135.8
3	7 749.3	7 741.6	7 741.1	7 741.0

算例 2: 把经过考核的方法和程序, 用于实际计算, 支承考虑弹性, 具体参数和尺寸略。有限元法计算的前四阶临界转速结果分别为 3 258 rad/s、7 015 rad/s、13 954 rad/s 和 18 130 rad/s。

参 考 文 献

[1] 何洪庆, 沈达宽, 张哲文. 涡轮泵转子的临界转速研究 (I): 均匀支承转子临界转速的传递矩阵法 [J]. 推进技术, 1998, 19 (6).

[2] 何洪庆, 张小龙, 沈达宽, 等. 涡轮泵转子的临界转速研究 (II): 非均匀支承转子临界转速的传递矩阵法 [J]. 推进技术, 1999, 20 (1).

[3] 张小龙, 何洪庆. 涡轮泵转子的临界转速研究 (IV) 分布质量轴的传递矩阵法 [J]. 推进技术, 2000, 21 (2).

[4] 川崎正夫, 森井茂树ほか. 有限要素法による回転軸系振動解析 [J]. 三菱重工技報, 1983, 20 (4).

[5] 佐藤勇一. 回転軸系の振動解析入門 (1) ~ (7) [J]. 機械の研究, 1995, 47 (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9).

[6] Alford J S. Protecting turbomachinery form self-excited rotor whirl [J]. Journal of Engineering for Power, 1965.

[7] 金光阳一. 回転軸系の振動解析 [J]. 一・機械, 1994, 22 (12).

[8] 太田博. 回転体リ・ホームツの動向と最近の話題 [J]. 機械の研究, 1990, 42 (11).

[9] 钟一谔, 何衍宗, 王正, 等. 转子动力学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.

(责任编辑: 史亚红)