可靠性增长幂律模型的 Bayes 推断及在发动机上的应用*

周源泉[1]，郭建英[2]

(1. 北京强度与环境研究所，北京 100076;
2. 哈尔滨理工大学，黑龙江 哈尔滨 150080)

摘　要：对作同步故障截尾与时间截尾的 K 个独立相同的幂律过程，即可靠性增长幂律模型，在无信息先验分布下给出了过程参数、当前的系统 MTBF（平均故障间隔时间）与故障强度的 Bayes 点估计与区间估计，并将之与经典方法进行了比较，可避免非随机化最优置信下限的保守性和随机化最优置信下限的随机性。最后用两台发动机的数值例说明了这些方法。

主题词：发动机故障；故障安全设计；可靠性增长；可靠性计算

中图分类号：V430　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1001-4055 (2000) 01-0049-05

Bayesian inferance on AMSAA-BISE model and in application to engine

Zhou Yuanquan[1], Guo Jianying[2]

(1. Beijing Inst. of Structure and Environment, Beijing 100076, China;
2. Harbin Univ. of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Taking the noninformative prior distribution the Bayesian point and interval estimations for the parameters current system MTBF and failure intensity of synchronous time and failure truncated of K, independent, identical power law process, i.e. AMSAA-BISE model were presented. The comparison of the Bayesian results and the classical results was given. And these methods were illustrated with reliability calculation of two engines.

Subject terms: Engine failure; Fail safety design; Reliability growth; Reliability calculation

1　引　言

复杂可修系统在累积试验时间区间 $[0,\ t]$ 内的故障次数 $N(t)$ 服从幂律过程，是迄今为止应用最广的可靠性增长模型：

$$P\{N(t)=n\}=\frac{(at^b)^n}{n!}e^{-at^b},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

式中 $a>0$ 为尺度参数，$b>0$ 为形状参数，即增长参数，其均值函数 $EN(t)=at^b$ 与强度函数 $\lambda(t)=\mathrm{d}EN(t)/\mathrm{d}t=abt^{b-1}$，并称 $M(t)=[\lambda(t)]^{-1}=t^{1-b}/(ab)$ 为当前的瞬时 MTBF（平均故障间隔时间）。

Duane 对研制中的五种可修系统（包括航空发动机、喷气发动机、液压装置）的故障数据作分析，发现 $N(t)/t$ 对 t 在双对数坐标中近似呈线性关系，这就是著名的 Duane 公式。显然，其均值函数为 $EN(t)=at^b$，但他未考虑 $N(t)$ 的变异性。

Bassin 发现柴油机、重型起重机的故障服从幂律过程之后，Crow[1] 提出了对 Duane 模型的改进，被称为 AMSAA（Army Materiel System Analysis Activity）模型。BISE（Beijing Institute of Stracture and Environment）的周源泉和翁朝曦[2] 对服从幂律过程的多个独立的同型可修系统的同步故障与时间截尾的情况，对参数与当前的系统 MTBF 等进行了经典分析，被称为 AMSAA-BISE 模型。

关于幂律过程的 Bayes 分析工作尚不多，Higgins 等[3] 对故障强度作了近似的准 Bayes 推断，Bassin[4] 对最优大修间隔进行了 Bayes 分析，Guida 等[5] 在故障截尾下讨论了参数的 Bayes 点估计。田国

* **收稿日期**：1998-09-23；**修订日期**：1999-04-28。**基金项目**：国家自然科学基金资助项目 (69774034)。
作者简介：周源泉 (1937-)，男，研究员，研究领域：可靠性评定与可靠性增长及加速试验。电话：010-68356248。

梁[6] 本想对幂律过程作全面的 Bayes 分析, 但对时间截尾误用了故障截尾时的无信息先验分布; 对故障截尾, 未能给出当前的系统 MTBF 的 Bayes 分析; 而且该文所用方法冗长。本文对时间截尾运用 Box-Tiao 技术求无信息先验分布对故障截尾运用位置尺度族的无信息先验分布, 分析中用枢轴量与条件均值方法非常简洁地全面给出了过程参数与当前的系统 MTBF 等的 Bayes 点估计与区间估计。

2 (*a*, *b*) 的无信息先验 pdf 与后验 pdf

2.1 故障截尾的情况

由式 (1) 可知, 幂律过程的首次故障时间 T_1 服从 Weibull 分布, 其累积分布函数 cdf 为 $F_{T_1}(t) = 1-e^{-at^b}$, 与 Weibull 分布之 cdf 的另一种标准形式 $F_{T_1}(t) = 1-e^{-(t/\eta)^m}$ 相比较可得 $a = \eta^{-m}, b = m$. $X = \ln T_1$ 服从 极值分布, 其 cdf 为

$$F_X(x) = 1-\exp[-\exp(\frac{x-\mu}{\sigma})]$$

式中 $x = \ln t,\quad \mu = \ln\eta,\quad \sigma = m^{-1}$.

综上可得 $a = e^{-\mu/\sigma},\quad b = \sigma^{-1}$.

事实上, 极值分布属位置尺度族, 其无信息先验概率密度函数 pdf 为[7]: $\Pi_0(\mu,\sigma) = \sigma^{-1}$. 变换上式的 Jacobian 为

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial\mu} & \frac{\partial a}{\partial\sigma} \\ \frac{\partial b}{\partial\mu} & \frac{\partial b}{\partial\sigma} \end{vmatrix} = ab^3$$

故 (*a*, *b*) 的无信息先验 pdf 为

$$\Pi_1(a,b) = \Pi_0(\mu,\sigma)\ J^{-1} = a^{-1}b^{-2} \tag{2}$$

对 K 台独立的服从幂律过程的同型可修系统, 作同步投试同步故障截尾, 第 i 台的观测故障次数为 n_i, 第 i 台的故障时间为 $t_{i1} \leqslant t_{i2} \leqslant \cdots \leqslant t_{in_i}, (i = \overline{1,K})$.

记截尾时间为 t_n, 总故障次数为 $n = \sum_{i=1}^{K} n_i$。由文献 [8] 知, 该试验的似然函数为[8]

$$f_1(t_{ij}; i = \overline{1,K}, j = \overline{1,n_i}) = (Kab)^n e^{-Kat_n^b}\prod_{i=1}^{K}\prod_{j=1}^{n_i} t_{ij}^{b-1}$$

由 Bayes 公式可得该试验后 (*a*, *b*) 的后验 pdf

$$f_2(a,b\mid \text{data}) \propto \Pi_1(a,b)f_1(t_{ij}i = \overline{1,K'}, j = \overline{1,n_i'}) \propto a^{n-1}b^{n-2}e^{-Kat_n^b}\prod_{i=1}^{K}\prod_{j=1}^{n_i} t_{ij}^{b}$$

作为 pdf 可方便地求出 $f_2(a, b\mid \text{data})$ 的规范化系数, 从而得

$$f_2(a,b\mid \text{data}) = \frac{(Kt_n^b)^n}{\Gamma(n)}a^{n-1}e^{-Kat_n^b}\,\frac{w_1^{n-1}}{\Gamma(n-1)}b^{n-2}e^{-bw_1} \tag{3}$$

式中 $w_1 = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\frac{t_n}{t_{ij}}$

2.2 时间截尾的情况

记同步时间截尾的终止时间为 $T, N_i(t)$ 是第 i 台系统在 $(0,t)$ 内的故障次数, $N(t) = \sum_{i=1}^{K} N_i(t)$, 第 i 台的第 j 次故障时间为 $t_{ij}, i = \overline{1,K}, j = \overline{1,N_i(T)}$. 对应的序贯样本 $(N_i(s), 0 \leqslant S \leqslant T, i = \overline{1,K}\ )$ 的似然函数为[8]

$$L = (Kab)^{N(T)}e^{-KaT^b}\prod_{i=1}^{K}\prod_{j=1}^{N_i(T)} t_{ij}^{b-1}$$

则对数似然函数为

$$\ln L \propto N(T)(\ln a + \ln b) - KaT^b + (b-1)\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{N_i(T)}\ln t_{ij}$$

故

$$E\left|-\frac{\partial^2\ln L}{\partial a^2}\right| = KT^b/a$$

$$E\left|-\frac{\partial^2\ln L}{\partial b^2}\right| = \frac{KaT^b}{b^2} + KaT^b(\ln T)^2$$

$$E\left|-\frac{\partial^2\ln L}{\partial a\partial b}\right| = KT^b\ln T$$

则 Fisher 信息阵 I (*a*, *b*) 的行列式为

$$\det[I(a,b)] = \begin{vmatrix} KT^b/a & KT^b\ln T \\ KT^b\ln T & KaT^b/b^2 + KaT^b(\ln T)^2 \end{vmatrix} = (Kb^{-1}T^b)^2 \tag{4}$$

由 Box-Tiao 技术[9] 可知, (*a*, *b*) 的无信息先验 pdf 为

$$\Pi_2(a,b) \propto \{\det[I(a,b)]\}^{\frac{1}{2}} = b^{-1}T^b \tag{5}$$

在给定 $N_i(T) = n_i, i = \overline{1,K}$ (记 $n = \sum_{i=1}^{K} n_i$) 时, 同步时间截尾试验的似然函数为[8]

$$f_3(t_{ij}, i = \overline{1,K}, j = \overline{1,n_i};\ N_i(T) = n_i, i = \overline{1,K}) = (Kab)^n e^{-KaT^b}\prod_{i=1}^{K}\prod_{j=1}^{n_i} t_{ij}^{b-1}$$

由 Bayes 公式可求出 (a, b) 的后验 pdf 为

$$f_4(a,b\mid \text{data}) = \frac{(KT^b)^{n+1}}{\Gamma(n+1)}a^n e^{-KaT^b}\quad\frac{w_2^n}{\Gamma(n)}b^{n-1}e^{-bw_2} \tag{6}$$

式中

$$w_2 = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\frac{T}{t_{ij}} \tag{7}$$

3　基本定理

3.1　故障截尾的情况

定理 1: b 的边缘后验 pdf 为 $b\sim\Gamma(n-1,w_1)$，给定 b 时，a 的条件后验 pdf 为 $a\mid b\sim\Gamma(n,Kt_n^b)$。枢轴量 $Z_1=bw_1\sim\Gamma(n-1,1)$ 与统计量 $S_1=Kat_n^b\sim\Gamma(n,1)$ 相互独立。

证: 由式 (3) 知，b 的边缘后验 pdf 为: $\frac{w_1^{n-1}}{\Gamma(n-1)}b^{n-1}e^{-bw_1}$，故 $b\sim\Gamma(n-1,w_1)$，据此知给定 b 时 a 的条件后验 pdf 为 $\frac{(Kt_n^b)^n}{\Gamma(n)}a^{n-1}e^{-Kat_n^b}$，即 $a\mid b\sim\Gamma(n,Kt_n^b)$。作变换　$Z_1=bw_1$，　$S_1=Kat_n^b$。变换的 Jawbian 为

$$J_1=\begin{vmatrix}\frac{\partial Z_1}{\partial a} & \frac{\partial Z_1}{\partial b}\\ \frac{\partial S_1}{\partial a} & \frac{\partial S_1}{\partial b}\end{vmatrix}=-Kt_n^b\quad w_1$$

由式 (3) 得 (Z_1,S_1) 的联合 pdf 为:

$$g_1(Z_1,S_1)=$$
$$f_2[a(Z_1,S_1),b(Z_1,S_1)\mid\text{data}]\quad|J_1|^{-1}=$$
$$\frac{S_1^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-S_1}\quad\frac{Z_1^{n-2}}{\Gamma(n-1)}e^{-Z_1}$$

故　$Z_1=bw_1\sim\Gamma(n-1,1)$ 与 $S_1'=Kat_n^b\sim\Gamma(n,1)$ 相互独立。　Q.E.D.

3.2　时间截尾的情况

定理 2　b 的边缘后验 pdf 为 $b\sim\Gamma(n,w_2)$，给定 b 时，a 的条件后验 $p\,df$ 为 $a\mid b\sim\Gamma(n+1,KT^b)$. 枢轴量 $Z_2=bW_2\sim\Gamma(n,1)$ 与统计量 $S_2=KaT^b\sim\Gamma(n+1,1)$ 相互独立。

证: 由式(6) 可知: $b\sim\Gamma(m,W_2)$ 与 $a\mid b\sim\Gamma(n+1,KT^b)$。

作变换　$Z_2=bW_2$，　$S_2=KaT^b$。变换的 Jacobian 为

$$J_2=\begin{vmatrix}\frac{\partial Z_2}{\partial a} & \frac{\partial Z_2}{\partial b}\\ \frac{\partial S_2}{\partial a} & \frac{\partial S_2}{\partial b}\end{vmatrix}=-KT^bw_2$$

故 (Z_2,S_2) 的联合 pdf 为:

$$g_2(Z_2,S_2)=$$
$$f_4[a(Z_2,S_2),b(Z_2,S_2)\mid\text{data}]\;|J_2|^{-1}=$$
$$\frac{S_2^n}{\Gamma(n+1)}e^{-S_2}\quad\frac{S_2^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-Z_2}$$

故　$Z_2=bW_2\sim\Gamma(n,1)$ 与 $S_2=KaT^b\sim\Gamma(n+1,1)$ 相互独立。　Q.E.D.

4　参数 a 与 b 的 Bayes 点估计与区间估计

4.1　故障截尾的情况

由 $b\sim\Gamma(n-1,W_1)$ 及 $2bW_1\sim\chi^2_{2(n-1)}$，可得 b 的 Bayes 估计即其后验均值:

$$\bar{b}_B=E\quad b=(n-1)/W_1,\qquad(8)$$

而经典的无偏估计为

$$\bar{b}_B=(n-2)/W_1<\bar{b}_B$$

b 的置信水平为 γ 的 Bayes 概率区间为

$$[b_{LB},b_{uB}]=$$
$$[\frac{1}{2W_1}\chi^2_{2(n-1),(1-\gamma)/2},\frac{1}{2W_1}\chi^2_{2(n-1),(1+\gamma)/2}]\qquad(9)$$

恰与经典的置信区间相同。a 的 Bayes 估计为

$$\bar{a}_B=Ea=E_bE_{a\mid b}(a)=E_b[m/(Kt_n^b)]=$$
$$n/[K(1+\frac{\bar{b}_B}{n-1}\ln t_n)^{n-1}]\qquad(10)$$

显然，$\lim_{n\to\infty}\bar{a}_B=n/(Kt_n^{\bar{b}_B})$。而 a 的经典点估计为 $\bar{a}_c=n/(Kt_n^{\bar{b}_c})$。$a$ 的置信水平为 γ 的概率区间 $[a_{LB},\ a_{uB}]$ 可用下法求征:

$$\frac{1+\gamma}{2}=\int_{a_{LB}}^{\infty}\int_0^{\infty}f_2(a,b\mid\text{data})\,db\,da=$$
$$\int_0^{\infty}\Gamma(b\mid n-1,W_1)\int_{a_{LB}}^{\infty}\Gamma(a\mid b\;n,Kt_n^b)\,da\,db=$$
$$\int_0^{\infty}\Gamma(b\mid n-1,W_1)[1-I_{Ka_{LB}t_n^b}(n)]\;\underline{\underline{x=bW_1}}$$
$$\int_0^{\infty}\frac{x^{n-2}}{\Gamma(n-1)}e^{-x}[1-I_{Ka_{LB}t_n^{x/W_1}}(n)]\,dx=$$
$$\int_0^{\infty}\frac{x^{n-2}}{\Gamma(n-1)}e^{-x}[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(Ka_{LB}t_n^{x/W_1})^i}{i!}e^{-Ka_{LB}t_n^{x/W_1}}]\,dx$$

同理有

$$(1-\gamma)/2=$$
$$\int_0^{\infty}\frac{x^{n-2}}{\Gamma(n-1)}e^{-x}[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(Ka_{uB}t_n^{x/W_1})^i}{i!}e^{-Ka_{uB}t_n^{x/W_1}}]\,dx$$

显然，a_{LB}, a_{uB} 需迭代求解。由于 a 的区间估计在工程上应用价值不大，所以对其计算方法就不赘述了。

4.2　时间截尾的情况

因 $b\sim\Gamma(n,W_2)$ 及 $2bW_2\sim\chi^2_{2n}$，则 b 的 Bayes 估计为 $\bar{b}_B=n/W_2$，而经典的无偏估计为 $\bar{b}_c=(n-1)/W_2<\bar{b}_B$。置信水平为 γ 时，b 的 Bayes 概率区间 $[b_{LB},\ b_{uB}]$ 为

$$[b_{LB},b_{uB}]=[\frac{1}{2W_2}\chi^2_{2n,(1-\gamma)/2},\frac{1}{2W_2}\chi^2_{2n,(1+\gamma)/2}]\quad(11)$$

恰与 b 的经典的置信区间 $[b_{Lc},\ b_{uc}]$ 相同。

a 的 Bayes 估计为

$$\bar{a}_B=Ea=E_bE_{a\mid b}(a)=$$

$$(n+1)/[K(1+\frac{\bar{b}_B}{n}\ln T)^n] \quad (12)$$

故 $\lim_{n\to\infty}\bar{a}_B=(n+1)/(KT^{\bar{b}_B})$，而 a 的经典点估计为 $\bar{a}_c=n/(KT^{\bar{b}_c})$。用故障截尾时，求 $[a_{LB},a_{uB}]$ 方法，得：

$$\frac{1+\gamma}{2}=\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-x}[\sum_{i=0}^{n}\frac{(a_{LB}KT^{x/W_2})^i}{i!}e^{-a_{LB}KT^{x/W_2}}]dx$$

$$\frac{1-\gamma}{2}=\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-x}[\sum_{i=0}^{n}\frac{(a_{uB}KT^{x/W_2})^i}{i!}e^{-a_{uB}KT^{x/W_2}}]dx$$

5 当前的系统 MTBF 与故障强度的 Bayes 点估计与区间估计

当前的系统 MTBF 与故障强度是工程上最感兴趣的可靠性测度。

5.1 故障截尾的情况

为了给出 $M(t_n),\lambda(t_n)$ 的 Bayes 估计，需要给出 t_n 的条件 pdf，由文献[8]知

$$f_5(t_n\ a,b)=\frac{(Ka)^n b}{\Gamma(n)}t_n^{nb-1}e^{-Kat_n^b} \quad (13)$$

它是参数为 $(n,\ Ka,\ b)$ 的广义 Gamma 分布的 pdf，记为 $G\Gamma(t_n\ (a,b)\ n,Ka,b)$。因 $Kat_n^b\sim\Gamma(n,1)$ 与 a,b,t_n 相互独立，故 $M(t_n)$ 的 Bayes 估计为

$$\bar{M}_B=EM(t_n)=KE(\frac{1}{Kat_n^b})E(t_n/b)=$$

$$\frac{K}{n-1}E_b[b^{-1}E_{a\ b}E_{t_n\ (a,b)}(t_n)]=$$

$$\frac{K}{n-1}E_b[b^{-1}E_{a\ b}\frac{\Gamma(n+b^{-1})}{\Gamma(n)(Ka)^{1/b}}]=$$

$$\frac{Kt_n}{(n-1)\Gamma^2(n)}E_b[b^{-1}\Gamma(n+b^{-1})\Gamma(n-b^{-1})]=$$

$$\frac{Kt_n}{(n-1)\Gamma^2(n)}\int_0^\infty\Gamma(n+b^{-1})\Gamma(n-b^{-1})$$

$$\frac{W_1^{n-1}}{\Gamma(n-1)}b^{n-3}e^{-bW_1}db$$

$\lambda(t)=abt_n^{b-1}$ 的 Bayes 估计为

$$\bar{\lambda}_B=E\lambda(t_n)=\frac{1}{K}E(Kat_n^b)E(b/t_n)=$$

$$\frac{n}{K}E_b[bE_{a\ b}E_{t_n\ (a,b)}(t_n^{-1})]=$$

$$\frac{n}{K}E_b[bE_{a\ b}\frac{(Ka)^{1/b}\Gamma(n-b^{-1})}{\Gamma(n)}]=$$

$$\frac{n}{Kt_n\Gamma^2(n)}\int_0^\infty\Gamma(n+b^{-1})\Gamma(n-b^{-1})$$

$$\frac{W_1^{n-1}}{\Gamma(n-1)}b^{n-1}e^{-bW_1}db$$

置信水平为 γ 时，$M(t_n)$ 的 Bayes 概率区间为 $[M_{LB}(t_n),M_{uB}(t_n)]$。因 $Kt_nW_1/M(t_n)=Z_1S_1$，由定理1及文献[8]可得

$$\frac{1-\gamma}{2}=p\{Z_1S_1\geqslant n(n-2)/\rho_1\}=$$

$$p\{M(t_n)\leqslant\rho_1\frac{Kt_nW_1}{n(n-2)}\}$$

故 $$M_{LB}(t_n)=\rho_1\frac{Kt_nW_1}{n(n-2)}=\rho_1\bar{M}_c, \quad (14)$$

同理 $$M_{uB}(t_n)=\rho_2\bar{M}_c \quad (15)$$

即 $M(t_n)$ 的 Bayes 概率区间恰与经典置信区间相同。

$\lambda(t_n)$ 的置信水平为 γ 的 Bayes 概率区间 $[\lambda_{LB}(t_n),\lambda_{uB}(t_n)]$，因 $(1-\gamma)/2=p\{M(t_n)\geqslant M_{uB}(t_n)\}=p\{\lambda(t_n)\leqslant M_{uB}^{-1}(t_n)\}$，

故 $$\lambda_{LB}=[M_{uB}(t_n)]^{-1} \quad (16)$$

同理 $$\lambda_{uB}(t_n)=[M_{LB}(t_n)]^{-1} \quad (17)$$

也与经典置信区间相同。

5.2 时间截尾的情况

$M(T)=(abT^{b-1})^{-1}$ 的 Bayes 估计为 $\bar{M}_B=EM(T)=KTE(\frac{1}{KaT^b})E(b^{-1})=\frac{KTW_2}{n(n-1)}=\bar{M}_c$，恰与 $M(T)$ 的经典点估计 $\bar{M}_c$ 相同。$\lambda(T)=abT^{b-1}$ 的 Bayes 估计为

$$\bar{\lambda}_B=E\lambda(T)=(KT)^{-1}E(KaT^b)E(b)=$$

$$n(n+1)/(KTW_2) \quad (19)$$

而 $\lambda(T)$ 的经典点估计为 $\bar{\lambda}_c=n(n-1)/KTW_2)<\bar{\lambda}_B$。

$M(T)$ 的置信水平为 γ 的 Bayes 概率区间 $[M_{LB}(T),M_{uB}]$，同样因 $KTW_2/M(T)=Z_2S_2$，由定理2及文献[8]可得

$$\frac{1-\gamma}{2}=p\{Z_2S_2\geqslant(n+1)(n-1)/\rho_1(n+1)\}=$$

$$p\{M(T)\leqslant\rho_1(n+1)\frac{KTW_2}{(n+1)(n-1)}\}$$

故

$$M_{LB}(T)=\rho_1(n+1)\frac{KTW_2}{(n+1)(n-1)}\overset{d}{=}g_1\ \bar{M}_c \quad (20)$$

同理可得 $$M_{uB}(T)=g_i\ \bar{M}_c \quad (21)$$

式中 $g_i=n/(n+1)\rho_i(n+1)\quad(i=1,2)$

而 $[\rho_1(n+1),\rho_2(n+1)]$ 是故障数为 $n+1$ 时故障截尾场合下，当前的系统 MTBF 的区间估计系数。

$M(T)$ 的经典非随机化最优置信区间 $[M_{LC}(T),M_{uC}(T)]=[\Pi_1\bar{M}_C,\Pi_2\bar{M}_C]$，经典的随机化最优置信区间为 $[M'_{LC}(T),M'_{uC}(T)]=[\Pi'_1\bar{M}_C,\Pi'_2\bar{M}_C]$。系数 Π_i,Π'_i,ρ_i 见文献[10]。

比较可知

$$\Pi_1<g_1,\quad g_2<\Pi_2$$

$$\Pi_1' > g_1, \quad \Pi_2 > g_2$$

这表明 $M(T)$ 的 Bayes 区间优于保守的非随机化最优置信区间, 而与精确的随机化最优置信区间的最优性相仿。Π_1', Π_2' 本来是随机的, 但在文献[10] 中列出的 Π_i' 值是令区间[0, 1] 上的均匀分布随机变量为 0.5 而算出的, 故由此算得的[$\Pi_1'\bar{M}_C, \Pi_2'\bar{M}_C$] 是不精确的。

工程上最感兴趣的是 $M(T)$ 的下限, 由于 $\Pi_1' > g_1$ 及上述各种理由, 推荐 Box-Tiao 的无信息先验分布下的 Bayes 下限作为工程评价的依据。因为, 它既避免了非随机化最优置信下限的保守性, 又避免了随机化最优置信下限的随机性。

另外, $\lambda(T)$ 的置信水平为 γ 的 Bayes 概率区间为

$$[\lambda_{LB}(T), \lambda_{uB}(T)] = \left[\frac{1}{g_2\bar{M}_C}, \frac{1}{g_1\bar{M}_C}\right]$$

6 算　例

将两台某型发动机作同步截尾可靠性增长试验, 其截尾时间 $T = 7\ 500$ h, 总故障次数 $n = 30$, 其故障时间依序为 t_i/h: 1, 43, 171, 234, 274, 377, 530, 533, 941, 1074, 1188, 1248, 2298, 2347, 2381, 2456, 2500, 2913, 3022, 3038, 3728, 3873, 4724, 5147, 5179, 5587, 5626, 6824, 6983, 7106, 试分析之。

先计算 Laplace 检验统计量 (见文献 [10]):

$$\mu = \left(\sum_1^n t_i/(nT) - 0.5\right)\sqrt{12n} = -2.5428$$

显著性水平 $\alpha/2 = 0.01$ 时, μ 的临界值为 $\mu_{0.01} = -2.3267 > \mu$, 故以水平 0.01 表明, 该型发动机有极显著的可靠性正增长。

再计算 Cramer-Von Mises 检验统计量:

$$C_M^2 = \frac{1}{12n} + \sum_1^n\left[(t_i/T)^{\bar{b}_c} - \frac{2i-1}{2n}\right]^2 = 0.034$$

显著性水平为 0.10 时, C_M^2 的临界值为 $C^2_{M,0.1} = 0.172 > C_M^2$, 故可用 AMSAA-BISE 模型拟合该型发动机的故障数据。下面对其作 Bayes 与经典估计:

$$\bar{a}_B = 0.138\ 8, \quad \bar{a}_C = 0.107\ 7$$

$$\bar{b}_B = 0.527\ 3, \quad \bar{b}_C = 0.553\ 2$$

当 $\gamma = 0.9$ 时:

$$b_{uB} = b_{uC} = 0.709\ 7,$$

$$\bar{M}_B = \bar{M}_C = 903.75 \text{ h},$$

$$M_{LB}(T) = 630.2 \text{ h},$$

$$M_{LC}(T) = 620.9 \text{ h},$$

$$M'_{LC}(T) = 639.0 \text{ h},$$

可见用 $M_{LB}(T)$ 是很合适的。

若对时间截尾取故障截尾下的无信息先验 pdf[6], 则 $M_{LB}(T) = (n-1)/(n-2) \quad \rho_1\bar{M}_C = 670.6$ h, 显然极其冒进, 是工程上无法采用的。

参　考　文　献

1 Crow L H. Confidence interval procedures for the Weibull process with application to reliability growth [J] . Technometrics, 1982, 24 (1): 67～72.

2 Zhou Yuanquan, Weng Zhaoxi. AMSAA-BISE modle [C] . 3rd Japan-China symp on Statistics, Tokyo, Japcm, Soka univ, 1989: 179～182.

3 Higgins J J & Tsokos C P. A quasi-Bayes estimate of the failure intensity of a reliability-growth model [C] . IEEE trans on Rel, 1981, R-30: 471～475.

4 Bassin W M. A bayesian optimal overhaul interval model for the weibull restoration process case [J] . JASA, 1973, 68: 575～578.

5 Guida M, Calabria R & pulcini G. Bayes Inference for a nonhomogeneous poisson process with power intensity law [C] . IEEE trans on Rel, 1989, R-38: 603～609.

6 田国梁. 多台系统 Weibull 过程的 Bayes 统计推断方法 [J] . 强度与环境, 1993 (1): 1～8.

7 周源泉, 翁朝曦. 可靠性评定 [M] . 北京: 科学出版社, 1990.

8 周源泉, 翁朝曦. 可靠性增长 [M] . 北京: 科学出版社, 1992.

9 Box G E P, Tiao G C. Bayesian inference in statistical analysis [M] . Wiley, 1992.

10 周源泉. 质量可靠性增长与评定方法 [M] . 北京: 北京航空航天大学出版社, 1997.

(责任编辑: 史亚红)