1999年12月 推 进 技 术 Dec. 1999
第20卷 第6期 JOURNAL OF PROPULSION TECHNOLOGY Vol. 20 No. 6

复合推进剂线粘弹本构方程的细观力学分析
(Ⅰ) 球形颗粒增强效应分析*

彭 威 任均国 周建平

(国防科技大学航天技术系，长沙，410073)

摘 要：从基体和微粒本构关系出发，应用Eshelby等效夹杂理论及宏观平均理论的分析方法，确定复合体的本构关系，从细观层次揭示弹性微粒对粘弹基体的增强效应。

主题词：复合推进剂，微观力学，粘弹性力学，本构方程

分类号：V512.3

MICROMECHANICS ANALYSIS ON THE VISCOELASTICS CONSTITUTIVE LAW OF COMPOSITE SOILD PROPELLENT
(Ⅰ) REINFORCEMENT EFFECT OF BALL PARTICULATES

Peng Wei Ren Junguo Zhou Jianping

(Dept. of Aerospace Technology, National Univ. of Defence Technology, Changsha, 410073)

Abstract: According to Eshelby's micromechanics theory, a viscoelastic constitutive relation was obtained for composite soild propellent from constitutive law of the matrix and particle. The results show that the particles have reinforced effects to matrices in microlevel.

Subject terms: Composite propellent, Micromechanics, Viscoelastic mechanics, Constitutive equation

1 引 言

近年来Eshelby[1]理论在含细小颗粒的复合材料中一直得到普遍的应用，但这一理论主要限于复合材料的基体和颗粒都是线弹性情况。

复合固体推进剂，是一种以高分子材料为基体的颗粒增强复合材料，具有明显的粘弹性。大量的实验研究[2~4]表明，其本构关系可以近似地由高聚物基体的非线性粘弹本构方程[2]与一个依赖于颗粒增强特性的常数β之乘积来确定，即：

$$\sigma^{c}(t,\epsilon) = \beta \quad \sigma^{m}(t,\epsilon) = \beta \quad [\sigma^{s}(\epsilon) + \sigma^{visc}(t,\epsilon)] \tag{1}$$

* 收稿日期：1998-11-06，修回日期：1999-03-04，本课题系国家自然科学基金和国家教委优秀青年教师基金资助项目

式中:
$$\sigma^{s}(\epsilon) = \lambda_0(I_1, I_2, I_3) I_1 \boldsymbol{I} + 2G_0(I_1, I_2, I_3)\epsilon$$
$$\sigma^{\rm visc}(t,\epsilon) = \int_{-\infty}^{t} E(t-\tau)\epsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
其中: 上标 c, m, i 分别表示复合材料、基体、颗粒的对应量。$\sigma^{s}(\epsilon)$ 为基体材料的平衡态应力, $\sigma^{\rm visc}(t,\epsilon)$ 为基体材料的粘性应力。I_1, I_2, I_3 分别表示应变的第一, 二, 三阶不变量, $\boldsymbol{I}$ 为单位张量, $\lambda_0(I_1, I_2, I_3)$, $G_0(I_1, I_2, I_3)$ 为应变不变量的割线模量。

本文将从基体和微粒的本构关系出发, 应用 Exhelby 等效夹杂理论, 对球形颗粒给出了式 (1) 线性部分的证明。对于与取向相关的非球形颗粒增强效应分析和计及基体本构非线性的情况, 将另文分析。

2　等效夹杂理论

设在无外力且无表面力约束下, 弹性固体 D 内某子域 Ω 内具有特征应变 ϵ^* (指非弹性应变), 此即某种与外力无关的物理化学作用而产生的均匀应变。子域 Ω 称为夹杂 (Inclusion), 有
$$\epsilon_{ij}^* \neq 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 中}), \quad \epsilon_{ij}^* = 0 \quad (\text{在 } D-\Omega \text{ 中})$$
当子域 Ω 的弹性张量 $\boldsymbol{C}^*$ 与固体 $(D-\Omega)$ 中的弹性张量 $\boldsymbol{C}$ 不同时, 子域 Ω 被称为异质。现考虑弹性模量张量为 $\boldsymbol{C}$ 的无限体, 远场有工作应力 σ^0, 其中含有异质 Ω, 其弹性张量为 $\boldsymbol{C}^*$ $(\boldsymbol{C}^* \neq \boldsymbol{C})$, 由于外力的作用, 异质将在体内引起应力扰动 $\sigma^{\rm d}$ 与应变扰动 $\epsilon^{\rm d}$。ϵ^0 为无异质情况下的应变场, 有
$$\sigma_{ij}^0 = \boldsymbol{C}_{ijkl}\epsilon_{kl}^0$$
固体的本构关系可表示为:
$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^{\rm d} = \boldsymbol{C}_{ijkl}^*(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}^{\rm d}) \quad (\text{在 } \Omega \text{ 中}) \tag{2}$$
$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^{\rm d} = \boldsymbol{C}_{ijkl}(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}^{\rm d}) \quad (\text{在 } D-\Omega \text{ 中}) \tag{3}$$
再考虑上述含异质固体的等效体 D, 其弹性模量张量为 $\boldsymbol{C}$, Ω 内的本构关系为:
$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^{\rm d} = \boldsymbol{C}_{ijkl}(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}^{\rm d} - \epsilon_{kl}^*) \tag{4}$$
其中 $\sigma_{ij}^0 = \boldsymbol{C}_{ijkl}\epsilon_{kl}^0$, $\quad \epsilon_{ij}^{\rm d} = \boldsymbol{S}_{ijkl}\epsilon_{kl}^*$

这里, $\boldsymbol{S}_{ijkl}$ 为相应于夹杂 Ω 的 Eshelby 张量, 它与夹杂的形状以及基体的泊松比相关。比较式(4) 与式(2), 得等效夹杂理论的基本方程:
$$\boldsymbol{C}_{ijkl}^*(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}^d) = \boldsymbol{C}_{ijkl}(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}^d - \epsilon_{kl}^*) \quad (\text{在 } \Omega \text{ 中}) \tag{5}$$
再根据平均理论[5], 复合体的宏观平均量为:
$$\langle \epsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V}\int_V (\epsilon_{ij}^0 + \epsilon_{ij}^*)\,\mathrm{d}V = \epsilon_{ij}^0 + f\epsilon_{ij}^* \tag{6}$$
$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0 \tag{7}$$
式中 f 为颗粒的体积分数。由此可以从基体与颗粒的本构关系确定复合体的本构关系。

3　复合固体推进剂的线粘弹本构关系

假定颗粒为球形各向同性线弹性, 基体为各向同性线粘弹性, 如记上标 m 表示与基体相关的量, i 表示与微粒相关的量, 则有

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\int_0^t \lambda^{m}(t-\tau)\dot{\epsilon}_{kk}(\tau)\,d\tau + 2\int_0^t G^{m}(t-\tau)\dot{\epsilon}_{ij}(\tau)\,d\tau \tag{8}$$

若记 $F(t)$ 的拉普拉斯变换为 $\bar{F}(s)$，有

$$\bar{\sigma}_{ij} = s\bar{\lambda}^{m}\bar{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} + 2s\bar{G}^{m}\bar{\epsilon}_{ij} \tag{9}$$

若假设基体的泊松比为常数,则杨氏模量和切变模量具有相同的时间依赖性。根据弹性和粘弹性的对应性原理，粘弹基体中含夹杂的等效平衡方程经拉普拉斯变换后具有于弹性介质相同的形式，只要将 $\lambda(t)$ 换成 $s\bar{\lambda}$，$G(t)$ 换成 $s\bar{G}$。

$$\lambda^{i}(\bar{\epsilon}^{0}_{kk} + \bar{\epsilon}^{1}_{kk})\delta_{ij} + 2G^{i}(\bar{\epsilon}^{0}_{ij} + \bar{\epsilon}^{1}_{ij}) = 2s\bar{\lambda}^{m}(\bar{\epsilon}^{0}_{kk} + \bar{\epsilon}^{1}_{kk} - \bar{\epsilon}^{*}_{kk})\delta_{ij} + 2s\bar{G}^{m}(\bar{\epsilon}^{0}_{ij} + \bar{\epsilon}^{1}_{ij} - \bar{\epsilon}^{*}_{ij}) \tag{10}$$

其中

$$\bar{\epsilon}^{1}_{ij} = S_{ijkl}\bar{\epsilon}^{*}_{kl}$$

对于球形颗粒夹杂有[6]:

$$S_{1111} = S_{2222} = S_{3333} = \frac{7-5v}{15(1-v)}$$

$$S_{1212} = S_{2323} = S_{3131} = \frac{4-5v}{15(1-v)}$$

$$S_{1122} = S_{2233} = S_{3311} = S_{1133} = S_{2211} = S_{3322} = \frac{5v-1}{15(1-v)}$$

式中，v 表示基体的泊松比。对于复合固体推进剂，其颗粒的模量远高于基体的模量:

$$\lambda^{i} \gg \lambda^{m}(t), \quad G^{i} \gg G^{m}(t)$$

因此可以近似忽略颗粒的变形，由式(10)可得

$$\bar{\epsilon}^{0}_{ij} = -S_{ijkl}\bar{\epsilon}^{*}_{ij} \tag{11}$$

由于球形颗粒的对称性且与取向无关，将式(11)简化得

$$\begin{vmatrix} \bar{\epsilon}^{*}_{11} \\ \bar{\epsilon}^{*}_{22} \\ \bar{\epsilon}^{*}_{33} \\ \bar{\epsilon}^{*}_{12} \\ \bar{\epsilon}^{*}_{23} \\ \bar{\epsilon}^{*}_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & & & \\ A_{12} & A_{11} & A_{12} & & 0 & \\ A_{12} & A_{12} & A_{11} & & & \\ & & & B & & \\ & 0 & & & B & \\ & & & & & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\epsilon}^{0}_{11} \\ \bar{\epsilon}^{0}_{22} \\ \bar{\epsilon}^{0}_{33} \\ \bar{\epsilon}^{0}_{12} \\ \bar{\epsilon}^{0}_{3} \\ \bar{\epsilon}^{0}_{31} \end{vmatrix} \tag{12}$$

通过简单单轴拉伸及剪切分析，可以确定在外力作用下球形颗粒对应的等效夹杂特征应变。

(1) 单轴拉伸

基体本构方程 $$\sigma_{11} = \int_0^t [(1-2v)\lambda^{m}(t-\tau) + 2G^{m}(t-\tau)]\dot{\epsilon}_{11}(\tau)\,d\tau \tag{13}$$

作拉普拉斯变换得 $\bar{\sigma}_{11} = \bar{E}^{m}\bar{\epsilon}_{11}$, $\bar{E}^{m} = (1-2v)\lambda^{m} + 2s\bar{G}^{m}$

在外力 σ^{0}_{11}作用下，基体应变: $\bar{\epsilon}^{0}_{11} = \dfrac{\bar{\sigma}^{0}_{11}}{\bar{E}^{m}}$

$$\bar{\epsilon}^{0}_{22} = \bar{\epsilon}^{0}_{33} = -v\bar{\epsilon}^{0}_{11} \quad \bar{\epsilon}^{0}_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

将球形颗粒看成具有 ϵ^{*}_{ij} 的等效夹杂，由式(11)及式(12)可得

$$\bar{\epsilon}_{11}^{*} = \frac{1}{2vS_{1122} - S_{1111}}\bar{\epsilon}_{11}^{0} \tag{14}$$

由式（6）求得复合体宏观平均应变:

$$< \bar{\epsilon}_{11} > = \left| 1 + \frac{f}{2vS_{1122} - S_{1111}} \right| \bar{\epsilon}_{11}^{0} \tag{15}$$

引入复合体拉普拉斯变换下的模量 $\bar{E}^{C}$:

$$\bar{E}^{c} = \frac{< \bar{\sigma}_{11}^{0} >}{< \bar{\epsilon}_{11} >} = \frac{h}{h - f}\bar{E}^{m}$$

式中 $h = \frac{7 - 3v - 10v^2}{15(1 - v)}$。

通过拉氏逆变换 $< \bar{\sigma}_{11}^{0} > = \bar{E}^{c} < \bar{\epsilon}_{11} >$，得单轴加载下的复合体本构关系:

$$\sigma = \beta \int_0^t [(1 - 2v)\lambda(t - \tau) + 2G(t - \tau)] \epsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{16}$$

其中，$\beta = h/(h - f)$，即 β 与基体所满足的粘弹本构方程之积，可得到复合体的一维本构关系。

（2）简单剪切

在切应力 σ_{12} 的作用下，由式（11）和（12）得

$$\bar{\epsilon}_{12}^{*} = B\bar{\epsilon}_{12}^{0} = -\frac{4 - 5v}{15(1 - v)}\bar{\epsilon}_{12}^{0} \tag{17}$$

根据式（6）及式（17）同理得复合体在简单剪切下的本构方程:

$$\sigma_{12} = \frac{15(1 - v)}{15(1 - v) - (4 - 5v)f}\int_0^t \epsilon_{12}(\tau) G(T - \tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{18}$$

4 结　论

根据颗粒和基体的本构关系，采用 Exhelby 细观力学理论研究了固体推进剂的一维本构关系。在假定忽略基体的本构非线性；球形颗粒模量远大于基体的瞬态模量；基体的泊松比为常数的条件下，得到复合固体推进剂本构关系的两点结论:

（1）颗粒对基体确有增强作用，$\beta > 1$。

（2）固体推进剂线粘弹本构方程可以表示为增强系数 β 与基体线粘弹本构方程的乘积。

参　考　文　献

1　Eshelby J D. Elastic field outside an ellipsoidal inclusion. Proc Roy Soc, 1959: 561

2　Burke M A. Noliner viscoelastic costitutive model for soild propellent. Journal of Propulsion and Power, 1992, 8: 586

3　沈怀荣. 固体推进剂的粘弹性损伤分析及有关理论的探讨:［学位论文］. 长沙: 国防科技大学, 1985.

4　周建平. 化学不稳定的工程材料的粘弹性损伤本构模型:［学位论文］. 长沙: 国防科技大学, 1989.

5　王自强, 段祝平. 塑性细观力学. 北京: 科学出版社, 1995.

6　Mura T. Micromechanics of defects in soild. Martinus Nijohff Publishers, 1987.