

可压流的龙格-库塔时间步进 求解法及其应用*

廖宏图

(上海交通大学动力与能源工程学院, 上海, 200030)

摘 要: 研究了用经典四阶龙格-库塔法计算可压缩流场的可行性, 并将其用到了电弧喷射推力器内部等离子体流场的数值求解中。应用情况表明, 在结合了局域时间步长、隐式残值光滑加速收敛措施后, 本格式能够成功地计算比较复杂的可压缩气体流场以及等离子体流场。有关计算结果揭示了气体流经电弧喷射推力器通道但无电流时形成的纯气动流场以及有电流通过时形成的等离子体流场的丰富的结构和一些重要的影响因素, 为研究其过程机制提供了依据。

主题词: 电弧喷射发动机, 磁流体动力流, 流动分布, 可压缩流, 数值计算

分类号: V439.2

COMPUTATION OF COMPRESSIBLE FLOW USING RUNGE-KUTTA TIME STEPPING SCHEME

Liao Hongtu

(Inst. of Power and Energy, Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai, 200030)

Abstract: A time stepping scheme using four-order classical Runge-Kutta method was used on internal plasma flow simulation for arcjet thruster after its validation for compressible flow calculation was studied. It showed that this scheme can be applied successfully on complex compressible gas flow calculation and plasma flow calculation when combining with several acceleration techniques such as local time step and implicit residual smoothing. The gas flows without electric flow and the plasma flow with electric flow throughout arcjet thruster channel were calculated and plenty of flow structures and several important affecting factors of these flowfields were revealed.

Subject terms: Arc jet engine, Magnetohydrodynamic flow, Flow distribution, Compressible flow, Numerical calculation

1 引 言

龙格-库塔法在求解动力系统的时间历程等领域有着广泛的应用。进入80年代以来,以龙格-库塔数值积分方法为基本迭代格式的时间步进法为计算流体力学注入了新的活力,并越来越显示其独特的优势,尤其是结合了各种加速收敛措施后。龙格-库塔法计算稳定性好,格式简单,便于计算机实现,在求解跨声速、超声速以及非线性耦合强烈的物理过程等方面优势更为明显。本文研究以经典四阶龙格-库塔法为基本迭代格式的时间步进法对于求解可压缩气动流场的有效性,并将其用到了电弧喷射内部等离子体流场的数值求解中。

* 收稿日期: 1998-10-31, 修回日期: 1999-01-18

2 控制偏微分方程组及其空间离散

单组份连续介质可压缩气动力学系统的变化规律由如下 Navier-Stokes 方程反映:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho)}{\partial(t)} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial(t)} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{I}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}) \\ \frac{\partial(\rho \epsilon^*)}{\partial(t)} + \nabla \cdot (\rho h^* \mathbf{V}) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}) \end{cases} \quad (1)$$

将方程沿曲线坐标 (ξ, η, ζ) 等步长离散, 步长分别为 $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$ (一般取为 1)。取如下离散格式^[1]:

$$\begin{aligned} \frac{d(q_{ijk})}{d(t)} = & - \frac{A_{i+1,jk} - A_{i-1,jk}}{2\Delta\xi} - \frac{B_{ij,k+1} - B_{ij,k-1}}{2\Delta\eta} - \frac{C_{ijk+1} - C_{ijk-1}}{2\Delta\zeta} + \\ & \frac{E_{i+\frac{1}{2},jk} - E_{i-\frac{1}{2},jk}}{\Delta\xi} + \frac{F_{ij+\frac{1}{2},k} - F_{ij-\frac{1}{2},k}}{\Delta\eta} + \frac{G_{ijk+\frac{1}{2}} - G_{ijk-\frac{1}{2}}}{\Delta\zeta} + D_{ijk} \end{aligned} \quad (2)$$

网格是非交错的, 对流项与扩散项均采用了中心差分格式, 对流项存于整数结点而扩散项存于 $\frac{1}{2}$ 结点。由于采用了中心差分格式, 求解过程中会出现数值波动, 因此在以上方程的右端添加了人工耗散项 D_{ijk} 。采用如下源于 Jameson 的标量耗散模型^[2,3]:

$$D_{ijk} = (D_\xi + D_\eta + D_\zeta)_{ijk} \quad (D_\xi)_{ijk} = d_{i+\frac{1}{2},jk} - d_{i-\frac{1}{2},jk}$$

$$d_{i+\frac{1}{2},jk} = \left[\epsilon_{i+\frac{1}{2},jk}^{(2)} \Delta_\xi (J \cdot \mathbf{q})_{ijk} - \epsilon_{i+\frac{1}{2},jk}^{(4)} \Delta_\xi^3 (J \cdot \mathbf{q})_{i-1,jk} \right] / (J \cdot \Delta t_\xi)_{i+\frac{1}{2},jk}$$

$$\epsilon_{i+\frac{1}{2},jk}^{(2)} = \omega^{(2)} \max(v_{i+1,jk}, v_{ijk}) \quad \epsilon_{i+\frac{1}{2},jk}^{(4)} = \max(0, \omega^{(4)} - \epsilon_{i+\frac{1}{2},jk}^{(2)})$$

$$v_{ijk} = \frac{|p_{i+1,jk} - 2p_{ijk} + p_{i-1,jk}|}{0.5 \cdot (p_{i+1,jk} + 2p_{ijk} + p_{i-1,jk}) + 0.5 \cdot (|p_{i+1,jk} - p_{ijk}| + |p_{ijk} - p_{i-1,jk}|)}$$

式中, Δ_ξ 为向前差分算子; Δt_ξ 为 ξ 方向的临界时间步长, $\omega^{(2)}, \omega^{(4)}$ 为适应系数。这是 ξ 方向的人工粘性项, 其它两个方向类似。

3 龙格-库塔时间步进法

对于单组份连续介质气动力学系统, 仅当所考察空间内所有点的主变量向量 $\mathbf{q}$ 有确定值时, 系统的状态完全确定, 因此系统的基 $\mathbf{X}$ 是无穷维的; 对空间离散气动力学系统, 当且仅当内域及边界结点上的 $\mathbf{q}$ 有确定值时, 系统的状态完全确定, 因此它的基是有限维的, 并且可取为所有结点上的 $\mathbf{q}$ 。如果通过某种方式确定了任意时刻所有边界结点上的 $\mathbf{q}$, 则系统的状态只需由所有内域结点上的 $\mathbf{q}$ 确定, 相应地该系统的基由所有内域结点上的 $\mathbf{q}$ 组成, 即:

$$\mathbf{X} = \{(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho \epsilon^*)_{ijk}\} \quad (i, j, k) \in \text{内域结点}$$

$\mathbf{X}$ 是有限维的, 若取 $(i, j, k) \in \text{内域结点}$, 则式 (3) 确定了 $\mathbf{X}$ 即整个离散气动力学系统的时间变化规律。方程组 (2) 中所有方程的对流项 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 与扩散项 $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ 以及人工粘性项 $\mathbf{D}$ 只与内域及边界上的主变量 $\mathbf{q}$ 有关, 式 (2) 即可写成如下简洁形式:

$$\dot{X} = F(X, t) \quad (3)$$

若边界条件中没有时间 t 的显函数, 则上式右端不显含 t , 成为动力学自治系统。上式是关于 X 对时间的常微分方程组, 可用任何有效的数值积分方法求其动态解, 而该系统的稳态解 (如果存在) 正是当 $t \rightarrow \infty$ 的极限解。本文采用如下经典显示四阶龙格-库塔法积分方程

$$\left. \begin{aligned} X^{n+1} &= X^n + r \quad r = \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= F(X^n, t^n) \quad k_2 = F\left(X^n + \frac{1}{2}hk_1, t^n + \frac{h}{2}\right) \\ k_3 &= F\left(X^n + \frac{1}{2}hk_2, t^n + \frac{h}{2}\right) \quad k_4 = F(X^n + hk_3, t^n + h) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中, n 为时间步数, h 为时间步长。由于采用显格式, 其时间步长将受到限制。这里, 每个结点上的临界时间步长由如下方式确定^[1]:

$$\left. \begin{aligned} (\Delta t_\xi)_{ijk} &= \frac{1}{(|U| + c \sqrt{\xi_x^2 \xi_y^2 \xi_z^2})_{ijk}} & (\Delta t_\eta)_{ijk} &= \frac{1}{(|V| + c \sqrt{\eta_x^2 \eta_y^2 \eta_z^2})_{ijk}} \\ (\Delta t_\zeta)_{ijk} &= \frac{1}{(|W| + c \sqrt{\zeta_x^2 \zeta_y^2 \zeta_z^2})_{ijk}} & U &= u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z \\ V &= u\eta_x + v\eta_y + w\eta_z & W &= u\zeta_x + v\zeta_y + w\zeta_z \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

U, V, W 为三个曲线坐标方向的协变速度, 其中, u, v, w 为速度的三个笛卡尔分量, c 为声速。每个结点的实际步长取为:

$$(\Delta t)_{ijk} = C_N \min(\Delta t_\xi, \Delta t_\eta, \Delta t_\zeta)_{ijk} \quad (6)$$

林中 C_N 是给定的 CFL 数。如果研究动态过程, 则整个迭代过程对所有结点取统一的时间步长: $\Delta t = \min_{i,j,k} (\Delta t_{ijk})$ 。如果只求稳态结果, 则每个结点的时间步长可取不同值, 这样可加速收敛。收敛判据为相对残差 (当前时间步上的残差与第一时间步上残差之比) 小于一个小值。这里残差定义为式 (2) 右端项 (为一矢量) 的模对所有结点的平均值。

4 隐式残值光滑加速收敛^[1,3]

除上述局域时间步长外, 本文还采用了隐式残值光滑加速收敛措施。式 (4) 中, 总增量 r 由如下隐式平均值 $\bar{r}$ 代替:

$$\left. \begin{aligned} r &= (1 - \epsilon_\xi \cdot \delta_\xi^2 - \epsilon_\eta \cdot \delta_\eta^2 - \epsilon_\zeta \cdot \delta_\zeta^2) \bar{r} \\ (\epsilon_\xi)_{ijk} &= \max \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\Delta t}{\lambda \Delta t_\xi} \right)^2 - 1 \right], \epsilon_{\min} \right\}_{ijk} \\ (\epsilon_\eta)_{ijk} &= \max \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\Delta t}{\lambda \Delta t_\eta} \right)^2 - 1 \right], \epsilon_{\min} \right\}_{ijk} \\ (\epsilon_\zeta)_{ijk} &= \max \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\Delta t}{\lambda \Delta t_\zeta} \right)^2 - 1 \right], \epsilon_{\min} \right\}_{ijk} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 $\lambda = 1.25$, $\epsilon_{\min} = 0.2$, $\delta_\xi^2, \delta_\eta^2, \delta_\zeta^2$ 为三个曲线坐标方向的二阶中心差分算子, $\Delta t_\xi, \Delta t_\eta, \Delta t_\zeta$ 为式 (5) 定义三个曲线坐标方向的临界时间步长, Δt 为式 (7) 定义的时间步长。用对称 Gauss-Seidel 迭代加超松弛 (松弛因子取 1.5) 的办法求解以上椭圆形方程。实际计算表明, 只

需 5~6 次迭代即可收敛。应用情况表明,采用以上隐式残值光滑措施后,式(7)中的 C_N 数比不用情况下大 2~3 倍,计算时间缩短约一个量级。

5 算 例

5.1 气体流过电弧喷射推力器流道形成的纯气动流场

本算例计算气体流经如图 1 所示的两种形式的电弧喷射推力器内通道但未被电离时形成的纯气动流场。图中,流道 1 为短喷管并且喉部平直段(称为压缩器)长度与喉部半径之比较流道 2 的小,计算域包含了部分喷管出口以外的区域;流道 2 中,一些尖角处经过了平滑处理而形式一没有。工作气体为氮气。

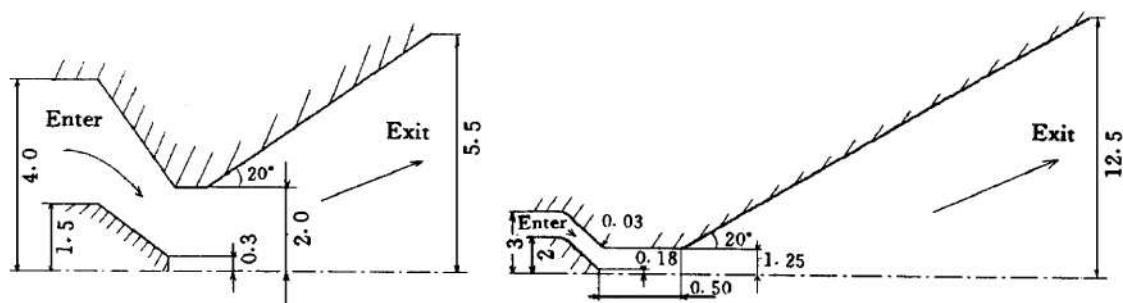


Fig. 1 Profiles of arcjet flow channel for calculation

(a) Channel 1

(b) Channel 2

图 2 绘出了气体流经两种流道时形成的纯气动流场。可以看到,流经流道 1 时出现了丰富的波系:压缩器前端出现了一道膨胀波,紧接着出现了一道压缩波,此两道波经轴线反射到了壁面上,在压缩器出口处出现了一道压缩波,该波经轴线反射并延伸到喷管出口以外的区域,该道压缩波的形成与喷管附面层有关,在喷管出口以后出现了一道激波,该激波属出口压缩波系的一道。此外,从马赫数、速率和温度等图可以明显观察到附面层在喷管壁面上的发展。在流道 2 的喷管流场中,也形成了相对比较弱的压缩波,这些波相交、反射,形成了干涉花样,见马赫数分布图;另外,其附面层的发展历程是明显的。

从 5 个参数图均可以看到,流道 1 由于压缩器长度与喉部半径之比较小,参数在压缩器内及其两端附近的变化均很剧烈,而流道 2 则只在其两端附近剧烈变化。流道 2 中,压力在压缩器内仍然保持一定的下降梯度,这与粘性作用、二维流动效应以及阴极头部的影响有关;压力等值线基本与轴线垂直。

5.2 电弧喷射推力器内部等离子体流场

图 3 绘出了在流道 2 通道的阳极与阴极之间有 40 A 电流通过时形成的等离子体流场的几个参数分布图。轴线附近的气体被离解和电离,形成了等离子体,并被电场加热至高温状态,从温度分布图可以看到由此形成的中心电弧的形状。在压缩器内的压力沿轴线方向的下降梯度比纯气动流场时下降梯度大许多,此即所谓热堵塞效应^[6];气体流经压缩器时被中心电弧所加热,密度下降,因此下游的平均速率必须大于上游才能使具有相同截面积的上下游通过相同的质量流率,一部分压力转换成了动压头。

从速率分布图可见,中心电弧的速率要高于包围它的外层冷气体的速率。原因很显然,中心等离子体温度很高并且由原子、离子和电子等轻粒子组成,密度明显低于外围气体(见密

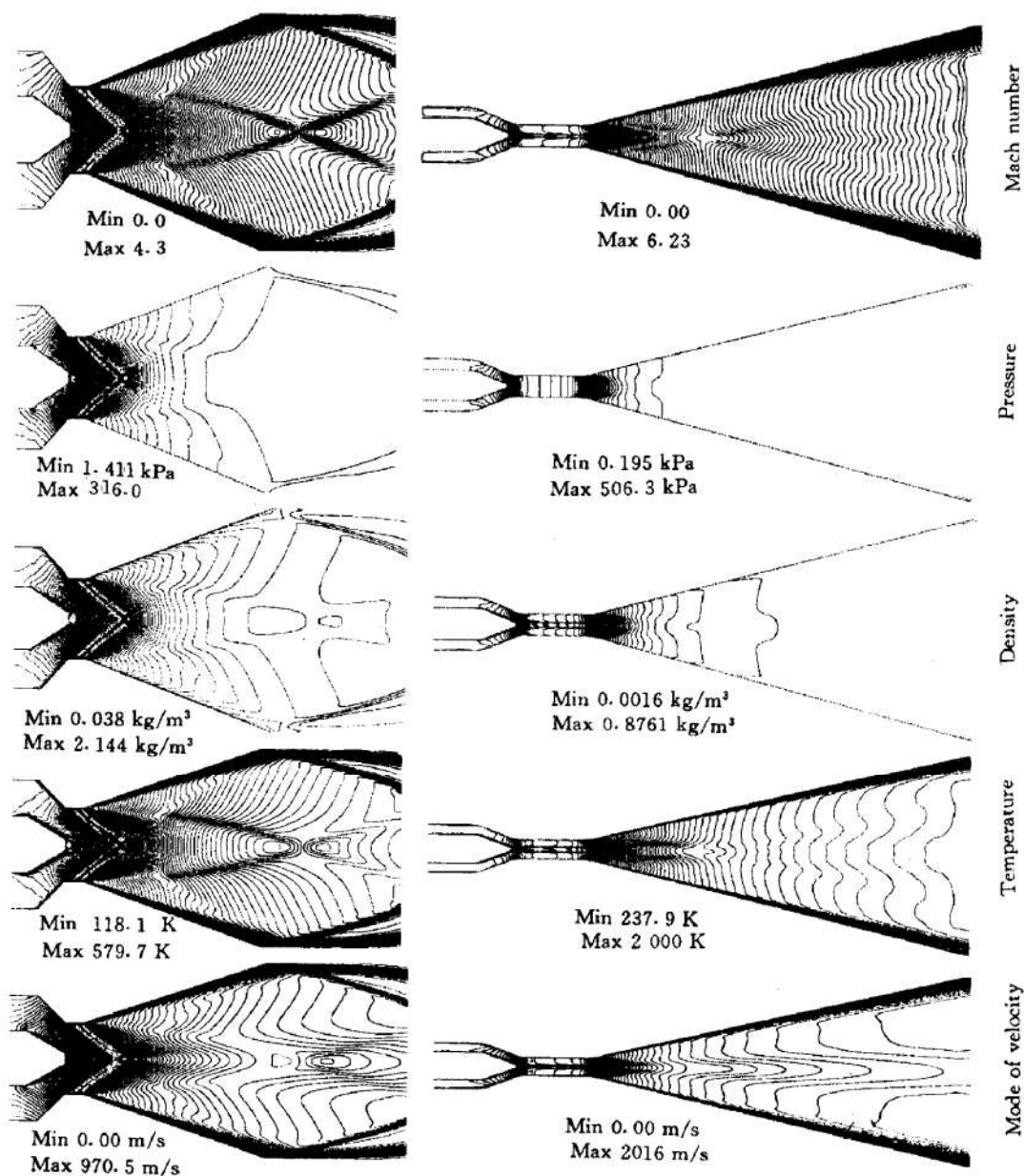


Fig. 2 Numerical results of pure gasdynamic flows when gas passing through arcjet flow

度分布), 在相同压力梯度情况下更易被加速。压缩器内同一横截面上的压力基本相同是必然的, 否则会出现径向压力梯度从而产生可观的径向流动。由于流道限制, 在稳态时该现象不可能发生, 压力分布图所示的数值结果证实了这一点。此外, 从速率分布图还可以看到, 速率在压缩器出口不远的轴线附近出现了一个峰值, 随后逐渐下降, 并且喷管中的速率分布与图 3 所示的纯气动流场大相径庭: 除中心附近区域外, 径向速率梯度在整个横截面上均很大, 而不是仅仅在附面层上。以上现象表明, 在整个喷管流动中粘性作用很强烈。

6 结 论

以经典四阶龙格-库塔方法为基本迭代格式时间步进法能够有效的计算可压缩流场并有一定的激波捕捉能力。在结合了局域时间步长、隐式残值光滑加速收敛措施后, 本文应用此方法成功地计算了气体流经两种形式电弧喷射推力器内流道但无电流通过时形成的纯气动流

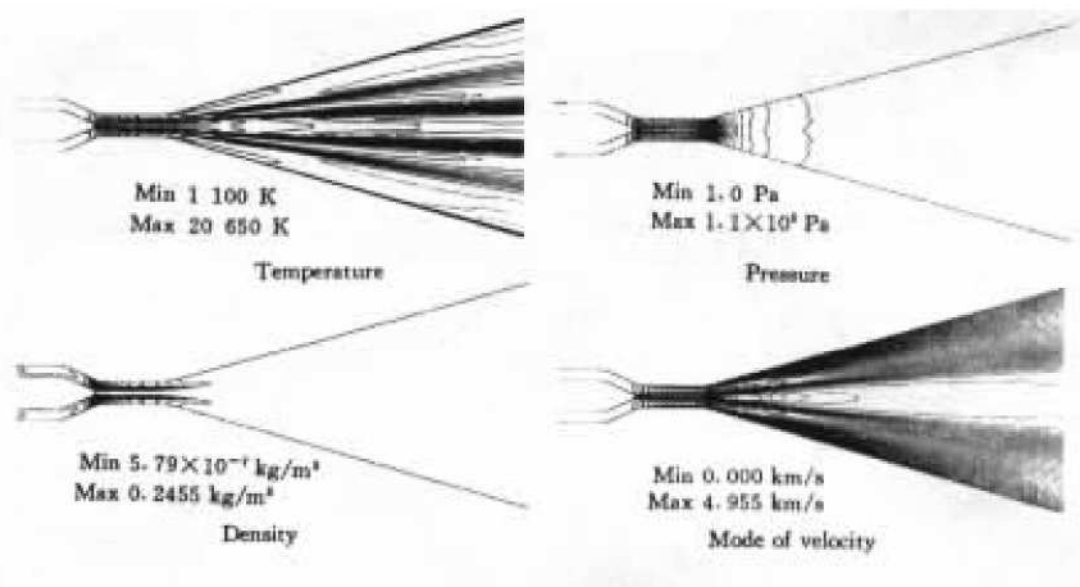


Fig. 3 Internal plasma flow of arcjet thruster

场以及有电流通过时形成的等离子体流场，证实了该方法对于此类计算的可行性。计算结果揭示了这两种流场的丰富的结构和一些重要的影响因数，为研究电弧喷射推力内部过程机制提供了重要依据。

参 考 文 献

- 1 Nobuyuki Satofuka, Koji Morinishi. Method of lines approach to computational fluid dynamics using rational Runge-Kutta time stepping scheme. *Frontiers of Computational Fluid Dynamics*, 1994, 12: 189~213
- 2 Wiedermann A, Teipel I. Computational of inviscid and viscous flows using Runge-Kutta time stepping scheme with various artificial viscosity concepts. *Computational Fluid Dynamics*, 1992, 741~748
- 3 Francesco Grasso, Carlo Meola. Euler and Navier-Stokes equations for compressible flows: finite volume methods. *Handbook of Computational Fluid Mechanics*, 1996, 159~282
- 4 关 治, 陈景良. 数值计算方法. 北京: 清华大学出版社, 1990.
- 5 左克罗 M J, 霍夫曼 J D. 气体动力学. 吴宗真, 林治楷译. 北京: 国防工业出版社, 1984: 286~293
- 6 过增元, 赵文华. 电弧和热离子体. 北京: 科学出版社, 1986.