

叶片机叶片平截面型线坐标的快速插值法^①

施发树 刘兴洲

(航天工业总公司 31 所,北京,100074)

摘 要: 建立了一种快速而精确的代数算法,用于插值计算柱坐标系下叶片机叶片平截面空间点坐标,并给出了相应算例。适用于计算流体动力学(CFD)工作者构造各种复杂的计算网络,并可以推广到各种复杂的空间曲线点的插值计算。

主题词: 网格生成,计算流体动力学,叶片,叶型,数值计算

分类号: V235.113

QUICK COORDINATE-INTERPOLATING METHOD FOR TURBOMACHINERY BLADE SECTION

Shi Fashu Liu Xingzhou

(The 31st Research Inst., Beijing, 100074)

Abstract: A kind of quick and accurate algebraic method was formulated, used for interpolating coordinates of turbomachinery blade section points. The method is very useful for generating complicated grids automatically for CFD researchers, and can be generalized for point-interpolating of all kinds of 3-dimensional curves.

Subject terms: Grid generation, Computation fluid dynamics, Blade, Blade airfoil, Numerical calculation

1 引 言

在涡轮喷气发动机上,压气机和涡轮叶片综合了气动、强度、传热、计算流体动力学(CFD)等多项科学技术,其正反问题都离不开一些基本的特征截面。以叶片平截面叶型点的数据为基础生成的空间叶片是 CFD 的基础,对给定的平面叶型点需要计算插值并疏密自动安排^[1]。

2 计算方法

在圆柱坐标系 (z, r, φ) 内,假定某任意形状叶片及其平截面结构示意图如图 1。

2.1 插值点分布函数

叶片机叶片特征平截面型线比较复杂,有些是直线与曲线的组合。计算时要依据已知点坐标重新自动生成各种复杂的网格,而且前后缘处分步较密。据此建立了一种新的点分布函数 S_d ,它以曲线总和蔗 $S_0(N_0)$ 为基准。

$$S_0(i) = S_d(i) \times S_0(N_0), \text{特殊情况下}, 0 < S_d(i) < 1, i = 1, 2, \dots, N.$$

^① 收稿日期:1998-03-05,修回日期:1998-05-06

令 $T_h = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$, $0 \leq T_h \leq 1$, 且 $D_2 = T_h(B \times (N - 1))$, 一般要求 $10^{-3} \leq |B \times N| \leq 10^4$, $D_3 = T_h(B)$, $S_{01} = (S_2 - S_1)/(1.1 \times N)$, $D_4 = S_{02}/S_{01} \times D_3$, S_{02}/S_{01} 为调整系数, S_2 , S_1 为插值函数的区间, 特殊情况下为 $[0, 1]$ 。要求:

$$\frac{C + D_3}{1 + C \times D_3} + \frac{(D_4 - D_3)/(D_2 \times D_4) + (C + D_2(D_3/D_4))}{1 + C \times D_2} = 0 \quad (1)$$

其中, $-1/p_2 \leq C \leq -D_3$ 。当 $S_{02}/S_{01} = 1$ 时, (1) 式成为:

$$\frac{C + D_3}{1 + C \times D_3} + \frac{C + D_2}{1 + C \times D_2} = 0 \quad -D_2 < C < -D_3 \quad (2)$$

而且规定当 $D_2 = T_h(B \times N)$, $D_3 = T_h(B)$, $D_1 = \frac{S_2 - S_1}{S_{01}}$ 时,

$$\frac{D_2}{1 + C \times D_2} - D_1 \times \frac{D_3}{1 + C \times D_3} = 0 \quad (3)$$

迭代求出满足 (1)、(3) 条件的 B, C 值后, $S_d(i)$ 函数为:

$$S_d(i) = S_1 + \left(\frac{D_3}{1 + C \times D_3} \right) / \left(\frac{D_2}{1 + C \times D_2} \right) (S_2 - S_1), \text{ 式中 } D_3 = T_h(B \times i), i = 1, 2, \dots, N,$$

并规定 $S_d(N_1) = S_1$, $S_d(N_2) = S_2$, 那么 $S_1 \leq S_d(i) \leq S_2$, 其中 $N_2 - N_1 = N$ 。

2.2 平面曲线点导数近似值

假设任意平面 (x, y) 曲线上已知相邻三点及其坐标值如图 2。根据 Lagrange 插值多项式可得中间 I 点 x 或 y 向导数近似分量分别为:

$$\begin{cases} X_{22} = 1 \\ Y_{22} = (1 - \omega) \frac{Y_{21}}{X_{21}} + \frac{Y_{32}}{X_{32}} \end{cases}$$

$$\text{其中 } \omega = \frac{X_{21}}{X_{31}} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1},$$

$$\frac{Y_{21}}{X_{21}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \frac{Y_{32}}{X_{32}} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \quad (4)$$

假设 x 向最小步长绝对值大于 y 向最小步长绝对值, 以防计算时出现数字溢出。公式 (4) 导数计算精度为二级。同样假设 y 向最小步长绝对值较大, 那么,

$$\begin{cases} Y_{22} = 1 \\ X_{22} = (1 - \omega) \frac{X_{21}}{Y_{21}} + \frac{X_{32}}{Y_{32}} \omega, \quad \omega = \frac{Y_{21}}{Y_{31}} \end{cases} \quad (5)$$

曲线起、终点较特殊, 假设坐标点如图 3, 4 所示, 计算公式同 (4) 或 (5)。

需要注意, 有时曲线上两相邻点之间存在拐点或者两点处切线方向夹角大于或等于 90° ,

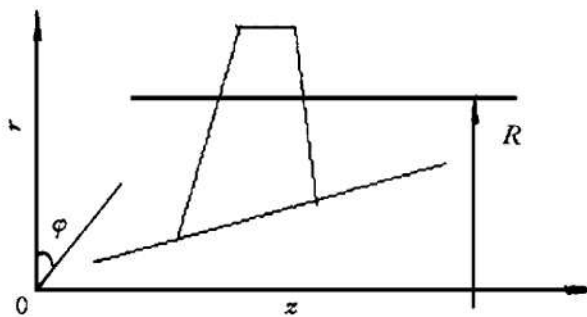


Fig. 1 Polar coordinate system

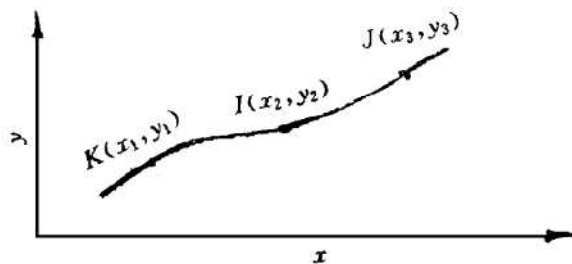


Fig. 2 Three points

这时候需要继续检验前一个步长是否存在同样情况。如果是,可能曲线上出现了不正常数据或者曲线需要光滑处理,否则就用相邻点之间的坐标变化值分别规定为两相邻点的导数近似分量,精度为一级。

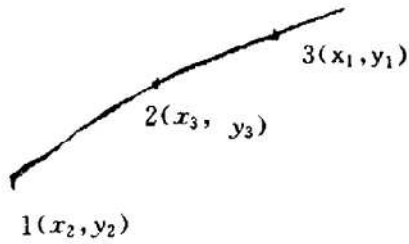


Fig. 3 Starting coordinates

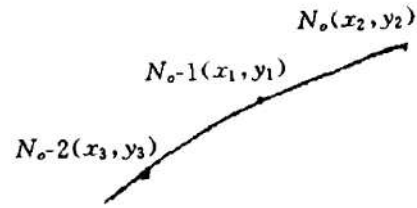


Fig. 4 Ending coordinates

2.3 平面曲线长度函数

取平面曲线上任意相邻 i, j 区间, $i=1, \dots, N_0$, 规定 i 点之前的曲线累积长度为 $S(i)$, 对应 j 点曲线长度为 $S(j)$, 对应分布函数 $S_d(i)$ 插值点的曲线长度为 S , 且 $\frac{S-S(i)}{S(j)-S(i)} = T$, $0 \leq T \leq 1$, 那么下面给出计算 S 的方法。在 $[x_1, x_2]$ 之间, 假设下式成立:

$$\left. \begin{aligned} x &= A \times T^2 + B \times T + C \\ y &= D \times T^2 + E \times T + F \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

根据端点条件: $T=0$ 时, $x=x_1, y=y_1$; ($T=1$ 时, $x=x_2, y=y_2$, 推导下式成立:)

$$\left. \begin{aligned} x &= [(x_2 - x_1) - B] \times T^2 + B \times T + x_1 \\ y &= [(y_2 - y_1) - E] \times T^2 + E \times T + y_1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

又根据端点导数条件: ($T=0$ 时, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{Y_{11}}{X_{11}}$; $T=1$ 时,)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_j = \frac{Y_{22}}{X_{22}} \quad (8)$$

$$\text{由 (7) 式得: } \frac{dy}{dx} = \frac{2 \times [(y_2 - y_1) - E] \times T + E}{2 \times [(x_2 - x_1) - B] \times T + B} \quad (9)$$

由 (8), (9) 式得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{B} &= \frac{Y_{11}}{X_{11}} \\ \frac{2 \times (y_2 - y_1) - E}{2 \times (x_2 - x_1) - B} &= \frac{Y_{22}}{X_{22}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\text{令 } B_0 = \frac{2 \times [(x_2 - x_1) \times Y_{22} - (y_2 - y_1) \times X_{22}]}{X_{11} \times Y_{22} - X_{22} \times Y_{11}},$$

$$\left. \begin{aligned} \text{那么 } B &= X_{11} \times B_0 \\ E &= Y_{11} \times B_0 \end{aligned} \right\} \quad (11) \quad \left. \begin{aligned} A &= (x_2 - x_1) - B \\ D &= (y_2 - y_1) - E \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

插值点处曲线长度 $S =$

$$S(i) + \int_{x_1}^x \sqrt{dx^2 + dy^2} = S(i) + \int_0^T \sqrt{(2 \times A \times T + B)^2 + (2 \times D \times T + E)^2} dT =$$

$$S(i) + A_s \times \left[(T + A_L) \sqrt{(T + A_L)^2 + B_T} + B_T \ln \frac{T + A_L + \sqrt{(T + A_L)^2 + B_T}}{A_L + \sqrt{A_L^2 + B_T}} - \right]$$

$$A_L \sqrt{A_L^2 + B_T} \quad (13)$$

其中: $A_s = \sqrt{A^2 + D^2}$, $A_L = \frac{A \times B + D \times E}{2 \times (A^2 + D^2)}$, $B_T = \frac{B^2 + E^2}{4 \times (A^2 + D^2)} - A_L$ 。当 $T = 1$ 时, $S = S(j)$, 这样就可以计算出整个曲线上点的长度函数和总长度 $S(N_0)$ 。

2.4 圆柱标逆算法

依据上述方法和计算步骤, 得 (z, r) 平面内曲线长度函数 $S_m(i)$ 和 $(S_m, r_0 \times \varphi)$ 平面内曲线长度函数 $S_0(i)$, 利用点分布函数 $S_d(i)$ 得到某一点 $S_0(i)$, 利用牛顿插入法反求出 (z, r) 坐标, 这就是代数插入法的全过程。下面给出牛顿插入法的公式:

$$dS = \sqrt{(2 \times A \times T + B)^2 + (2 \times D \times T + E)^2} dT = \sqrt{A_1} \times \sqrt{(T + A_L)^2 + B_T} dT$$

$$\text{上式中: } A_1 = 4 \times (A^2 + D^2), \quad A_L = \frac{A \times B + D \times E}{2 \times (A^2 + D^2)}, \quad B_T = \frac{B^2 + E^2}{4 \times (A^2 + D^2)} - A_L^2, \\ T = T + \frac{S - S(i) - S(T)}{R}$$

其中 S 代表曲线长度 S_m 或 S_0 , $S(T)$ 为对应 $T = \frac{S - S(i)}{S(i+1) - S(i)}$ 时的曲线长度, 反复迭代直到 $|T' - T| \leq 10^{-3}$ 收敛为止。

3 计算结果

利用上述方法, 对某宽展弦比风扇叶片 (如图 5) 进行了插值计算。首先构造 30 个点的分布函数 $S_d(i)$, 分别选取 $S_{02}/S_{01} = 0.5, 1, 1.2$, 计算结果见图 6, 可见 $S_{02}/S_{01} = 1$ 点的分布较为理想, 进而对风扇叶片根部截面进行插值计算, 结果见图 7, 8, 可见插值点与原有的点曲线非常吻合, 且疏密符合要求。实践证明此种计算方法简单快速准确, 非常适合于 CFD 工作者自动调整生成合适的网格, 并可以推广到任意坐标系下任意曲线的插值计算。

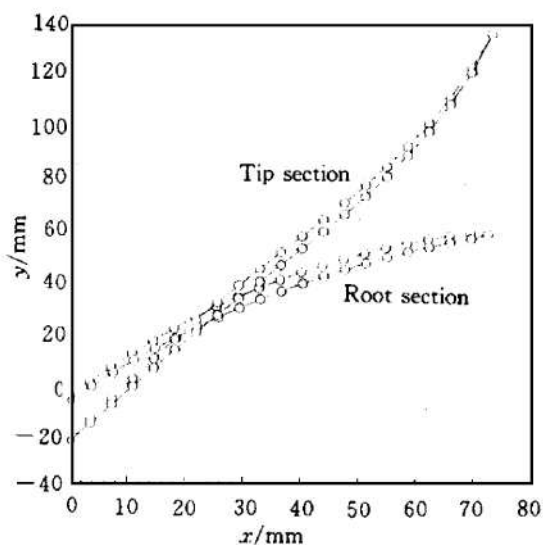


Fig. 5 Fan blade section

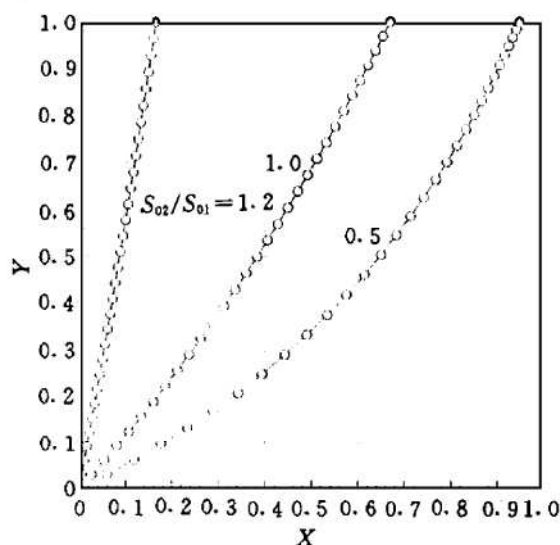


Fig. 6 Point distribution function

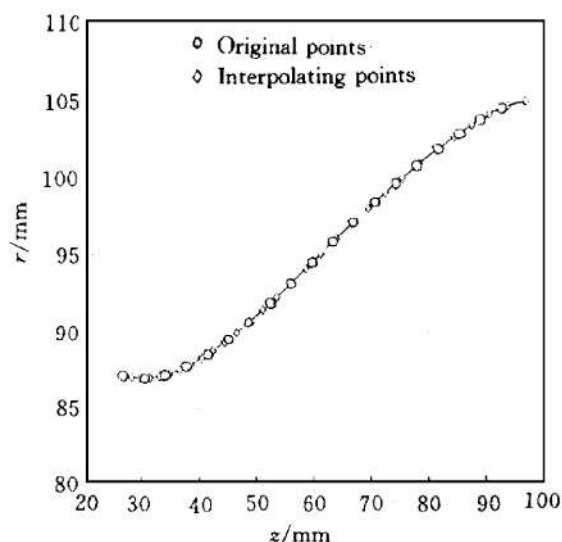


Fig. 7 Computation results of root section

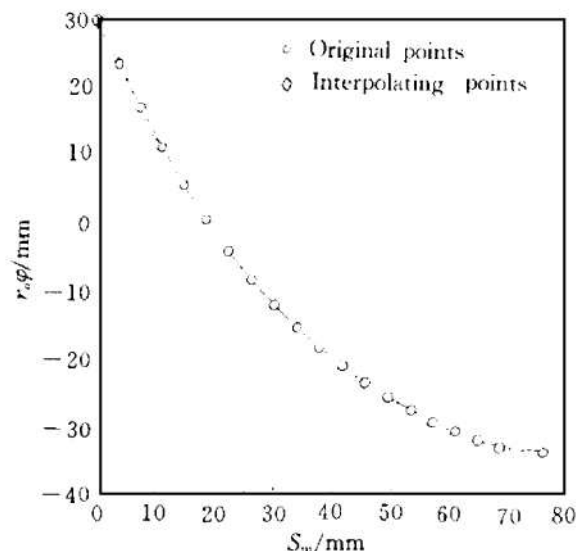


Fig. 8 Computation results of root section

参 考 文 献

- 1 施发树, 刘兴洲. 多部件模型在全尺寸小型双涵道涡扇发动机气流数值模拟中的应用. 推进技术, 1998 (4)



日本 J-1 火箭拟采用美登月火箭发动机

洛克希德·马丁宇航公司、石川岛播磨重工业公司和日产汽车公司共同协商, 为日本的 J-1 两级火箭制造一个替代品。虽然还未达到正式协议, 但是洛克希德·马丁公司打算在 J-1 第一级上使用 Kuznetsov NK-33 登月火箭发动机。该公司熟知 NK-33 技术, 因为曾经考虑在改型的 Atlas 3A 上使用 NK-33 发动机。通用航空飞机公司拥有此发动机的销售权。石川岛播磨重工业公司和日产公司将分别负责第一、第二级计划。日产公司正为第二级研制以液态甲烷为燃料的发动机, 日本方面希望该发动机比目前的固体火箭发动机便宜, 改进的 J-1 单价被期望从 3400 万美元降至 2800 万美元。三菱公司打算与波音公司合作改进现有的飞行器, 但未成功。洛克希德·马丁公司指出: 出口 NK-33 技术将需得到国务院的批准。

冯永红 供稿