

多重网格法求解火焰稳定器钝头体管流问题^{*}

孙再庸 何洪庆 蔡体敏

(西北工业大学航天工程学院, 西安, 710072)

摘 要: 多重网格法是近年发展起来的一种软加速方法, 用多重网格法可明显地加快数值计算的收敛速度, 且网格越密其加速效果越明显。应用多重网格法求解有钝头体的火焰稳定器管内流动问题, 计算结果与试验结果比较, 吻合较好。

主题词: 多重网格法⁺, 钝头体, 管流, 火焰稳定器

分类号: V231.2

NUMERICAL SIMULATION OF FLAME STABILIZATOR AROUND BLUFF BODY CONFINED IN A PIPE

Sun Zaiyong He Hongqing Cai Timin

(Coll. of Astronautics, Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an, 710072)

Abstract: Multigrid method has been developed only in previous decade. One observes an enormous improvement of the convergence rate by such a multigrid method, resulting in a significant acceleration of the computation. The finer the grid, the larger becomes the improvement. The problem considered here is a flame stabilizator around a conical bluff body confined by a long circle pipe. The numerical results are good agreement by comparing with the experimental data.

Subject terms: Multigrid method⁺, Blunt body, Pipe flow, Flame holder

1 引 言

Fedorenko^[1]证明多重网格方法在 Poisson 方程的标准五点有限差分离散形式上是可行的。Brandt^[2]首先报导了多重网格方法实际应用的结果, 并在 1977 年又清楚地阐明了这种方法的原理及实用性^[3], 引起了广泛的关注。Hackbusch^[4]、Frederickson^[5]和 Wesseling^[6]等人也做了大量的研究工作。目前多重网格方法的应用已不仅限于流体力学方面, 在控制论、优化理论、图象识别、计算机图形学、以及粒子物理等方面均有应用成功的报导^[7]。本研究是为探索微温电热推进器 (MET) 工作体 (微波谐振腔) 内等离子体区的稳定性问题。工质通过 MET 的谐振腔时, 在谐振能量集中的区域吸收能量等离子化。但实践表明等离子体区不易稳定, 而在其上游设计钝头体, 可以使等离子区稳定, 因此需解决内置钝头体的管流计算问题。

2 理论模型

流动计算采用轴对称 N-S 方程组, 湍流采用 $k-\epsilon$ 双方程模型, 离散采用有限体积法, 离散

^{*} 收稿日期: 1997-12-18, 修回日期: 1998-03-09, 本课题系国家“八六三”预研课题, 国家自然科学基金和国家教委博士学科点专项科研基金资助项目

后的代数方程利用 Stone 的 SIP 法求解, 压力校正采用 SIMPLE 方法, 外迭代采用多重网格法。

假设, 在第 $k(k = 1, 2, \dots, N_g)$ 重网格, 所有变量的精确解 $\phi(l = U, V, P, T, \dots)$ 满足下式

$$[A'_k]\{\Phi'_k\} = \{S'_k\} \quad (1)$$

为书写简洁, 将省略上标 l 。 $[A_k]$ 是给定变量的系数矩阵, 是解的函数。这里系数是基于所有变量精确解得到的, 即: $[A_k] = [A_k(\Phi_k)]$; $\{\Phi_k\}$ 是在第 k 重网格的精确解的矢量; $\{S_k\}$ 是基于所有变量精确解得到的源项矢量, $\{S_k\} = \{S_k(\Phi_k)\}$ 。当整个方程经若干步外迭代后, 可得所有变量的近似解, 再代入方程 (1) 中得到残差 R :

$$[A_k]\{\phi_k\} = \{S_k\} - \{R_k\} \quad (2)$$

$\{\phi_k\}$ 是所有变量的近似解; $[A_k]$ 是由所有变量的近似解得到的系数矩阵; $\{S_k\}$ 是由所有变量的近似解得到的源项。

对于非线性方程系统, 方程 (1), (2) 得:

$$[A_k]\{\Phi_k\} = \{S_k\} - \{S_k\} + [A_k]\{\phi_k\} + \{R_k\} \quad (3)$$

校正值 $\varphi_k = \Phi_k - \phi_k$ 不仅依赖于残差 R_k ; 且也随源项和系数而变。

假设: $[A_k] = [A_k + A'_k]$, $\{\Phi_k\} = \{\phi_k + \varphi_k\}$, $\{S_k\} = \{S_k + S'_k\}$ 。将假设代入方程 (3) 中得:

$$[A_k + A'_k]\{\varphi_k\} = \{R_k\} + \{S'_k\} - [A'_k]\{\phi_k\} \quad (4)$$

比较方程 (3) 和 (4) 可以看出, 方程 (4) 多了一些附加项。由方程 (3) 可直接求解 φ_k , 而方程 (4) 却不能, 因为 S'_k 和 A'_k 一般不是 ϕ 的线性函数, 即 $S(\phi + \varphi) \neq S(\phi) + S(\varphi)$ 。

方程 (4) 就是多重网格方法的全近似格式 (Full Approximation Scheme-FAS) 的基本思想。为了保持所有变量的非线性耦合特性不变, 现对方程 (4) 作近似, 且在较粗网格 ($k-1$) 上定义为:

$$[\hat{A}_{k-1}]\{\hat{\phi}_{k-1}\} = \{\hat{S}_{k-1}\} - \underbrace{\{\tilde{S}_{k-1}\} + [\tilde{A}_{k-1}]\{\tilde{\phi}_{k-1}\} + \{\tilde{R}_{k-1}\}}_{S_{k-1}^*} \quad (5)$$

$\hat{A}, \hat{\phi}$ 和 $\hat{S}$ 分别为 A, Φ 和 S 的近似; $\tilde{\phi}_{k-1}$ 是 k 重网格的解 R_k , 内插到 $k-1$ 上:

$$\tilde{\phi}_{k-1} = I_{k-1}^k \phi_k$$

这里, I_{k-1}^k 是一个插值算子, 称之为限定算子。 $\tilde{A}_{k-1}$ 和 $\tilde{S}_{k-1}$ 是第 $k-1$ 重网格对应的系数和源项, 是与变量用同样的方法从第 k 重网格内插而得; $\tilde{\phi}_{k-1}$ 是基于第 k 重网格的限定到 $k-1$ 重网格的解; $\tilde{R}_{k-1}$ 是基于 k 重网格的残差 R_k , 内插到 $k-1$ 重网格上。

当粗网格的解满足方程 (5), 达到要求的精度 (R_{k-1} 足够小) 时, 通过插值后的变量值求解校正值:

$$\varphi_{k-1} \approx \hat{\phi}_{k-1} - \tilde{\phi}_{k-1} \quad (6)$$

这个校正值通过适当的插值算子, 可以外插 (延拓) 到细网格上。

$$\varphi_k \approx I_k^{k-1} \varphi_{k-1} \quad (7)$$

ϕ_k 通过加上 φ_k 得到校正。由于插值的近似, 造成一些高频误差。然而这些高频误差在细网格上只需几步迭代就可消除。对于稳态流动问题, 采用 V 循环的全多重网格方法进行不同网格级之间的转换。

3 应用与算例

(1) 问题的描述: 内置钝头体管流的几何结构如图 1 所示。长直管的直径和长度分别为 0.1m 和 0.2m, 其它几何尺寸: $L_1=0.05\text{m}$, $L_2=0.15\text{m}$, $D_1=0.1\text{m}$, $D_2=0.02\text{m}$, $h_1=0.005\text{m}$, $\theta=22^\circ$ 。为便于与 Taylor^[9,10]等人的试验结果比较, 流场的结构尺寸与 Taylor 等人试验用的一致。

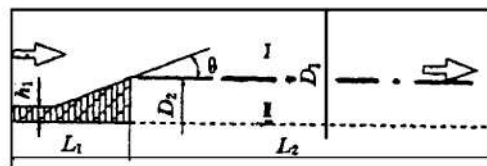


Fig. 1 Bluff body configuration

(2) 边界条件: 入口取均匀来流, 上下界面取对称边界条件, 钝头体界面取壁面边界条件; 出口为常规的一阶外插。

(3) 数值结果: 采用分块 (I、II 两个子区域) 的多重网格方法, 第 1 重网格子区域的控制体个数分别为 5×28 和 5×20 , 第 2, 3 重分别为 10×56 和 10×40 , 20×112 和 20×80 。亚松弛因子 $\alpha_u=0.7$ 和 $\alpha_p=0.3$ 。本文部分典型的数值结果以及与 Taylor 等人^[9,10]试验结果的比较, 如图 2~9 所示。

图 2~5 为沿流动方向不同截面 ($z=0.5, 15, 35, 70\text{mm}$) 上速度 u 的分布。这里, 需要说明的是图中 z 的原点取在钝头体的后部, 即图 1 中 L_2 的起点, 以下各图均同。图 6 和图 7 则表示沿流动方向不同截面 ($z=0.5, 35\text{mm}$) 上速度 v 的分布, 图中 r^* 代表不同截面上的纵向相对坐标值, 即所在截面的纵向坐标与管半径之比。图 8 和图 9 分别表示沿流动方向 $z=15\text{mm}$ 截面上湍流动能 k 和中心线上的速度 u 的分布。可以看到本文的数值结果与 Taylor 等人的实验结果吻合较好。

对所有网格的收敛准则均取为 1.0×10^{-6} 计算在 Sun 工作站的 Ultra SPARC2 型机上进行, 其中第 1 重网格迭代 81 步, CPU 时间 4.0s; 第 2 重网格迭代 151 步, CPU 时间 27.0s; 第 3 重网格迭代 156 步, CPU 时间 250.87s。对于单重网格方法, 如采用第 3 重网格, 计算速度 (所需 CPU 时间) 并未比单重网格方法快 (281.87s : 267.96s)。如采用 4 重网格的多重网格法, 收敛准则仍为 1.0×10^{-6} , 其中第 4 重网格数为 40×225 和 40×161 。则前三重网格的迭代步和 CPU 时间与 3 重网格法相同, 第 4 重网格迭代 801 步, CPU 时间 2500.6s。对于单重网格方法, 如采用第 4 重网格, 收敛准则相同, 迭代 551 步, CPU 时间 3424.0s。所以采用 4 重网格的多重网格法, 计算速度 (所需 CPU 时间) 明显比单重网格方法快 (2781.9s : 3424.0s)。

4 结 束 语

由算例可以看到, 计算网格划分越细, 求解的问题越复杂, 则多重网格法的加速作用越明显。通常情况下我们需要的是最细网格的结果, 因此对于其它几重网格的收敛误差无需太小, 这样只需很少的迭代步数, 就可以消除该重网格所对应的高频误差, 因此对整个问题的求解速度又可进一步加快。

另外对于采用多少计算网格重数和节点为最佳, 应视具体问题而定, 正如对于 CFD 问题并非计算网格节点越多越好一样。采用多重网格法的程序, 用于求解单重网格的问题则是非常简单的事。

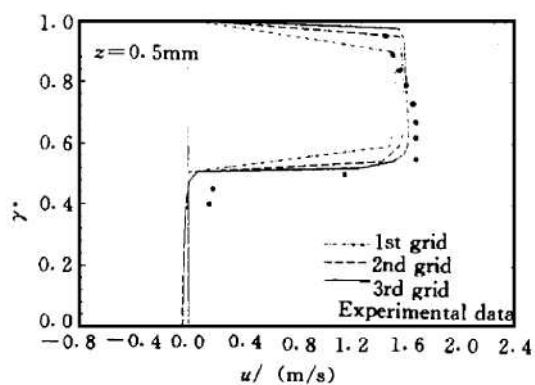


Fig. 2 u velocity profile at $z=0.5\text{mm}$ section

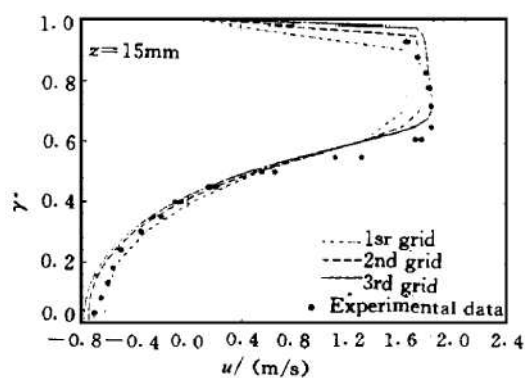


Fig. 3 u velocity profile at $z=15\text{mm}$ section

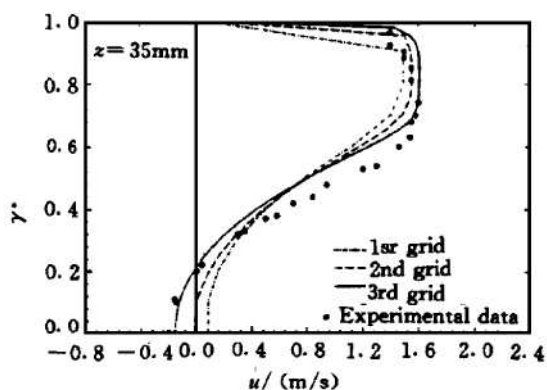


Fig. 4 u velocity profile at $z=35\text{mm}$ section

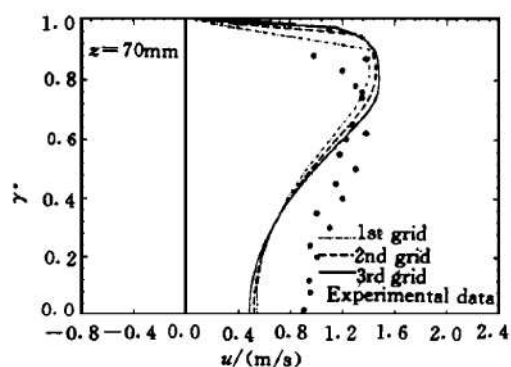


Fig. 5 u velocity profile at $z=70\text{mm}$ section

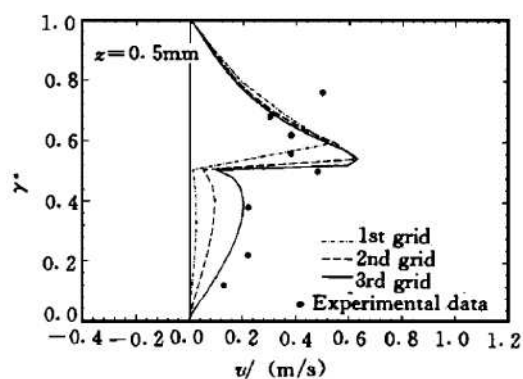


Fig. 6 v velocity profile at $z=0.5\text{mm}$ section

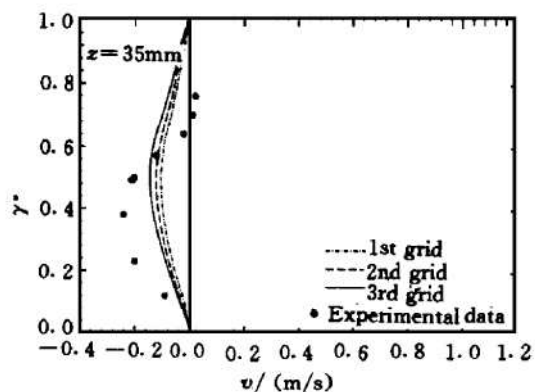


Fig. 7 v velocity profile at $z=35\text{mm}$ section

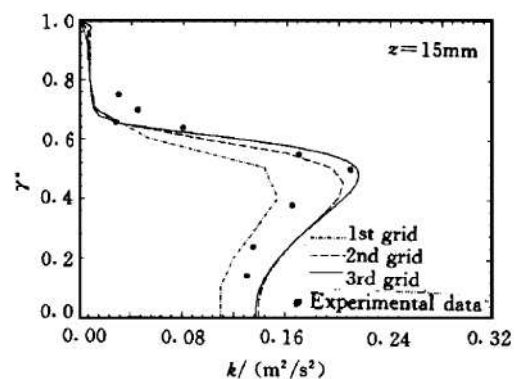


Fig. 8 k profile at $z=15\text{mm}$ section

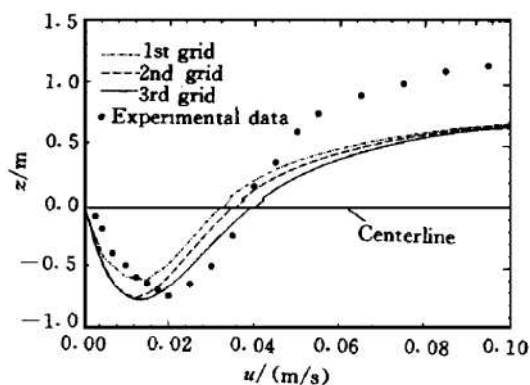


Fig. 9 Velocity profile in axis

(下转第 91 页)

归效率; 算法在第一个混合回归演化周期中, 搜索到初始种子回归方程, 且能基本满足拟合精度与项数的要求, 以后各混合回归演化周期依次对初始种子回归方程进行约化、精炼, 最终能演化出一个回归项数最少的拟合方程。

与常规非线性回归算法比较, 混合回归演化策略的特点是: ①无须线性化非线性回归项; ②方程结构与系数联合回归; ③无须矩阵求异; ④算法简单、鲁棒性好。因此, 该算法值得推广应用。

参 考 文 献

- 1 邓勃. 分析测试数据的统计处理方法. 北京: 清华大学出版社, 1994.
- 2 Back Thomas, Hoffmeister Frank, Schwefel Hans-Paul. A survey of evolution strategies. In: Ricard K R, Lashon B B eds. Proceedings of the Fourth ICGA, University of Cailifornia, San Diego, 1991, 7. Morgan Kaufmann Publishrers, San Mateo, California.
- 3 Rechenberg I. Evolutionstrategie: optimiering technischer systeme nach prinzipien der biolgischen evolution. Stuttgart: Frommann-Holzboog Verlag, 1973.
- 4 Schwefel H P. Nuerische optimierung von computer-mittels mittels der evolutionstrategie. Interdisciplinary Systems Research, Basel: Birkhuser, 1977, 26
- 5 Schwefel H P. Numerical optimization of computer models. Chichester, Uk: John Wiley, 1981.
- 6 Goldberg D E, Richardson J. Genetic algorithms with sharing for the multimoel function optimization. In: Proc of the 2nd International Conference on the Genetic Algorithms. 1987, 41~49

(上接第 37 页)

参 考 文 献

- 1 Fedorenko R P. The speed of convergence of one iterative process. USSR Comp Math and Math Phys, 1964 (4): 227~235
- 2 Brandt A. Multi-level adaptive technique (MLAT) for fast numerical solution to boundary value problems. In: Cabannes H, Temam R editors. Third Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Springer-Verlag. Lecture Notes in Physics 18, Berlin: 1973, 1: 82~89
- 3 Brandt A. Multi-level adaptive solution to boundary value problems. Math. Comp, 1977, 31: 333-390
- 4 Hackbusch W. On the multi-grid method applied to difference quations. Computing, 1978, 20: 291~306
- 5 Frederickson P O. Fast approximate inversion of large elliptic systems. Report 7-75, Canado Thurderbayi Lakehead University, 1975.
- 6 Wesseling P. An introduction to multigrid methods. John Wiley & Sons, 1994.
- 7 Brandt A. Multilevel computations: Review and recent development. In McCormick, 1988: 35-62
- 8 Taylor A M K P. Confined, isothermal and combusting flows behind axisymetric baffles. Ph. D. Thesis, University of London, 1981.
- 9 Taylor A M K P, Whitelaw H. Velocity charateristics in the turbulentnear wakes of confined axisymetric bluff bodies. J Fluid Mech, 1984, 139: 391~416