1997年6月 第18卷 第3期
推 进 技 术
JOURNAL OF PROPULSION TECHNOLOGY
Jun. 1997 Vol. 18 No. 3

三维药柱的热粘弹性有限元分析*

李录贤 叶天麒 沈亚鹏 左建政

(西北工业大学飞机系，西安，710072) (西安交通大学建力学院，西安，710049)

朱祖念 张善祁 王至存

(陕西动力机械研究所，西安，710000)

摘 要：采用三维模型，用有限元法分析固体火箭发动机的药柱在硫化降温、内压和轴向过载作用下的热粘弹性准静态响应，为实际结构设计提供参考。

主题词：固体推进剂火箭发动机，固体推进剂，粘弹性，有限元法

分类号：V512

A FINITE ELEMENT ANALYSIS FOR THERMO-VISCOELASTIC GRAINS

Li Luxian Ye Yianqi

(Dept. of Aircraft Engineering, Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an, 710072)

Shen Yapeng Zuo Jianzheng

(Coll. of Architectural Engineering and Mechanics, Xi'an Jiaotong Univ., Xi'an, 710049)

Zhu Zunian Zhang Shanqi Wang Zhicun

(Shanxi Inst. of Power Machinery, Xi'an, 710000)

Abstract: Using a three-dimensional model, quasi-atatic responses of thermo-viscoelastic grains in solid rocket motors are analyzed under cure cooling, internal pressure and acceleration, so as to give a reference to the designer of actual structures.

Subject terms: Solid propellant rocket engine, Solid propellant, Viscoelasticity, Finite element method

1 引 言

推进剂药柱从制作、贮存、运输到实际工作，其间承受三种载荷，即由硫化降温而产生的温度载荷、升空过程中的内压作用和飞行过程中的轴向过载（惯性力）作用。这三种工况下，结构内部应力的分布特点是不同的。对固体火箭发动机药柱的研究应按三维问题处理。事实上，若分析某几个纵切面构成的轴对称问题，可大大简化处理的难度，对结构内部的应力分布和变形情况亦可得到基本了解，但对应力变化剧烈的区域，却无法获得定量认识。

本文使用三维模型，研究了药柱在不同工况下的应力分布和变形情况，指出了药柱内应

* 收稿日期：19960615，修回日期：19961223

力的分布状况及随时间的变化规律，以期对实际结构的设计提供参考。

2 粘弹性分析的有限元方程

2.1 线性热粘弹性增量型本构关系

粘弹性材料的模量是随时间变化的，为了有限元实现的方便，这里引用Christenson[1]提出的遗传积分型本构关系，在多轴应力状态下，可写成

$$\{\boldsymbol{\sigma}_{ij}\} = \int_0^t E(\zeta - \zeta')[\boldsymbol{A}]\frac{\partial\{\bar{\varepsilon}_{pq}\}}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

其中 σ_{ij}、ε_{ij}分别表示应力张量和应变张量。$E(t)$ 为拉伸松弛模量，矩阵 $[\boldsymbol{A}]$ 与弹性矩阵相似，但仅与 Poisson 比 ν 有关，具体形式可参阅文献 [2]。

本文中如 Schapery[3]指出的，假定 ν 与时间无关。$\bar{\varepsilon}_{pq} = \varepsilon_{pq} - \delta_{pq}\alpha\Delta T$，计及了热应变，$\alpha$ 为热膨胀系数 。对于热流变简单材料，缩减时间

$$\zeta = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\eta}{a_T(\eta)}, \quad \zeta' = \int_0^\tau \frac{\mathrm{d}\eta}{a_T(\eta)} \tag{2}$$

其中 a_T 为时温转换因子，一般选用 WLF 方程形式[2]。若将拉伸应力松弛模量用 Prony 级数表示，即

$$E(t) = \sum_{k=1}^{M} E_k\exp(-a_k t) \tag{3}$$

再定义 t_n 时刻的卷积 $\{\boldsymbol{\sigma}_{ij}\}_{n,k} = \int_0^{t_n} E_k\exp[-\alpha_k(\zeta_n - \zeta')][\boldsymbol{A}]\frac{\partial\{\bar{\varepsilon}_{pq}\}}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau$ (4)

和

$$\{\boldsymbol{\sigma}_{ij}\} = \sum_{k=1}^{M}\{\boldsymbol{\sigma}_{ij}\}_{n,k} \tag{5}$$

由（4）式可得

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{\sigma}_{ij}\}_{n,k} =& \int_0^{t_{n-1}} E_k\exp[-\alpha_k(\zeta_n - \zeta_{n-1})]\cdot\exp[-\alpha_k(\zeta_{n-1} - \zeta'][\boldsymbol{A}]\frac{\partial\{\bar{\varepsilon}_{pq}}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau + \\ & \int_{t_{n-1}}^{t_n} E_k\exp[-\alpha_k(\zeta_n - \zeta')][\boldsymbol{A}]\frac{\partial\{\bar{\varepsilon}_{pq}\}}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau = \\ & \exp(-\alpha_k B_n\Delta t_n)\{\boldsymbol{\sigma}_{ij}\}_{n-1,k} + \frac{E_k[1 - \exp(-\alpha_k\bar{B}_n\Delta t_n][\boldsymbol{A}]\{\Delta\bar{\varepsilon}_{pq}\}}{\alpha_k\bar{B}_n\Delta t_n}\end{aligned} \tag{6}$$

上式是一个递推公式，推导中假定了 $t_{n-1}\sim t_n$ 间隔内的$\frac{\partial\ \{\bar{\varepsilon}_{pq}\}}{\partial t}$为常数，并用$\frac{\{\Delta\bar{\varepsilon}_{pq}\}}{\Delta t_n}$表示。

由（6）式很容易得到其增量形式，即

$$\begin{aligned}\{\Delta\boldsymbol{\sigma}_{ij}\}_{n,k} =& [\exp(-\alpha_k B_n\Delta t_n) - 1]\{\boldsymbol{\sigma}_{ij}\}_{n-1,k} + \\ & \frac{E_k[1 - \exp(-\alpha_k\bar{B}_n\Delta t_n)][\boldsymbol{A}]\{\Delta\bar{\varepsilon}_{pq}\}}{\alpha_k\bar{B}_n\Delta t_n} \cdot \triangleq d_{n,k}\{\sigma_{ij}\}_{n-1,k} + C_{n,k}[\boldsymbol{A}]\{\Delta\bar{\varepsilon}_{pq}\}\end{aligned} \tag{7}$$

其中，$B_n = \frac{1}{\alpha_T\ (t_n)}$，$\bar{B}_n =\ (\frac{t_{n-1}}{t_n})\ \bar{B}_{n-1} +\ (\frac{\Delta t_n}{t_n})\ B_n$ (8)

式（7）中，右端第一项代表松弛应力，第二项代表由 Δt_n 间隔内的应变增量产生的应力增量。$d_{n,k}$与 $C_{n,k}$是引入的两个记号。

将式（7）代入式（5）得$\{\Delta\boldsymbol{\sigma}_{ij}\}_n =\ \{d_n\}\ + C_n\ [\boldsymbol{A}]\ \{\Delta\bar{\varepsilon}_{pq}\}$ (9)

其中 $$\{d_n\} = \sum_{=1}^{M}(d_{n,k}\{\sigma_{ij}\}_{n-1,k}),\quad C_n = \sum_{k=1}^{M} C_{n,k} \tag{10}$$

2.2　有限元方程的建立

令 $\boldsymbol{u}_i$ 表示位移向量，$\Delta\boldsymbol{u}_i$ 表示相应的增量，则应变及其增量可定义为

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\} = B\{\boldsymbol{u}_i\} \qquad \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\} = B\{\Delta\boldsymbol{u}_i\} \tag{11}$$

式中 B 为一微分算子，具体形式可参阅文献［2］。增量型虚功方程为[4]：

$$\iiint_v [\delta\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\}^T\{\Delta\boldsymbol{\sigma}_{ij}\} - \delta\{\Delta\boldsymbol{u}_i\}^T\{\Delta\bar{P}_i + \bar{P}_i\} + \delta\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\}^T\{\boldsymbol{\sigma}_{ij}\}]\mathrm{d}V - \iint_{S_\sigma}\delta\{\Delta\boldsymbol{u}_i\}^T\{\bar{F}_i + \Delta\bar{F}_i\}\mathrm{d}S = 0 \tag{12}$$

式中，$\bar{P}_i$，$\bar{F}_i$ 分别为体力和面力，$\Delta\bar{P}_i$ 和 $\Delta\bar{F}_i$ 为相应的增量。

引入形函数矩阵 $\boldsymbol{N}$，用节点位移 $\{\Delta\}^e$ 将单元位移表示成 $\{\Delta u_i\}^e = \boldsymbol{N}\ \{\Delta\}^e$。这样，在单元 e 上虚功方程变为

$$\iiint_{v^e} \delta\{\Delta\}^{e^T}\boldsymbol{N}^T B^T C_n[\boldsymbol{A}]B\boldsymbol{N}\{\Delta\}^e\mathrm{d}V = \iiint_{v^e} [\delta\{\Delta\}^{e^T}(\boldsymbol{N}^T B^T(C_n[\boldsymbol{A}]\{\delta_{pq}\alpha\}\Delta T - \{\boldsymbol{\sigma}_{ij}\}) + \boldsymbol{N}^T\{\bar{P}_i + \Delta\bar{P}_i\})]\mathrm{d}V - \iiint_{v^e} \delta\{\Delta\}^{e^T}\boldsymbol{N}^T B^T\{d_n\}\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma^e}\delta\{\Delta\}^{e^T}\boldsymbol{N}^T\{\bar{F}_i + \Delta\bar{F}_i\}\mathrm{d}S \tag{13}$$

由上式即得有限元方程

$$\boldsymbol{K}^e\Delta^e = F^e \tag{14}$$

其中，$\boldsymbol{K}^e$ 为单元刚度矩阵，F^e 为单元等效节点载荷，具体形式为

$$K^e = \iiint_{v^e} \boldsymbol{N}^T B^T C_n[\boldsymbol{A}]B\boldsymbol{N}\mathrm{d}V \tag{15}$$

$$F^e = \iiint_{v^e} (\boldsymbol{N}^T B^T(C_n[\boldsymbol{A}]\{\delta_{pq}\alpha\}\Delta T - \{\sigma_{ij}\}) + \boldsymbol{N}^T\{\bar{P}_i + \Delta\bar{P}_i\}\mathrm{d}V - \iiint_{v^e} \boldsymbol{N}^T B^T\{d_n\}\mathrm{d}V + \iint_{S_\sigma^e}\boldsymbol{N}^T\{\bar{F}_i + \Delta\bar{F}_i\}\mathrm{d}S \tag{16}$$

形函数 $\boldsymbol{N}$ 由所选取的单元类型决定，可参阅有限元教材[5]。

3　药柱的分析与讨论

将实际结构按16×22.5°重复结构的一个子块进行有限元剖分，共798个20节点等参元，4715个节点，为以后叙述方便，将结构划分成以下区域：

前槽：指头部 $\theta=22.5°$ 附近的槽形区域。前脱：指头部脱粘前沿的附近区域。

内孔：指内部的直筒段。外边：指与绝热层相邻的外层推进剂的直筒段。

后槽：指尾部 $\theta=22.5°$ 附近的槽形区域。后脱：指尾部脱粘前沿附近区域。

3.1　硫化降温过程中的应力应变分析

考察结构在温度载荷作用下的应力分布。在这种工况下，推进剂的模量为1.0MPa，绝热

层的模量为 2.0MPa，热胀系数均为 $10^{-4}K^{-1}$，泊松比 $\nu=0.49$。弹性分析结果列于表 1，其中所列数据均为 $\frac{3}{\sqrt{2}}\tau_8/(E|\alpha\Delta T|)$，即无量纲化等效应力，$\tau_8$ 为八面体剪应力，计算公式为

$$\tau_8=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)}$$

E 为推进剂的模量 E_p 或绝热层的模量 E_l。

Table 1 Elastic results in various cases

Location		Cooling	Pressure	Acceleration
Front slot	Valley	2.531	0.005605	0.1720
	Max	7.322	0.05119	0.4870
Front degum	Forward	7.137	0.03803	0.5209
	Max	7.137	0.03803	0.5209
Inner hole	Midpoint	8.744	0.04469	0.1557
	Max	8.744	0.04469	0.2724
Outer edge	Midpoint	1.942	0.009604	0.2505
	Max	1.942	0.009804	0.2574
Back slot	Valley	1.449	0.004284	0.4675
	Max	7.109	0.03156	0.9076
Back degum	Forward	8.136	0.04796	0.4015
	Max	8.136	0.04796	0.5120

实际的发动机药柱结构中既有金属铝，也有复合材料外壳，推进剂和绝热层为粘弹性材料。试验得到的推进剂应力松弛模量为

$$E_p(t)=E_e+\sum_{i=1}^{12}E_i\exp(-t/\tau_i)\qquad(\mathrm{MPa})$$

其中，平衡模量 $E_e=1.0$MPa，$\tau_i=10^{-4+i}$，E_i 见表 2，时间的单位为秒。

Table 2 Propellant properties E_i

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}
6.0	5.0	4.0	3.0	2.0	1.0	0.8	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1

计算中取绝热层的模量 $E_l=2E_p$，热胀系数和泊松比与弹性时相同，表 3 表示 4 天内温度降低 20℃ 时三维模型计算的各个区域的应力最大值，其中所列数据为八面体剪应力 τ_8。从表 1 和表 3 中的结果可以发现，在硫化降温过程中：(1) 内孔中点处应力最大，沿环向分布均匀。(2) 前脱和后脱处的应力也很大，在前脱处分布均匀，在后脱处变化剧烈。(3) 前槽和后槽部位的应力变化很大，最大点不在槽的最深处。(4) 外边处的应力都很小，沿环向分布均匀。(5) 随着时间的增加和温度的逐渐降低，前槽区的最大应力发生振荡，其他区域的应力随之增大，但内孔处的最大应力点向头部移动。

Table 3　Stress distribution in cure cooling

Time (day)	Front slot	Front degum	Inner hole	Outer edge	Back slot	Back degum
1	24.310	2.9466	3.1505	0.69526	2.5918	3.0791
2	13.201	5.5894	6.3154	1.3963	5.0385	6.0936
3	33.142	8.1953	9.4492	2.0956	7.6498	9.0714
4	12.758	10.754	12.611	2.7982	10.237	12.026

在应力不是最大而沿环向变化均匀的区域，如前脱和外边处，轴对称实化（以 0°面作对称面）和虚化（以 22.5°面作对称面）模型亦能获得较好的计算精度，但在应力最大的内孔和变化剧烈的前、后槽处，它们的计算结果相去甚远。笔者认为，在硫化降温过程中，若只关心内孔和前脱、后脱处的应力分布，拟用虚化模型代替三维模型。

3.2　内压作用下的应力应变分析

考虑结构在 1MPa 内压作用下的应力分布。推进剂的模量 $E_p=1$MPa，绝热层的模量 $E_l=2$MPa，泊松比 $\nu=0.499$，弹性分析的结果亦列于表 1，其中所列数据均为有效应变 $\frac{3}{\sqrt{2}}\tau_8/E$，$E$ 为 E_p 或 E_l。

表 4 表示结构在 4s 内压力从 0 升至 1MPa 过程中的应力分布。推进剂与绝热层的模量 E_p、E_l 与硫化降温时相同，泊松比与弹性时相同，其中所列数据为八面体剪应力 τ_8。从表 1 和表 4 中的结果可以发现，在承受内压作用时：(1) 内孔处的应变普遍较大，沿环向分布均匀。(2) 前脱附近的应变较大，后脱附近的应变最大。(3) 外边段的应变最小。(4) 随着时间的增加，压力的不断增大，应力也随之增大，分布规律相同并保持不变，即后脱、前脱和内孔区域的应力较大，外边较小。

在应变不是很大而沿环向变化又均匀的区域，如前脱和外边，轴对称实化和虚化模型亦能获得较好的计算精度。但在应变变化大的区域，如内孔段，则计算结果相去甚远。值得一提的是，虚化模型对后脱附近的计算精度也令人满意。笔者认为，在受内压作用下，若只关心内孔和前脱、后脱处的应变分布，拟用虚化模型取代三维模型。

Table 4　Stress distribution in internal pressure

Time (day)	Front slot	Front degum	Inner hole	Outer edge	Back slot	Back degum
1	0.043260	0.043152	0.049552	0.010741	0.033855	0.054579
2	0.084290	0.077735	0.090396	0.019896	0.062063	0.098699
3	0.12476	0.10945	0.12796	0.028014	0.088391	0.13918
4	0.16471	0.13994	0.16337	0.036059	0.11331	0.17754

3.3　轴向过载作用下的应力应变分析

考察结构在轴向过载作用下的应力分布。药的模量为 1MPa，绝热层的模量为 2MPa，密度均为 $\rho=1.8\times10^{-6}$kg/mm^3，泊松比 $\nu=0.49$，过载值 $ng=1$mm/s^2。弹性分析的结果亦列于

表1，其中所列数据均为无量纲化应力 $\tau_8/(\rho ngb)$，τ_8，ρ，ng 已给出，药柱的半径 $b=1200$mm。

表5中示出4s内过载从0增到 $g=9800$mm/s^2 过程中计算的各个区域应力最大值。推进剂与绝热层的模量 E_p，E_l 与3.1，3.2中的相同，密度和泊松比与弹性相同，其中所列数据为八面体剪应力 τ_8。从表1和表5中的结果中可以发现：

(1) 应力最大点在后槽部分，但不在槽的最深处。(2) 前脱区域的应力普遍很大，内孔处的应力普遍较小。(3) 前脱、后脱处的应力沿轴向变化较大而沿环向变化较小。(4) 外边处的应力沿轴向和环向分布都均匀。(5) 随着时间的增加，过载值的增大，应力相应增大，分布规律保持不变。

与3.1节和3.2节中的结果比较，轴向过载作用下的应力分布与内压作用和硫化降温过程中的应力分布有很大差别，特别是外边和内孔区域。

Table 5 Stress distribution in acceleration load

Time (day)	Front slot	Front degum	Inner hole	Outer edge	Back slot	Back degum
1	0.016605	0.018107	0.0098119	0.0089061	0.66216	0.016059
2	0.030738	0.036240	0.019621	0.017826	0.11319	0.033037
3	0.046347	0.054377	0.029406	0.026747	0.14922	0.050416
4	0.062299	0.072506	0.039172	0.035660	0.17926	0.067943

4 结 论

虽然三维分析需耗费大量的人力与财力，但是，对药柱这样复杂的三维结构却是必不可少的。以往的轴对称模型，尽管对某些区域的计算精度能达到与三维时相同，但对于重要的和变化剧烈的区域，却得不到定量的结果，只有通过三维分析，而且有限单元在局部要相当小，所有结果才能令人满意。

参 考 文 献

1 Christenson R M. A nonlinear theory of viscoelasticity for application to elastomers. TRANS of ASME, J of App Mech, 1980, 47: 762～774

2 李录贤. 非线性粘弹性应力应变和接触问题分析:[学位论文]. 西安:西安交通大学, 1994

3 Schapery R A. A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media: theortical development. Int J Fractrue, 1975, 11: 141～159

4 Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. Thrid Edition Pergamon Press, 1982

5 丁浩江, 何福保, 谢贻权等编. 弹性和塑性力学中的有限单元法. 修订本. 北京:机械工业出版社, 1989