1997 年 6 月　　推 进 技 术　　Jun. 1997
第 18 卷　第 3 期　　JOURNAL OF PROPULSION TECHNOLOGY　　Vol. 18　No. 3

液体火箭发动机失效的 Weibull 分布环境因子*

安 伟 光

（哈尔滨工程大学建筑工程系，哈尔滨，150001）

周 源 泉

（北京强度与环境研究所，北京，100076）

摘　要：针对液体火箭发动机，给出了检验天地环境下失效机理是否相同的统计方法，基于这个前提，推导了天地环境因子的极大似然估计，并用数值例说明了这些方法。

主题词：液体推进剂火箭发动机，失效机理，寿命预测，Weibull 分布

分类号：V430

ENVIRONMENTAL FACTOR OF WEIBULL DISTRIBUTION FOR LIQUID ROCKET ENGINE FAILURE

An Weiguang

(Dept. of Architectural Engineering, Harbin Engineering Univ., Harbin, 150001)

Zhou Yuanquan

(Beijing Inst. of Structure and Environment, Beijing, 100076)

Abstract: A statistical method of constant failure mechanism for liquid rocket engines in ground and flight test environments is presented. A maximum likelihood estimate of flight environmental factor is derived. And these methods are illustrated with a numerical example.

Subject terms: Liquid propellant rocket engine, Failure mechanism, Life prediction, Weibull distribution

1 引　言

液体火箭发动机的寿命可用 Weibull 分布描述。在地面试车中可以得到发动机的寿命试验信息。但是，人们更感兴趣的是在飞行试验条件下发动机的寿命特征，这就需要借助于天地环境因子。在飞行试验初期，有可能取得发动机的失效信息，这样根据飞行及地面试车的失效数据，就可能给出天地两种环境下的环境因子。

本文简要指出，分析环境因子的前提是天地两种环境下失效机理不变，并着重给出检验失效机理不变的统计方法。在天地环境的失效机理不变的前提下，推导了环境因子的极大似然估计（MLE），最后用数值例说明了这些方法。

* 收稿日期：19960825，修回日期：19961202

2 环境因子分析的前提及其应用

业已指出，分析环境因子的前提是在所研究的两种不同环境下，产品的失效机理应当相同[1]。这样，利用环境因子进行寿命特征的推算不仅有坚实的物理基础，而且环境因子的应用也更为广泛。对 Weibull 分布环境因子而言，可用于特征寿命，$MTBF$，可靠寿命，失效率等参数的推算。

为方便记较恶劣的飞行环境为环境 1，此时产品的寿命为 T_1，它服从形状参数为 m_1 和特征寿命为 η_1 的 Weibull 分布，简记为 $T_1 \sim W\ (m_1,\ \eta_1)$。同样，记较良好的地面试车环境为环境 2，此时产品的寿命为 T_2，它服从形状参数为 m_2 和特征寿命为 η_2 的 Weibull 分布，简记为 $T_2 \sim W\ (m_2,\ \eta_2)$。文献［1，2］指出，当产品的寿命服从 Weibull 分布时，其失效机理不变的数学表征是不同环境下的形状参数 m_i 相同，即

$$m_1 = m_2 = m \tag{1}$$

环境因子 K 定义为环境 2 与环境 1 在失效机理相同的条件下的 $MTBF$ 之比，即

$$K = MTBF_2/MTBF_1 \tag{2}$$

K 还是给定 R 下，环境 2 与环境 1 下可靠寿命之比，即

$$K = t_{R,2}/t_{R,1} \tag{3}$$

K 也是 $t_{R,i}$处不同环境下失效率之比，即

$$K = \lambda_1(t_{R,1})/\lambda_2(t_{R,2}) \tag{4}$$

显然，在 $m_1 = m_2 = m$ 的条件下，有

$$K = \eta_2/\eta_1 \tag{5}$$

据式（2）～（5），可对 $MTBF$，t_R，$\lambda\ (t)$，η 作出推算。

3 检验失效机理不变的统计方法

在环境 i 下，设产品投试 n_i 台，其中有 r_i 台失效（$2 \leqslant r_i \leqslant n_i$），第 i 个环境下的第 j 次失效的时间记为 t_{ij}，$i=1$，2，$j=1$，r_i。

Weibull 分布形状参数 m_i 的极大似然估计（MLE）为：

$$\hat{m}_i^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{\hat{m}_i} \ln t_{ij} + (n_i - r_i) t_{ir_i} \ln t_{ir_i}}{\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^{\hat{m}_i} + (n_i - r_i) t_{ir_i}} - r_i^{-1} \sum_{j=1}^{r_i} \ln t_{ij}, \qquad i = 1,2 \tag{6}$$

检验失效机理是否相同，可作下述假设：

$$H_0:\ \ m_1 = m_2 = m \leftrightarrow H_1:\ \ m_1 \neq m_2$$

业已指出（见文献［3］或［4］），对 Ⅱ 型截尾或完全样本的情况，m_i 的 MLE $\hat{m}_i$ 之倒数可很好地近似服从下式：

$$\hat{m}_i^{-1} \approx \frac{1}{(h_i + 2) m_i} x_{h_i}^2 \tag{7}$$

式中 $x_{h_i}^2$是自由度为 h_i 的 x^2 分布，h_i 是 n_i 及 r_i/n_i 的函数，其数表见表 1

Table 1 The values of h (r, n) in the formula (7)

		n							
		5	10	20	40	60	80	100	∞
	0.1	—	—	2.0	6.0	10.0	14.1	18.1	0.205n
	0.2	—	2.0	6.2	14.6	23.0	31.5	39.9	0.420n
	0.3	—	4.3	10.9	24.0	37.0	50.1	63.2	0.652n
	0.4	2.2	6.7	15.8	33.8	51.8	69.9	87.9	0.899n
r/n	0.5	3.5	9.1	20.7	44.0	67.3	90.6	113.9	1.165n
	0.6	4.7	11.4	25.8	54.7	83.5	112.3	141.1	1.457n
	0.7	6.0	14.8	32.6	68.1	103.8	139.5	175.0	1.782n
	0.8	7.8	18.5	40.0	83.3	126.4	169.5	212.5	2.155n
	0.9	10.3	23.0	49.0	100.9	153.0	204.9	256.9	2.607n
	1.0	12.9	29.3	62.4	128.2	194.8	257.6	325.5	3.290n

故当 $m_1=m_2=m$ 时，

$$F^* = \left(\frac{h_1+2}{h_1\hat{m}_1}\right) \Big/ \left(\frac{h_2+2}{h_2\hat{m}_2}\right) \approx GF_{h_1,h_2} \tag{8}$$

式中 GF_{h_1,h_2}是自由度为 h_1，h_2 的广义 F 分布，其子分位数 $GF_{h_1,h_2,\gamma}$可用 Paulson-Takeuchi 近似计算：

$$GF_{h_1,h_2,\gamma} = \left\{\frac{(1-a)(1-b)+u_\gamma\sqrt{(1-a)^2b+(1-b)^2a-abu_\gamma^2}}{(1-b)^2-bu_\gamma^2}\right\}^3 \tag{9}$$

式中 u_γ 是标准正态分布的 γ 分位数，而

$$a = z/(9h_1), b = 2/(9h_2)$$

当

$$GF_{h_1,h_2,\alpha/2} \leqslant F^* \leqslant GF_{h_1,h_2,1-\alpha/2} \tag{10}$$

则不能拒绝 H_0，应继续进行环境因子分析，否则拒绝 H_0，终止环境因子分析。式（10）中，α 是该检验的显著性水平，通常可取 $\alpha=0.1$。

4 环境因子 K 的极大似然估计 $\hat{K}$

对 $T_i \sim W$ (m_i, η_i)，其密度及可靠度为：

$$f_i(t) = m\eta_i^{-m}t^{m-1}\exp[-(t/\eta_i)^m], R_i(t) = \exp[-(t/\eta_i)^m]$$

对环境 i，Ⅱ型截尾数据为：样本大小为 n_i，截尾数为 r_i，失效时间为 t_{i1}，t_{i2}，…，t_{ir_i}，($2\leqslant r_i\leqslant n_i$)。则环境 1 及 2 下试验结果的联合似然函数 $L=L_1$，L_2，而

$$L_i = \left[\prod_{j=1}^{r_i} f_i(t_{ij})\right][R_i(t_{ir_i})]^{n_i-r_i} =$$

$$\left[\prod_{j=1}^{r_i} m\eta_i^{-m}t_{ij}^{m-1}\mathrm{e}^{-(t_{ij}/\eta_i)^m}\right]\cdot\left[\mathrm{e}^{-(t_{ir_i}/\eta_i)^m}\right]^{n_i-r_i}=$$

$$m^{r_i}\eta_i^{-mr_i}\left(\prod_{j=1}^{r_i}t_{ij}^{m-1}\right)\exp\left[-\frac{\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^m+(n_i-r_i)t_{ir_i}^m}{\eta_i^m}\right]$$

故 $\ln L=(r_1+r_2)\ln m-m(r_1\ln\eta_1+r_2\ln\eta_2)+(m-1)\cdot$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{r_i}\ln t_{ij}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^m+(n_i=r_i)t_{ir_i}^m}{\eta_i^m} \tag{11}$$

因

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\eta_i}=-\frac{mr_i}{\eta_i}+\frac{\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^m+(n_i-r_i)t_{ir_i}^m}{\eta_i^m}(m\eta_i^{-1})=0$$

故

$$\hat{\eta}_i=\left(\frac{\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^{\hat{m}}+(n_i-r_i)t_{ir_i}^{\hat{m}}}{r_i}\right)^{\frac{1}{\hat{m}}},i=1,2 \tag{12}$$

又因

$$\frac{\partial\ln L}{\partial m}=\frac{r_1+r_2}{m}-(r_1\ln\eta_1+r_2\ln\eta_2)+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{r_i}\ln t_{ij}-$$

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^m\ln t_{ij}+(n_i-r_i)t_{ir_i}^m\ln t_{ir_i}}{\eta_i^m}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^m+(n_i-r_i)t_{ir_i}^m}{\eta_i^m}\ln\eta_i=0$$

将 $\partial\ln L/\partial\eta_i=0$ 代入上式，可得：

$$(r_1+r_2)/m+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}\ln t_{ij}-\sum_{i=1}^{2}\frac{r_i\left[\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^m\ln t_{ij}+(n_i-r_i)t_{ir_i}^m\ln t_{ir_i}\right]}{\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^m+(n_i-r_i)t_{ir_i}^m}=0$$

故 m 的 MLE $\hat{m}$ 由下式确定：

$$\hat{m}^{-1}=\left\{\sum_{i=1}^{2}\frac{r_i\left[\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^{\hat{m}}\ln t_{ij}+(n_i-r_i)t_{ir_i}^{\hat{m}}\ln t_{ir_i}\right]}{\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}^{\hat{m}}+(n_i-r_i)t_{ir_i}^{\hat{m}}}-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{r_i}\ln t_{ij}\right\}\Big/(r_1+r_2) \tag{13}$$

由式 (13) 求 $\hat{m}$，需迭代求解，为确保收敛，可采用 Brent 迭代，并将迭代的搜索范围尽可能地放宽，而将迭代精度给得足够高，就可得到精确的 $\hat{m}$，再由式 (12) 求出 $\hat{\eta}_i$。而环境因子 K 的 MLE 为：

$$\hat{K}=\hat{\eta}_2/\hat{\eta}_1 \tag{14}$$

5 数值例

例：某液体火箭发动机在飞行环境下的 Ⅱ 型截尾信息为：$n_1=10$，$r_1=5$，$t_{ij}=101.5$，

153.9，210.8，212.3，225.6。该型发动机在地面试车中的Ⅱ型截尾信息为：$n_2=15$，$r_2=6$，$t_{ij}=183.3$，199.3，262.7，272.6，274.2，289.1。已知它们的寿命都服从 Weibull 分布，试问天地两种环境下，其失效机理是否相同。若相同，试求形状参数以及环境因子 K 的 MLE$\hat{m}$ 及 $\hat{K}$。

解：检验天地两种环境下该发动机的失效机理是否相同，即检验假设

$$H_0:\quad m_1 = m_2 = m \leftrightarrow H_1:\quad m_1 \neq m_2$$

查 h（r，n）表并插值可得：

$$n_1 = 10, r_1 = 5, r_1/n_1 = 0.5, h_1 = 9.1$$

$$n_2 = 15, r_2 = 6, r_2/n_2 = 0.4, h_2 = 11.25$$

按式（6）编制迭代程序可求得：

$$\hat{m}_1 = 4.23584, \hat{m}_2 = 6.37701$$

则

$$F^* = \left(\frac{h_1 + 2}{h_1\hat{m}_1}\right) \Big/ \left(\frac{h_2 + 2}{h_2\hat{m}_2}\right) = 1.55918$$

对 $\alpha=0.1$，$u_{1-\alpha/2}=1.644854$，由式（9）可算得：

$$GF_{h_1,h_2,0.95} = 2.86754, GF_{h_1,h_2,0.05} = 0.324247,$$

因

$$GF_{h_1,h_2,0.05} < F^* < GF_{h_1,h_2,0.95},$$

故不能拒绝 H_0，即可认为天地两种环境下该型发动机的失效机理相同。

求 $\hat{m}$，$\hat{K}$，

根据（13），用 Brent 迭代编制计算机程序，可得：$\hat{m}=5.17724$，将 $\hat{m}$代入式（12），可算得：$\hat{\eta}_1=244.528$，$\hat{\eta}_2=332.344$，故 $\hat{K}=\hat{\eta}_2/\hat{\eta}_1=1.359$。

本例的原始数据是用 Monte Carlo 方法产生的，其中取 $T_1 \sim W$（3.4，300），$T_2 \sim W$（3.4，450），故 $K=1.5$。相比可知，$\hat{K}$有一定的精度。

参 考 文 献

1 周源泉，翁朝曦，叶喜涛．论加速系数与失效机理不变的条件（Ⅰ）——寿命型随机变量的情况．系统工程与电子技术，1996（1）：55～67

2 Nelson W. Accelerated testing. Wiley，1990

3 Tawless J F. Statistical models and methods for lifetime data. Wiley，1982

4 周源泉，翁朝曦．可靠性评定．北京：科学出版社，1990