

2 基本方程组的分数步法和数值方法

轴对称喷管流动问题的控制方程为二维轴对称坐标系 (x, y) 下的 N-S 方程, 将 $P = \ln(p)/\gamma$ 、 u 、 v 、 S 为变量的无量纲非守恒形式作坐标变换, 并以变换后的对流项依照流动信息的传播方向分解成为特征的形式, 则基本方程组可以写成

$$\begin{cases} a \frac{\partial P}{\partial t} + f_1^X + f_2^X + f_2^Y + f_4^Y + f_5^Y - f_3^Y + f_1^L = aS_p \\ \frac{\partial u}{\partial t} + f_1^X - f_2^X + f_4^Y - f_5^Y = S_u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f_1^Y - f_2^Y + f_3^X = S_v \\ \frac{\partial S}{\partial t} + f_7^X + f_7^Y = S_s \end{cases}$$

式中 $f_{1,2}^X$ 、 $f_{1,2}^Y$ 、 $f_{4,5}^Y$ 分别代表着广义黎曼量沿各自波特征的信息流, $\lambda_{1,2}^X$ 、 $\lambda_{1,2}^Y$ 、 $\lambda_{4,5}^Y$ 和 λ_3^X 、 λ_3^Y 为特征值^[5], 其符号代表着特征信息传播的方向。

2.1 无粘步: $t^n \rightarrow t^{n+\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} (P^{n+\frac{1}{2}} - P^n)/\Delta t = - (f_1^X + f_2^X + f_1^Y + f_2^Y + f_4^Y + f_5^Y - f_3^Y + f_1^L)^n/a^n \\ (u^{n+\frac{1}{2}} - u^n)/\Delta t = - (f_1^X - f_2^X - f_4^Y - f_5^Y)^n \\ (v^{n+\frac{1}{2}} - v^n)/\Delta t = - (f_1^Y - f_2^Y - f_3^X)^n \\ (S^{n+\frac{1}{2}} - S^n)/\Delta t = - (f_7^X + f_7^Y)^n \end{cases}$$

用高效 Euler 算法解以上非守恒型 Euler 方程组, 这是两层三点显式 λ 格式, 精度为时间二阶, 空间二阶, Courant 数可达 2, 具有精度高收敛快的特点, 该算法的有关细节可参阅文献 [4, 5]。

2.2 粘性步: $t^{n+\frac{1}{2}} \rightarrow t^{n+1}$

利用 $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{(\gamma-1)T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}$ 把 S 方程变为 T 的关系式

$$\begin{cases} (P^{n+1} - P^{n+\frac{1}{2}})/\Delta t = (S_p)^n + 1 \\ (u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}})/\Delta t = (S_u)^n + 1 \\ (v^{n+1} - v^{n+\frac{1}{2}})/\Delta t = (S_v)^n + 1 \\ (T^{n+1} - T^{n+\frac{1}{2}})/\Delta t = \gamma(TS_p)^n + 1 \end{cases}$$

除了第一式外, 各式都可以写成如下隐格式形式

$$(\phi^{n+1} - \phi^{n+\frac{1}{2}})/\Delta t = [X_x \frac{\partial}{\partial X} (\Gamma_x X_x \frac{\partial \phi}{\partial X} + \Gamma_y Y_x \frac{\partial \phi}{\partial Y} +$$

$$Y_x \frac{\partial}{\partial Y} (\Gamma_x X_x \frac{\partial \phi}{\partial X} + \Gamma_x Y_x \frac{\partial \phi}{\partial Y}) + \frac{Y_y}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} (y \Gamma_y Y_y \frac{\partial \phi}{\partial Y}) / \rho^{n+\frac{1}{2}} + R_\phi^{n+\frac{1}{2}}$$

右端 [] 内导数项在 t^{n+1} 层展开成差分, 得到九对角系数矩阵的差分方程组。第一式与其余三式不耦合, 迭代出 $(u, v, T)^{n+1}$ 后, 可直接算出 P^{n+1} 。

3 边界条件的处理

采用无粘-粘性分步法, 无粘步的方程不再是空间椭圆型, 各个边界条件的提法要根据边界特征量的流入量来决定^[6], 已和原方程不同, 故中间步上某些变量的边界值要由差分方程计算得到, 而不是给定边界条件。粘性步仍是空间椭圆型, 各边界上应给四个边界条件, 其提法应与无粘步的边界条件相匹配, 使整步满足 N-S 方程组所有边界条件。

3.1 进口边界条件

超音进口点, 无粘步、粘性步和原方程均给四个边界条件: 给定 p 、 u 、 v 、 T 。亚音进口点, 无粘步提三个边界条件: 给定 p^* 、 T^* 、 v 。粘性步先由给定的 u 的速度型和已算得的进口流量算各点 u 的新值 u^{n+1} , 再由

$$T^* = \text{const.}; \partial T / \partial t + [(\gamma - 1)/2][\partial(u^2)/\partial t] = 0$$

$$p^* = \text{const.}; \partial p / \partial t = [1/(\gamma - 1)T](\partial T / \partial t)$$

$$v = \text{const.}; \partial v / \partial t = 0$$

三式得到 p 、 T 、 v 的新值 $(p, T, v)^{n+1}$ 。两步合成为原方程的四个边界条件: 给定 p^* 、 T^* 、 v 及给定 u 的速度型。

3.2 远下游边界条件

超音点, 无粘步不给边界条件; 粘性步和原方程均为四个边界条件:

$$\partial P / \partial x = \partial u / \partial x = \partial v / \partial x = \partial T / \partial x = 0$$

亚音点, 无粘步的一个边界条件为给定 p 。

粘性步和原方程均为给四个边界条件: 给定 p 和 $\partial u / \partial x = \partial v / \partial x = \partial T / \partial x = 0$

3.3 壁面边界条件

无粘步为滑移条件, 一个边界条件: 法向速度为零, 即: $V = Y_x u + Y_y v = 0$

粘性步和原方程均为无滑移条件, 提四个边界条件: $u = v = 0$, $\partial T / \partial n = \partial p / \partial n = 0$ (n 为法线方向)。为了实现滑移边界到无滑移边界的过渡, 差分格式在壁面边界点上添加了 q_u 、 q_v 的项处理 u 、 v 的第一类边界条件。

4 计算结果

给出了用无粘-粘性分数步法模拟轴对称收缩喷管内外流动的跨音紊流流场的数值结果, 两个算例的喷管落压比与来流 M 数分别为 4.67、0.8 和 6.9、1.2。采用 Baldwin-Lomax 代数紊流模型, 雷诺数为 10^6 。为使滑流层附近有较密的网格, 迭代中喷管出口外采用的动网格。算例的网格为 42×24 , 在 486 微机上迭代约 500 次收敛, 用机时约 20min。

图 1~3 和图 4~6 分别为两组落压比和来流 M 数时的等 M 数分布图、等压分布图、等涡量分布图。图中边框标注的几何尺寸是以喷管出口半径为特征量的无量纲尺寸。

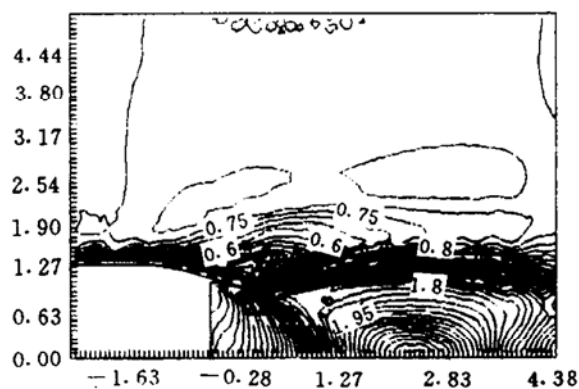


Fig. 1 Mach number contour (1)

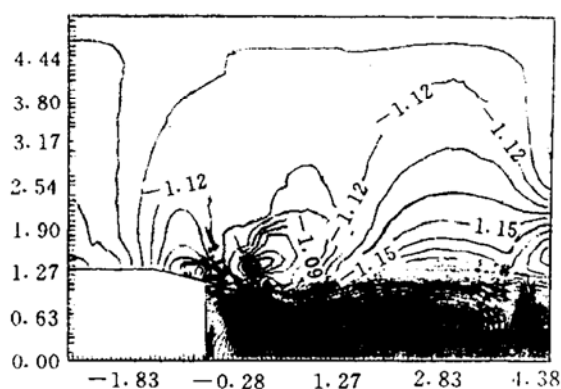


Fig. 2 Pressure contour (1)

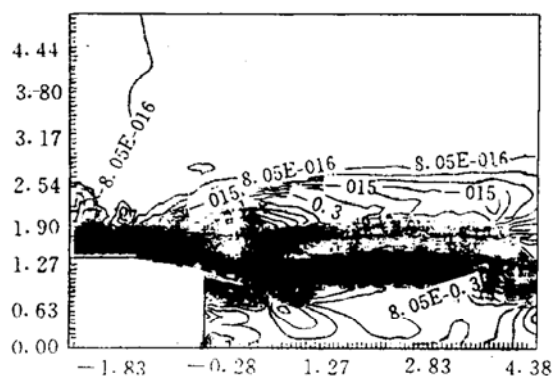


Fig. 3 Vorticity contour (1)

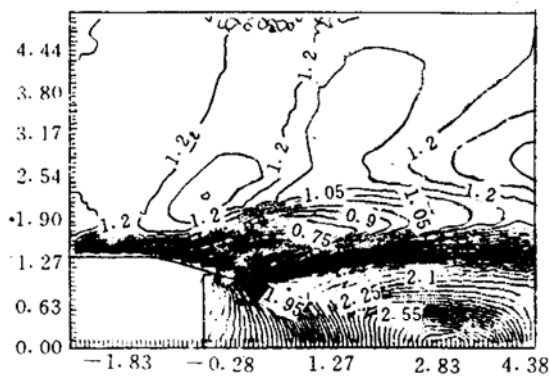


Fig. 4 Mach number contour (2)

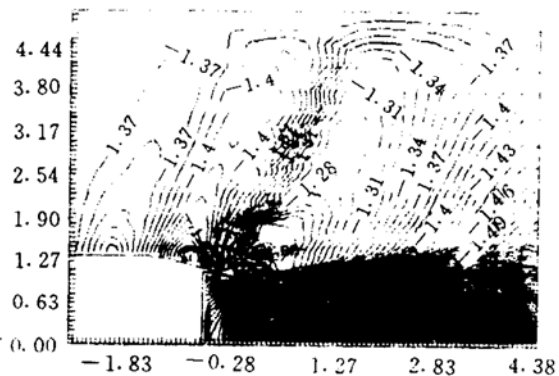


Fig. 5 Pressure contour (2)

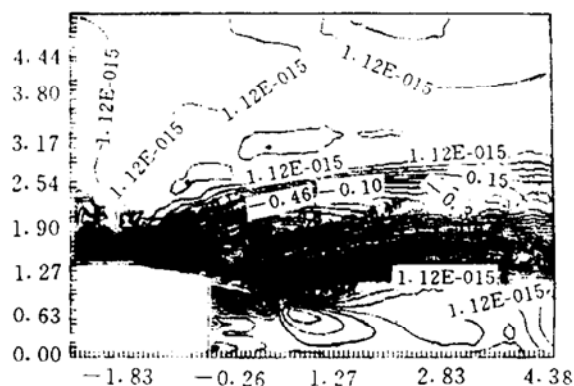


Fig. 6 Vorticity contour (2)

5 结 论

(1) 按物理过程分解的无粘-粘性分数步法是一种较好的分步方法,利用它能够应用各种收敛快精度高的 Enler 算法来数值求解可压缩 N-S 方程。

(2) 采用无粘-粘性分数步法,无粘步用全显格式,粘性步用全隐格式,能够很好得解决由分步法引起的时间不相容性,且能保持较快的收敛速度。

(3) 无粘-粘性分步会引起方程类型的改变,因此必须改变边界条件的提法,带来空间不相容性。能否处理好这个问题是数值模拟成败的关键,还要做许多的工作。

(下转至第68页)

(2) 电动气阀的入口气压是反力因素之一, 气压越大则反力越大, 吸力在衔铁触动之前, 不受入口气压的影响, 衔铁触动时间、吸动时间、触动电流、运动过程中的峰值电流随气压的增大而增大, 衔铁触到之后, 吸力随气压的增大而减小, 运动速度随气压的增大而减小, 且行程末速度将增大, 缩短了电磁铁的机械寿命。可见, 在使气动液阀可靠工作的条件下, 适当减小入口气压有利于提高电动气阀的响应能力, 有利于延长其机械寿命。

弹簧预紧力也是反力因素之一, 此力越大则反力越大。吸力在衔铁触动之前, 不受弹簧预紧力的影响, 衔铁触动时间、吸动时间随弹簧预紧力的增大而增大。触动之后, 吸力随弹簧预紧力的增大而减小, 运动速度随弹簧预紧力的增大而减小但行程末速度略有增大。可见, 在保证电动气阀关闭时可靠密封的条件下, 适当减小弹簧预紧力有利于提高电动气阀的响应能力。

参 考 文 献

- 1 长沙工学院103教研室. 液体火箭发动机电磁阀设计. 长沙:1977
- 2 费鸿俊, 张冠生编. 电磁机构动态分析与计算. 北京:机械工业出版社, 1993

(上接第42页)

参 考 文 献

- 1 雅宁柯 H H. 分数步法. 北京:科学出版社, 1992
- 2 Kovenya V M, Yanenko N N. The splitting method for the numerical solution of problems in gas dynamics. Numerical Methods in Fluid Dynamics, MIR Publishers Moscow, 1984
- 3 Dwoyer D L, Thames F C. Accuracy and stability of time-split finite-difference schemes. AIAA paper 81-1005
- 4 Moretti G. A technique for integrating two-dimensional fluid equation. Comp. & Fluids, 1987, 15(1): 59~75
- 5 余少志, 林峰. 三维流动高效欧拉方程解法——数学形式和物理内涵. 航空科学基金论文集-1, 1992
- 6 Moretti G. A physical approach to the numerical treatment of boundaries in gas dynamics. NASA-CP-2201, 1981