

固体推进剂体积松弛模量的数值解法*

高 鸣

(海军驻西安长峰机电研究所军代表室, 西安, 710061)

摘 要: 以粘弹理论为基础, 采用拉氏逆变换和数值积分的方法, 推导出由拉伸松弛模量 $E(t)$ 、粘弹泊松比 $\nu(t)$ 计算固体推进剂体积松弛模量 $K(t)$ 的计算公式和数值解法。计算结果表明, 由该方法计算的 $K(t)$ 值和实验得到的 $K(t)$ 值一致, 且该方法简单、实用、方便、精度高。

主题词: 固体推进剂, 粘弹性, 体积弹性模量, 数值计算

分类号: V512.1

A NUMERICAL CALCULATION METHOD OF BULK RELAXATION MODULUS FOR SOLID PROPELLANT

Gao Ming

(Navy Representative Office in Xi'an Chang Feng Electro-Mechanical Inst., Xi'an, 710061)

Abstract: On base of viscoelastic theory and using inversion of the Laplace transform and numerical calculation method, a formation and a numerical solution for bulk relaxation modulus $K(t)$ from stress tension modulus $E(t)$ and viscoelastic poisson ratio $\nu(t)$ are obtained. The calculation results show good agreement with experimental data $K(t)$. The method is very simple and accurate.

Subject terms: Solid propellant, Viscoelasticity, Bulk moduls, Numerical calculation

1 引 言

药柱在导弹发动机中承受三向内压作用而产生体积形变。因此, 要研究和预估发动机药柱在点火和工作过程中的强度和性能, 必须首先研究药柱在三向内压作用下抵抗变形的能力, 即体积松弛模量 $K(t)$ 的大小。本文利用粘弹对应性原理将弹性常数之间的“乘积”关系用“卷积”代替, 建立了粘弹性间粘弹积分变换表达式。采用拉氏逆变换和数值积分的方法, 研究和推导了在小变形、各向同性、线性粘弹材料的范围内由 $E(t)$ 、 $\nu(t)$ 转换计算 $K(t)$ 的新算法, 求解并计算了推进剂体积松弛模量 $K(t)$ 值。为了能精确地描述边界条件和使用程序的通用性, 又用固体推进剂的实验值对计算结果进行了检验。结果表明, 计算值和实验值相符。同时, 采用变化范围较大的时间来计算, 这样做更便于严格考验计算方法和程序的功能以及适用范围。

2 $K(t)$ 积分方程及其边界条件

弹性体的拉伸弹性模量 E 、体积松弛模量 K 和泊松比 ν 之间的关系式为:

$$\nu = (3K - E)/(6K) \quad (1)$$

* 本文1995年5月19日收到

对线性弹性体, 依据粘弹对应原理^[1~3], (1) 式经拉氏变换, 并求拉氏逆变换, 最后由卷积定理可得:

$$K(t) - 2 \int_0^t \gamma(t-\tau) \frac{\partial K(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{E(t)}{3} + 2\nu(t)K(0) \quad (2)$$

(2) 式就是建立的体积松弛模量方程, 若已知推进剂的 $E(t)$ 和 $\nu(t)$ 的实验值, 即可由 (2) 式求出推进剂 $K(t)$ 值。

玻璃态边界条件: (2) 式中 $K(0)$ 是在 $t=0$ 时即玻璃态时的体积松弛模量, 可认为是瞬时弹性态, 此时的边界条件为:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E(t)}{3(1-2\nu(t))} = K(0) \quad (3)$$

平衡态边界条件: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $K(\infty)$ 为平衡态体积松弛模量, 此时完全松弛, 也可以认为是弹性体, 边界条件为:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(t)}{3(1-2\nu(t))} = K(\infty) \quad (4)$$

3 数值积分

令 $K(t) = y(t)$; $q(t) = \frac{E(t)}{3} + 2\nu(t)K(0)$; $\nu(t-\tau) = A(t-\tau)$; $\lambda = 2$ 。则上式可写为 Volterra 积分方程:

$$y(t) - \lambda \int_0^t A(t-\tau) \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} d\tau = q(t)$$

若已知 λ 、 $A(t-\tau)$ 、 $q(t)$, 为了求解 $y(t)$ 的数值积分, 可设如下形式的 Volterra 积分方程:

$$y(t) - \lambda \int_0^t y(\tau) \frac{\partial A(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau = q(t) \quad (5)$$

则式 $y(t)$ 可通过数值积分计算求解。

$$\text{设 } I = \int_0^t y(\tau) \frac{\partial A(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (6)$$

则有

$$\begin{aligned} I_{j+1} &= \int_{t_1}^{t_{j+1}} y(\tau) \frac{\partial A(t_{j+1}-\tau)}{\partial \tau} d\tau = \sum_{k=1}^j \int_{t_k}^{t_{k+1}} y(\tau) \frac{\partial A(t_{j+1}-\tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ &= \sum_{k=1}^j \frac{1}{2} (y_{k+1} + y_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial A(t_{j+1}-\tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^j (y_{k+1} + y_k) [A(t_{j+1}-t_{k+1}) - A(t_{j+1}-t_k)] \quad j \geq 1 \end{aligned} \quad (7)$$

由式 (6) 可知 $I_1 = I(0) = 0$, 故式 (5) 可写为:

$$y_{j+1} - \lambda \int_{t_1}^{t_{j+1}} A(t_{j+1}-\tau) \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} d\tau = q_{j+1} \quad (8)$$

将式 (7) 代入式 (8), 经变换得:

$$y_{j+1} = \frac{q_{j+1} + \frac{\lambda}{2} y_j [A(0) - A(t_{j+1} - t_j)]}{1 - \frac{\lambda}{2} [A(0) - A(t_{j+1} - t_j)]} + \frac{\frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{j-1} (y_{k+1} + y_k) [A(t_{j+1} - t_{k+1}) - A(t_{j+1} - t_k)]}{1 - \frac{\lambda}{2} [A(0) - A(t_{j+1} - t_j)]} \quad (9)$$

当 $j=1$ 时, 则

$$y_2 = \frac{q_2 + \lambda y_1 [A(0) - A(t_2 - t_1)] + \frac{\lambda}{2} (y_1 + y_0) [A(t_2 - t_1) - A(t_2 - t_0)]}{1 - \frac{\lambda}{2} [A(0) - A(t_2 - t_1)]} \quad (10)$$

当 $j=0$ 时, 则

$$y_1 = K(0) = E(0) / \{3[1 - 2\nu(0)]\} \quad (11)$$

并给 t_0 、 t_1 赋初值 (含 y_0)。

上面式 (9)、式 (10) 和式 (11) 是数值积分计算 y 值的迭代公式。上式 (11) 得 y_1 , 代入式 (10) 得 y_2 , 再代入式 (9) 可得 $y_3, y_4, \dots, y_{i+1}$ 。

这样, 我们通过实际问题的数学演变, 求解积分方程, 得出该积分方程的数值解, 从而解决了由 $E(t)$ 和 $\nu(t)$ 值求 $K(t)$ 值的问题。

4 实际算例

我们用以上推导的算法, 取国内公开发表的^[4]CSP-8 推进剂的 $E(t)$ 、 $\nu(t)$ 实验来计算其 $K(t)$ 值, 并用自己实验得到的 $K(t)$ 值^[5]与其比较 (见表 1)。

Table 1 Comparison of the computational results $K(t)$ with experimental data $K(t)$

i	t (s)	$E(t) / (\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$ (Given value)	$\nu(t)$ (Given value)	$K(t) / (\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$ (Calculation)	$K(t) / (\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$ (Experimentation)
0	1	2.50×10^6	0.49978	1.862×10^9	—
1	10	2.44×10^6	0.49981	1.860×10^9	—
2	50	2.11×10^6	0.49983	1.851×10^9	—
3	100	1.97×10^6	0.49984	1.845×10^9	1.835×10^9
4	500	1.74×10^6	0.49985	1.818×10^9	—
5	1000	1.50×10^6	0.49987	1.784×10^9	1.781×10^9
6	2000	1.12×10^6	0.49989	1.736×10^9	1.730×10^9
7	3000	0.88×10^6	0.49996	1.685×10^9	1.682×10^9

由表 1 可以看到, $K(t)$ 的计算值与实验值相符, 这说明采用数值积分和拉氏逆变换求解固体推进剂体积松弛模量精度高, 而且简单、实用、适用性强。尤其是在计算中 t 的取值范围可大可小, 这不仅使计算程序和计算方法的通用性得到了考验。而且为简化实验、开发实验、揭示固体推进剂体积形变的规律性, 提供了新的研究途径和计算方法。

参 考 文 献

- 1 Swanson S R. Approximate Laplace transform investigation in dynamic viscoelasticity. J Appl Mech, 1980, 47: 769
- 2 克里斯坦森普 R M, 郝松林, 老亮译. 粘弹性力学引论. 北京: 科学出版社, 1980
- 3 黄乃建. 粘弹性力学原理及其对固体推进剂应力分析之应用. 北京工业学院, 1981
- 4 赵伯华. 体积模量和粘弹泊松比实验. 北京理工大学, 1991
- 5 高鸣. 固体推进剂粘弹力学特性及其转换关系研究: [硕士论文]. 北京: 北京理工大学, 1992

简 讯

巡航导弹和遥控无人驾驶侦察机

1994 年, 法国决定研制巡航导弹, 这就是马特拉公司的 Apache 导弹, 与此同时, 美国打算给出一个战斧导弹的后继型号。但对 TSSAM 导弹计划进行隐射技术研究的几个步骤后, 年初他们又回到了比较实际的机载导弹 JASSM 的研究。英国进行了 CASOM 远程导弹的研究。该导弹的目的是摧毁位于 300 km 以外的投弹点。

在无人机研制方面, 去年 6 月, 美国公开了它的 Darkstar 隐身遥控无人驾驶飞机震惊了世界上的武器专家。该机重 4 t, 航程 1800 km, 由洛克西德和波音公司制造, 在这之前一直处于保密状态。与此同时, 他们还进行了“Tierllt”计划的研究。该飞行器是一个重 9 t, 能够在 8 小时之内飞越位于 5000 km 上空的基地观测区。

这些计划给出了组成未来空中无人驾驶飞机阵营的画面, 适合于美洲。轻型遥控无人驾驶飞机不需要大型的地面设施, 也不需要航空基地, 是欧洲最重要的计划, 从 1998 年开始, 将有 115 架飞机, 13 个系统服役。

(郭振玲供稿)