

旋转矩形通道中粘性流动的数值模拟*

朱祚金 刘明侯 陈义良

(中国科学技术大学热学与能量工程系, 合肥, 230026)

摘 要: 通过有限差分方法 (MAC-AF1) 求解时间相关的 Navier-Stokes 方程, 对旋转矩形通道中粘性流动进行了数值研究, 旋转轴方向与主流方向垂直, 给出了充分发展时矩形通道中的二次流结构及主流速度分布, 得到的数值解与实验吻合良好。

主题词: 旋转, 通道, 二次流, 数值模拟

分类号: O376

NUMERICAL SIMULATION OF VISCOUS FLOW IN ROTATING RECTANGULAR DUCTS

Zhu Zuojin Liu Minghou Chen Yiliang

(Dept. of Thermal Science and Energy Engineering,
Univ of Science and Technology of China, Hefei, 230026)

Abstract: In this paper, in order to take the numerical simulation of fully developed viscous flow in a rotating rectangular duct, numerical algorithm MAC-AF1 is employed to solve primitive incompressible unsteady Navier-Stokes equation. The numerical results contain secondary flow structures and velocity profiles along the horizontal centreline and the vertical centreline of the duct, existing experimental with numerical results is quite favourable.

Subject terms: Gyration, channel, Secondary flow, Numerical simulation

1 引 言

在旋转矩形通道中产生二次流的原因有: 湍流、哥氏力、端面运动等, 陈义良^[1]曾研究过湍流诱发的二次流。现在我们采用与文献 [2] 中不同的数值计算方法研究哥氏力产生的二次流。本文采用 NAC-AF1^[3]方法, 通过求解原始变量的非定常 Navier-Stokes 方程, 其中压力 Poisson 方程用近似因子分解法 AF1 迭代求解。对旋转矩形通道中的二次流和滚动涡不稳定性进行了数值模拟。给出了充分发展时矩形通道中的二次流结构及主流速度分布, 得到的数值解与实验吻合良好。

* 本文 1994 年 11 月 1 日收到

2 数学物理方程

图 1 所示的流体在旋转矩形通道中作不可压粘性流动, 其中旋转轴与主流方向垂直, 在流动达到充分发展时, 可以假定主流方向的压力梯度为常数, 即:

$$\partial p / \partial x = -G \quad (2.1)$$

当 $\Omega=0$ 时, 矩形通道中的流动只有主流方向的分速不为零,

$$\vec{V} = \{0, 0, w(x, y)\} \quad (2.2)$$

且 w 满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 w = -G/\mu \quad (2.3)$$

其中 μ 是流体粘性系数, 利用边界无滑移条件, 求解方程 (2.3) 就可以得到 w 在横截面上分布。但是当系统在旋转 ($\Omega \neq 0$) 时, 矩形通道中出现了二次流, 速度矢量为:

$$\vec{V} = \{u(x, y), v(x, y), w(x, y)\} \quad (2.4)$$

其中 u, v 为横截面上的二次流的速度分量。在旋转坐标系中流体的流动可以用如下方程描述:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \gamma \nabla^2 \vec{V} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} \quad (2.5a)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.5b)$$

其中 ρ 为流体密度, $\gamma = \mu/\rho$ 是运动粘性系数, $\vec{\Omega} = \Omega \vec{j}$ 为坐标系旋转速率矢量, 方程 (2.5a) 中的离心力已经吸收到压力梯度中去了。利用流动达到充分发展的假定, 方程 (2.5a), (2.5b) 可以写成如下形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \nabla^2 u - 2\Omega w \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \nabla^2 v \quad (2.6b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = G/\rho + \gamma \nabla^2 w + 2\Omega u \quad (2.6c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.6d)$$

如果选择矩形通道在 x 方向的宽度 D 作为特征长度, 进口的平均速度 w 作为特征速度, 将方程 (2.6) 无量纲化, 现在设想把主流方向的分速分成两部分, 其中一部分是 $\Omega=0$ 时, 主流方向的分速 w_b , 另一部分是当 $\Omega \neq 0$ 时, 引起的变化量 w^*

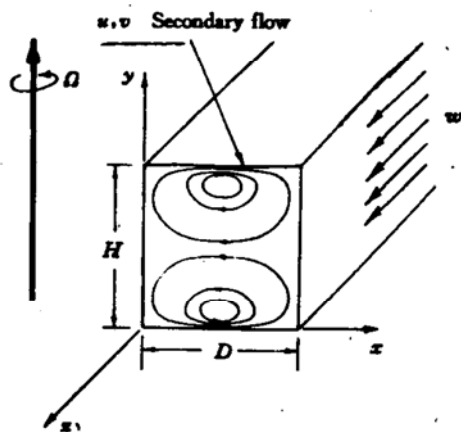


Fig. 1 Flow in a rotating rectangular channel

$$w = w^* + w_B \quad (2.7a)$$

$$\nabla^2 w_B = -Re\,c = -c_r \quad (2.7b)$$

其中 $c = GD/(\rho w_0^2)$ 为无量纲化的压力梯度, $Re = \rho w_0 D/\mu$ 为 Reynolds 数。将方程 (2.7) 代入方程 (2.6), 并引进涡量

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.7c)$$

可得无量纲化的流动控制方程:

$$\frac{\partial w^*}{\partial t} + u \frac{\partial w^*}{\partial x} + v \frac{\partial w^*}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 w^* + \frac{u}{Ro} - u \frac{\partial w_B}{\partial x} - v \frac{\partial w_B}{\partial y} \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\omega = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \frac{1}{Ro}(w^* + w_B) \quad (2.8b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - u\omega = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v \quad (2.8c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.8d)$$

其中 ϕ 无量纲化的总压,

$$\phi = p/(\rho w_0^2) + (u^2 + v^2)/2 \quad (2.9a)$$

Ro 为 Rossby 数, E 为 Ekman 数

$$Ro = \frac{w_0}{2\Omega D}, E = \frac{\nu}{2\Omega D^2} \quad (2.9b)$$

求解方程 (2.8) 时采用无滑移边界条件, 即在壁面上

$$u = 0, v = 0, w = 0 \quad (2.10)$$

3 数值求解方法

首先求解 $\Omega = 0$ 时, 流动充分发展时的流速 w_B , 采用近似因子分解方法 AF1 解方程 (2.7b) 可以得到 w_B 。当截面高宽比 $h/D = 2$ 时, 取 $C_r = 17.5$; 而当 $h/D = 8$ 时, 取 $C_r = 12.5$ 。在求方程 (2.7b) 时, 采用边界无滑移条件。

在求解流动基本方程 (2.8) 时, 采用如图 2 所示的均匀交错网格, 方程 (2.8b), (2.8c) 用 MAC 方法^[4]求解, 采用时间分裂格式, 先解方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\omega + \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \frac{1}{Ro}(w^* + w_B) = F_u \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = u\omega + \frac{1}{Re} \nabla^2 v = F_v \quad (3.1b)$$

后解方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3.2b)$$

根据二阶精度的 Adams 积分公式, 从方程 (3.1) 求得中间二次流速度

$$\bar{u}_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + \Delta t \cdot (3F_{ij}^n - F_{ij}^{n-1})/2 \quad (3.3a)$$

$$\bar{v}_{ij}^{n+1} = v_{ij}^n + \Delta t \cdot (3F_{ij}^n - F_{ij}^{n-1})/2 \quad (3.3b)$$

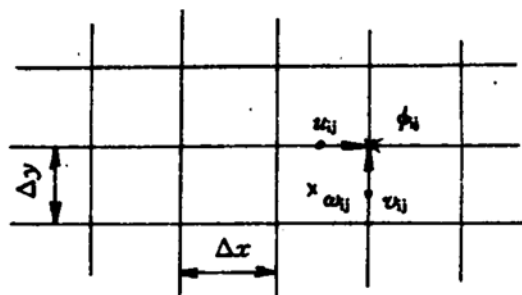


Fig. 2 Staggered grid system

对 (3.1) 中的空间导数采用二阶中心差分格式, 涡量放在压力网格的中心。从方程 (3.2a), (3.2b) 和连续性方程 (2.8d), 可以写出等效压力的 Poisson 方程 (略去时间层 n 标记)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) / \Delta t = s \quad (3.4)$$

如果假定边界上的中间速度等于已知的边界速度值即 $\bar{u} = u_B$, $\bar{v} = v_B$, 那么压力 Poisson 方程 (3.4) 满足第二类边界条件, 即压力在边界上的法向导数为零,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0 \quad (3.5)$$

其中 η 为边界法线方向。但在, 这种条件完全是数值型的, 并不意味着压力的法向导数 $\partial \phi / \partial \eta$ 真正为零。AF1 方法解方程 (3.4) 的迭代格式为

$$\left(\alpha - \frac{\delta_{xx}}{\Delta x^2} \right) \left(\alpha - \frac{\delta_{yy}}{\Delta y^2} \right) \Delta_{ij}^m = 2\alpha R(\phi_{ij}^m) \quad (3.6)$$

其中 $\Delta_{ij}^m = \phi_{ij}^{m+1} - \phi_{ij}^m$,

$$R(\phi_{ij}^m) = \left(\frac{\delta_{xx}}{\Delta x^2} + \frac{\delta_{yy}}{\Delta y^2} \right) \phi_{ij}^m - s_{ij}^m \quad (3.7a)$$

m 是迭代次数, α 为 AF1 的迭代参数, 是一数列。

$$\alpha_N = 4/\Delta y^2, \alpha_L = 1, \alpha_i = \alpha_N (\alpha_L / \alpha_N)^{(i-1)/(N-1)} \quad (3.7b)$$

$$i = 1, 2, \dots, N, N \text{ 一般取 } 6。$$

差分算子 δ_{xx} , δ_{yy} 定义为

$$\delta_{xx} \phi_{ij} = \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{ij} \quad (3.8a)$$

$$\delta_{yy} \phi_{ij} = \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{ij} \quad (3.8b)$$

通过 AF1 解法得到压力场, 根据中间速度 $\bar{u}_{ij}^{n+1}$, $\bar{v}_{ij}^{n+1}$ 及 (3.2a), (3.2b) 可得时间层 $n+1$ 上的速度

$$u_{ij}^{n+1} = \bar{u}_{ij}^{n+1} - (\phi_{ij}^{n+1} - \phi_{i-1,j}^{n+1}) \times \Delta t / \Delta x \quad (3.9a)$$

$$v_{ij}^{n+1} = \bar{v}_{ij}^{n+1} - (\phi_{ij}^{n+1} - \phi_{i,j-1}^{n+1}) \Delta t / \Delta y \quad (3.9b)$$

在方程(2.8a)中代入速度 u_{ij}^{n+1} , v_{ij}^{n+1} 并进行求解,可以得到主流方向的速度 w_{ij}^{n+1} 。求解时对
流项用二阶迎风格式,粘性项用二阶中心格式差分,时间导数项用二阶 Adams 积分公式离散
化。通过二次流和主流流场的循环迭代,可以得到需要的数值解。

4 计算结果与讨论

在对 $h/D=2$ 的旋转矩形通道中的流动进行数值计算时,采用 $N_x \cdot N_y=60 \times 60$ 的交错
网格系统,空间步长是: $\Delta x=1/59$, $\Delta y=2/59$,采用的时间步长既取决于 Re 数,也取决于 Ro
数($0 < Re < 500$, $0.1 < Ro < 100$)。对 $h/D=8$ 的旋转矩形通道中的流动进行数值计算时,采
用 $N_x \cdot N_y=60 \times 180$ 交错网格系统,空间步长是: $\Delta x=1/59$, $\Delta y=8/179$, $Re=485$, $Ro=$
35.714。如果主流方向的动量方程中的时间偏导数项采用二阶精度的 Adams 积分公式离散,
则采用的时间步长可以比用一阶欧拉积分公式时用的时间步长要大些。

如图3所示的是旋转矩形通道中的流动在充分
发展时横截面上速度分布的矢量图。压力梯度参数
 $C_r=17.50$, 矢量图显示出在横截面上存在相反旋转
的两个涡,与理论分析^[5]和实验结果^[6]吻合良好,与
文献[2]数值计算给出的二次流结构也是一致的。图
4中给出了横向和纵向中心线上主流方向速度的分
布。计算结果表明,通道旋转导致横向中心线分布的
主流速度的最大值偏向低压区,所谓低压区是指旋
转时侧壁离开流体的一侧,而侧壁压向流体的一侧
为高压区。在纵向中心线上主流速度的分布是对称
的。图5是当 Re 数和 Ro 数减小时在横向和纵向中
心线上主流方向速度的分布图。在高压区本文的计
算值与文献[2]的结果相符合,在低压区计算值稍
小于文献[2]中给出的计算值。如图6所示的是当
 $Ro=0.6$, $Re=279$ 时在横向和纵向中心线上主流方

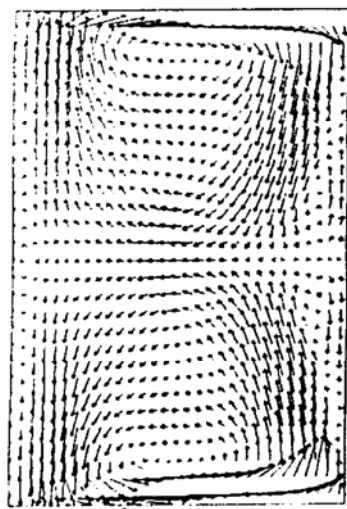


Fig. 3 Fully developed secondary flow in a
rotation rectangular channel

向速度的分布;图7所示的是当 $Ro=0.24$, $Re=220$ 时的横向和纵向中心线上主流方向速度的
分布。从这些结果可以看出,当 Ro 数减小,即旋转速率增大,本文的计算结果与文献
[2]给出的数值解的差别不断增大。数值方法和计算网格节点数的不同是产生这种差别的两
个主要因素,究竟哪种结果更符合实际,有待于实验验证。从图7可以看出,通道旋转引起
的哥氏力使通道中流动的流量减少了,哥氏力对流动起了阻塞作用,作用的大小取决于流动
参数 Re 数和 Ro 数。当旋转速率 Ω 一定时,主流速度较大,哥氏力的阻塞作用也增大。当 Re
数一定时,旋转速率越大,则哥氏力的阻塞作用也越大。这些结论与文献[5]的理论解和文
献[6]中的实际结果完全符合。由于旋转,通道中的流量会减少为通道静止时的10%~50%。
但是由于几何条件不一样,计算结果无法和实验结果进行直接比较。

图8给出了六个不同时刻的二次流场的示意图。当 $t=3.0$ 时,二次流呈相反旋转的双涡
结构;当 $t=4.5$ 时,二次流场结构也是呈现相反旋转的双涡结构,但旋涡中心远离了上下壁
面;但当 $t=6.0$ 时,在上下壁面附近也有二次流主涡中心偏向左侧上下角,在右侧高压区

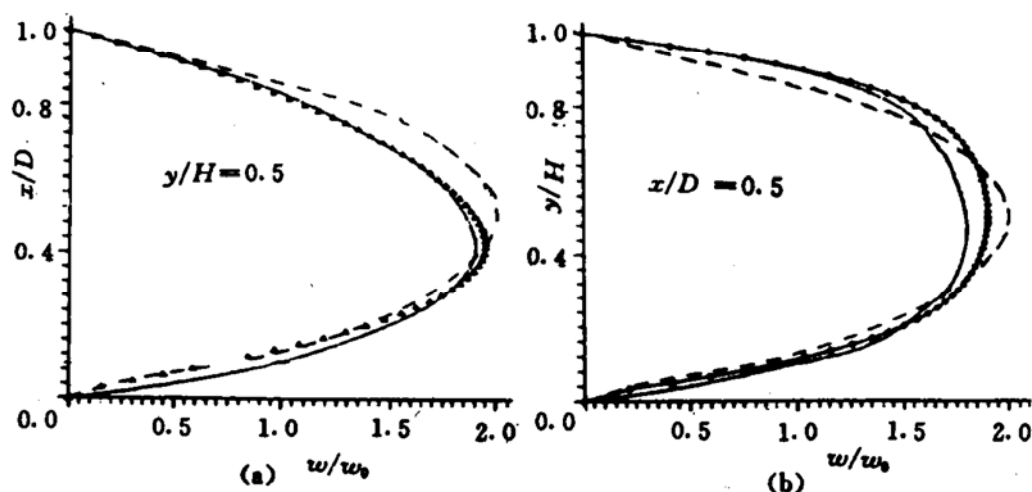


Fig. 4 Axial-velocity profiles in a 2×1 duct for $Re=235$, $Ro=50.5$, $Cr=17.5$:

(a) Along the horizontal centreline of the duct; (b) Along the vertical centreline of the duct. '----' $Q=0$, '—' Numerical solution of Speziale; '- · - · -' Present numerical result.

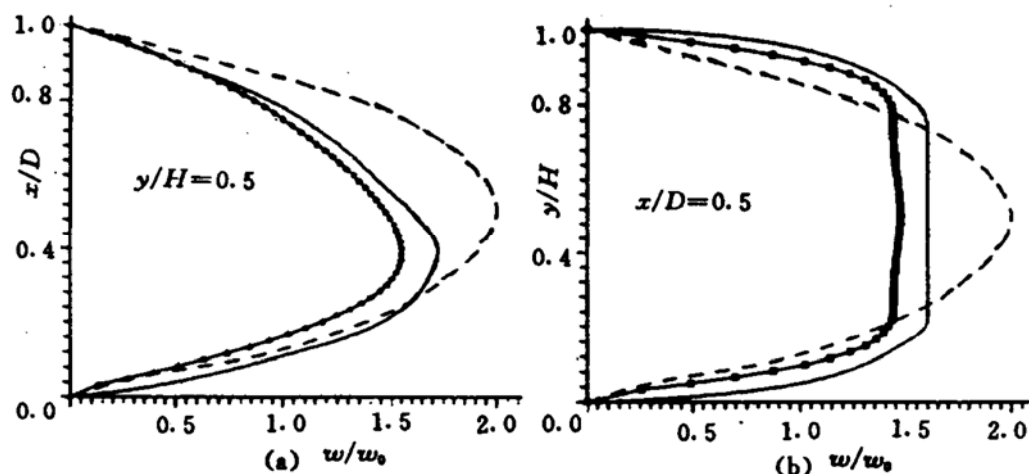


Fig. 5 Axial-velocity profiles in a 2×1 duct for $Re=86$, $Ro=1.85$, $Cr=17.5$:

(a) Along the horizontal centreline of the duct; (b) Along the vertical centreline of the duct. '----' $Q=0$, '—' Numerical solution of Speziale; '- · - · -' Present numerical result.

($x/D \rightarrow 1$) 出现了二次流子涡, 这表明数值解出现了分叉。当 $t=7.5$ 时, 尺度较大的处在高压区的二次流子涡消失, 二次流结构达到稳定的 Taylor-Proudman 状态, 这时沿纵向中心线上主流速度的分布与图 11 (e) 类似。图 11 是文献 [7] 的实验结果。从中可以看出, 二次流场中出现了流动涡结构, 使沿纵向中心线上的速度呈波状分布; 当流动处于 Taylor-Proudman 稳定状态时, 主流速度在纵向的分布是均匀的。

图 9 (a) 给出了数值模拟的流函数 ψ ($\partial\psi/\partial y = -u$, $\partial\psi/\partial x = +v$) 在旋转矩形通道横截面上的分布, 对应的参数为 $Re=485$, $Ro=35.714$ 。图 9 (b) 是流函数的等值线, 显示了通道中的二次流的流动涡结构, 这种结构关于中心线 $y/h=0.5$ 是对称的, 流动涡结构有四对。图 9 (a) 中的流函数沿旋转矩形通道横截面的分布, 与图 9 (b) 显示的二次流场相对应。图 10

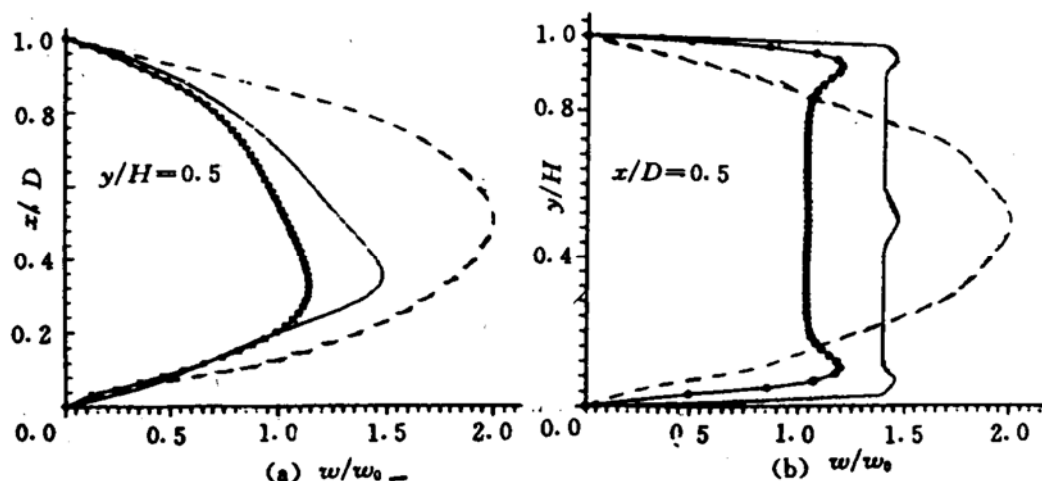


Fig. 6 Axial-velocity profiles in a 2×1 duct for $Re=279$, $Ro=0.6$, $Cr=17.5$:

(a) Along the horizontal centreline of the duct; (b) Along the vertical centreline of the duct. '-----' $\Omega=0$, '——' Numerical solution of Speziale; '- · - · -' Present numerical result.

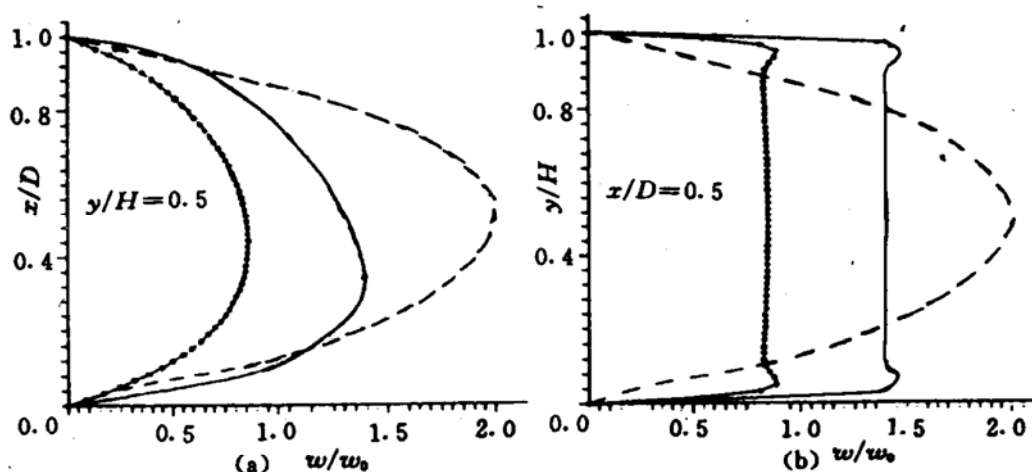


Fig. 7 Axial-velocity profiles in a 2×1 duct for $Re=220$, $Ro=.24$, $Cr=17.5$:

(a) Along the horizontal centreline of the duct; (b) Along the vertical centreline of the duct. '-----' $\Omega=0$, '——' Numerical solution of Speziale; '- · - · -' Present numerical result.

(a) 中给出了主流速度沿横向中心线的分布, 结果表明: 本文计算的主流流速最大值偏向低压区, 与文献 [8] 结论相反, 因为本文采用的网格点总数是文献 [8] 的五倍, 所以得到的二次流场更精细。数值模拟结果表明旋转通道中有四对滚动涡结构, 在通道横向中心线上分布的最大值偏向低压区。在文献 [8] 中, 只模拟出三对滚动涡结构, 在通道横向中心线处, 滚动涡结构输运动量的方向恰好是向着高压区的, 所以, 文献 [8] 中的横向中心线上主流速度分布的最大值偏向高压区。图 10 (b) 是主流流速在纵向中心线上的分布, 可见存在的二次流的滚动涡结构, 引起了主流速度的分布的变化, 产生了主流方向速度沿纵向中心线的波浪形分布, 计算结果很好地与图 11 (c, d) 定性相符合。

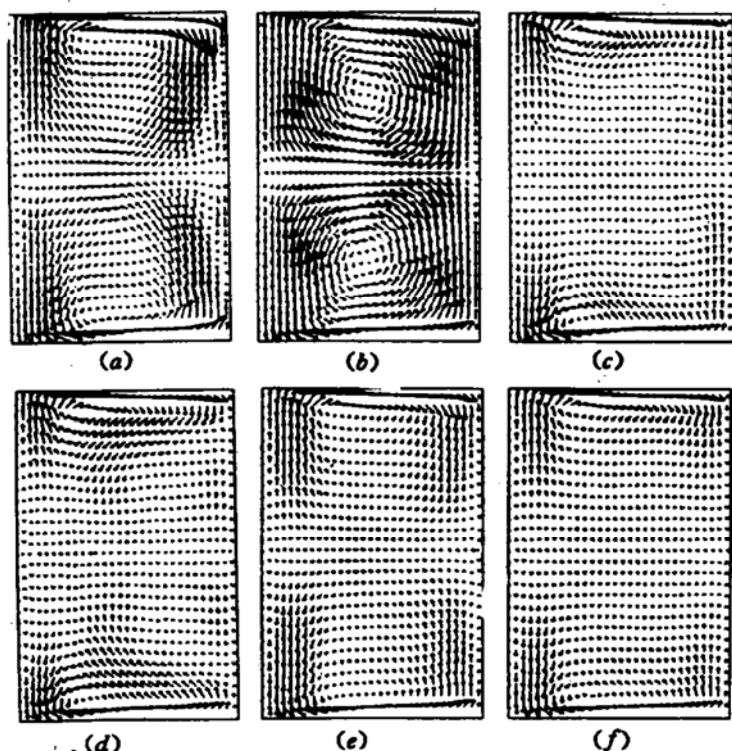


Fig. 8 Developing secondary flow in a rotating 2×1 duct for $Re=279$, $Ro=0.6$, $Cr=17.5$: (a) (b) (c) (d) (e) (f) represent secondary flow field at non-dimensional time $t=3.0, 4.5, 6.0, 7.5, 9.0, 12.0$

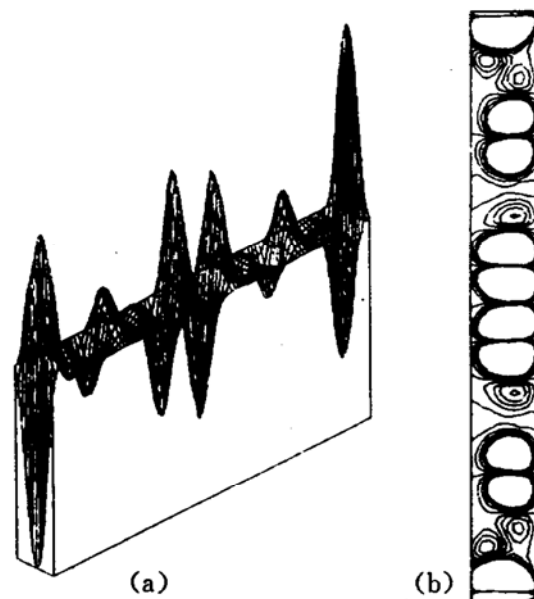


Fig. 9 (a) Distribution of stream function in the cross section of a rotating 8×1 duct; (b) Computer generated secondary-flow streamlines in a rotating 8×1 duct; $\Delta t=0.02$, $N_{\text{Total}}=15000$ non-dimensional time $t=300$, $Re=485$, $Ro=35.714$, $Cr=12.5$

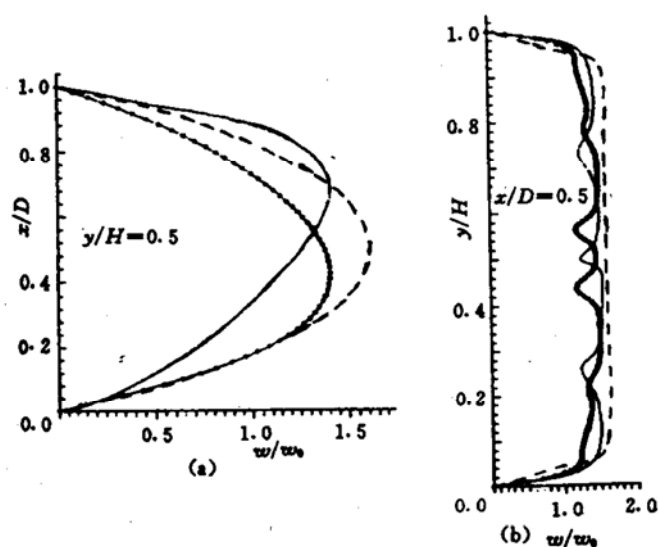


Fig. 10 Axial-velocity profiles in a 2×1 duct for $Re=485$, $Ro=35.714$, $Cr=12.5$, $t=300$: (a) Along the horizontal centreline of the duct; (b) Along the vertical centreline of the duct.

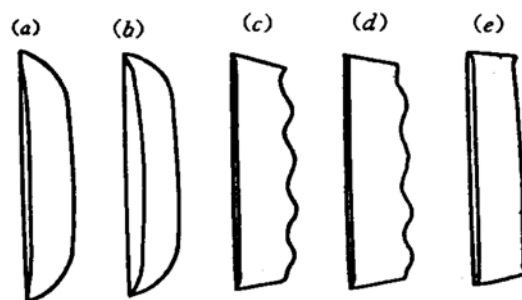


Fig. 11 Experimental axial-velocity profiles along the vertical centreline of a rotating channel (Hart 1971): (a) $\Omega=0$, (b) $\Omega>0$, with double-vortex secondary flow; (c, d) $\Omega>0$, with roll cells; (e) $\Omega>0$, Taylor-Proudman regime.

4 结 语

本软件系统是为固体和液体火箭发动机集成化 CAD 系统的一个子系统开发的。作为一个大的软件系统的一部分, 本系统特别注重与其它部分的信息交换和运行方式的设计。它可以以自动方式或交互方式来启动, 交互方式是指以交互输入方式获得推进剂配方和工况参数的一种运行方式; 在自动方式下, 所有这些信息都是通过输入数据文件获得的, 这就大大地简化了运行时的操作, 对集成化的 CAD 设计系统非常有用。因为对一个大的 CAD 系统来说, 其主要工作是结构设计, 热力计算只是其必不可少的前处理过程, 用户可能不希望在此花很多时间, 要求操作越简单越好, 自动运行方式正是考虑了这种需要而设计的。用户可在系统启动之前准备好一组现成的配方及工况数据供运行时调用, 以简化运行时的操作。

本软件设计完成后, 已投入实际使用, 反映良好。

参 考 文 献

- [1] 张中钦. 固体火箭和固体组合发动机的热力气动计算. 北京航空航天大学, 1980.
- [2] 李宜敏、张中钦. 固体火箭发动机原理. 北京: 国防工业出版社, 1985

(上接第 58 页)

5 结 论

(1) 如果矩形通道的转动方向与主流方向垂直, 则因哥氏力引起的二次流使通道流量下降, 旋转速率越大, 这种效应越明显。

(2) 当 $h/D=2$ 时, 如果 $Ro \gg 1.0$, 则二次流呈相反旋转的双涡结构, 使得主流方向速度在横向中心线上分布的最大值偏向低压区。如果 $Ro < 1.0$, 计算结果表明解出现分叉和重现现象, 二次流动变得不稳定。

(3) 当 $h/D=8$ 时, 二次流的四对滚动涡结构, 定性上与文献 [7] 实验结果吻合, 证明了 MAC-AF1 方法的应用是成功的。

参 考 文 献

- [1] 陈义良. 矩形通道中湍流诱发二次流的数值研究. 工程热物理年会, 1992
- [2] Speziale C G. Numerical Study of Viscous Flow in Rotating Rectangular Ducts. J Fluid Mech, 1982, 122: 251
- [3] 朱祚金, 刘岳元, 刘应中. Navier-Stokes 方程的数值解: [学位论文]. 上海: 上海交通大学, 1990
- [4] 周钢, 刘应中. N-S 方程的适解性研究: [学位论文]. 上海: 上海交通大学, 1989
- [5] Barua S N. Secondary Flow in Rotating Straight Pipe. Proc R Soc Lond, 1954, A227: 133
- [6] Lezius D K, Johnston J P. Roll Cell Instabilities in Rotating Laminar and Turbulent Channel Flow. J Fluid Mech, 1976, 77: 153
- [7] Hart J E. Instability and Secondary Motion in a Rotating Channel Flow. J Fluid Mech, 1971, 45: 341
- [8] Speziale C G, Thangam S. Numerical Study of Secondary Flows and Roll Cell Instabilities in Rotating Channel Flow. J Fluid Mech, 1983, 130: 377