

强制偏流喷管的数值仿真*

于胜春 蔡体敏 何洪庆

(西北工业大学航天工程学院, 西安, 710072)

摘 要: 采用薄层 N-S 方程成功地求解了强制偏流喷管内的三维复杂流场, 对通量项和压力项用 Van Leer 发展的矢量通量分裂法进行了离散; 对离散方程采用线超松弛方法迭代求解, 在亚音速与超音速气流共同存在的出口边界分情况进行了处理。计算结果验证了强制偏流喷管具有自动补偿外界压力变化的能力, 与实验结果基本吻合。

主题词: 喷管气流, 三维流, 偏转, 数值模拟

分类号: V435.2

THREE-DIMENSIONAL NUMERICAL SIMULATION OF FORCED DEFLECTION NOZZLES

Yu Shengchun Cai Timin He Hongqing

(Aerospace Engineering Inst., Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an, 710072)

Abstract: A numerical simulation of forced deflection nozzle has been accomplished successfully. The vector flux splitting method developed by Van Leer is used to spatial discretization of convective and pressure terms, the viscous terms are handled using finite volume equivalent of 2nd order accurate central differences. A special treatment is made in outlet boundary in which the subsonic and supersonic flow exist commonly. Block-Line-Gauss-Siedel method is used to solve the differencing equations. The computational results proved that the forced deflection nozzle has the ability to compensate the variation of environmental pressure automatically and are correlated well the experimental results.

Subject terms: Nozzle gas flow, Three dimensional flow, Deflection, Numerical simulation

1 引 言

强制偏流喷管是一个由多个喉孔的喉塞和抛物型的扩散段组成, 同环形喷管不同, 喷管

* 本文 1994 年 4 月 26 日收到, 本课题为国防科技预研基金资助项目

内的流动变为完全意义上的三维流动。因此,其影响因素很多(如喉孔的个数,喉孔的偏转角及扩散段的形状等),单靠实验来进行改进完善很难达到最佳性能状态。有必要对强制偏流喷管的内流场进行数值仿真。

目前用于求解 N-S 方程的迎风算法加松弛解法得到了迅速发展,因为在对方程进行离散时考虑了扰动的物理传播方向,在计算过程中不需要再添加人工耗散项。得到的离散方程且基本具有对角占优的性质,因此可以采用稳定性好的线 Gauss-Siedel 松弛方法迭代求解,避免了近似因子分解方法中因为因子分解产生误差而带来的不稳定性。本文采用了 Van Leer 的矢量通量分裂算法,对亚音速和超音速气流共同存在的出口边界对每个出口点都进行判断,分情况给出不同的边界条件。

2 控制方程

当忽略热源和气体的质量力时,通用坐标下三维无因次非定常薄层 N-S 方程为:

$$\frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} - \frac{1}{Re_{cr}} \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

$$Q = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]^T$$

$$\hat{E} = J^{-1} [\rho U, \rho u U + \xi_x p, \rho v U + \xi_y p, \rho w U + \xi_z p, (e + p)U]^T$$

$$\hat{F} = J^{-1} [\rho V, \rho u V + \eta_x p, \rho v V + \eta_y p, \rho w V + \eta_z p, (e + p)V]^T$$

$$\hat{G} = J^{-1} [\rho W, \rho u W + \zeta_x p, \rho v W + \zeta_y p, \rho w W + \zeta_z p, (e + p)W]^T$$

$$\hat{F}_v = J^{-1} [0, f_{v_2}, f_{v_3}, f_{v_4}, f_{v_5}]^T$$

$$f_{v_2} = \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} + \eta_z \tau_{xz}$$

$$f_{v_3} = \eta_x \tau_{yx} + \eta_y \tau_{yy} + \eta_z \tau_{yz}$$

$$f_{v_4} = \eta_x \tau_{zx} + \eta_y \tau_{zy} + \eta_z \tau_{zz}$$

$$f_{v_5} = u f_{v_2} + v f_{v_3} + w f_{v_4} - \frac{\gamma \mu}{Pr} (\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) (uu_\eta + vv_\eta + ww_\eta - (e/\rho)_\eta)$$

$$U = u \xi_x + v \xi_y + w \xi_z$$

$$V = u \eta_x + v \eta_y + w \eta_z$$

$$W = u \zeta_x + v \zeta_y + w \zeta_z$$

其中 ρ 为气体密度, u, v, w 为笛卡尔坐标下的速度分量, e 为单位体积的总能量, μ, κ, γ 分别为黏性系数, 热传导系数和比热比, p 为气体压力, 对于理想气体, 它的状态方程为:

$$p = (\gamma - 1) [e - 0.5 \rho (u^2 + v^2 + w^2)]$$

为了提高数值计算的精度和程序的通用性,采用 Thomas 的方法将 x, y, z 坐标系下的物理区域变换 ξ, η, ζ 坐标系下的计算区域,其中, $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$, $\zeta = \zeta(x, y, z)$

(x, y, z) , $J = \partial(\xi, \eta, \zeta) / \partial(x, y, z)$ 为坐标变换的雅可比行列式。

3 空间离散

控制方程可以看成是由无黏（对流和压力）项和黏性（扩散）项两部分组成，对流和压力项采用 Van Leer 发展的矢通量分裂法进行差分，该方法在特征值符号变化时保持一阶导数连续，并且可以在一到两个网格内准确地捕获到激波，剪切应力项采用中心差分格式离散。

按照雅可比矩阵的特征值将无黏通量 $\hat{E}$ 、 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 分裂成 $\hat{E}^+$ 、 $\hat{F}^+$ 、 $\hat{G}^+$ ：

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = \delta_{\xi}^{-} \hat{E}^{+} + \delta_{\xi}^{+} \hat{E}^{-} + \delta_{\eta}^{-} \hat{F}^{+} + \delta_{\eta}^{+} \hat{F}^{-} + \delta_{\zeta}^{-} \hat{G}^{+} + \delta_{\zeta}^{+} \hat{G}^{-} \quad (2)$$

其中 $\Delta \xi = \Delta \eta = \Delta \zeta = 1$, δ_{ξ}^{-} , δ_{η}^{-} , δ_{ζ}^{-} 为向前差分算子, δ_{ξ}^{+} , δ_{η}^{+} , δ_{ζ}^{+} 为向后差分算子, 当 ξ 方向的局部马赫数 $|M_{\xi}| < 1$, 分裂通量的表达式为

$$\hat{E}^{\pm} = \frac{|\text{grad} \xi|}{J} \hat{e}_1^{\pm} \begin{bmatrix} 1 \\ u + \hat{\xi}_x \frac{-\bar{u} \pm 2a}{\gamma} \\ v + \hat{\xi}_y \frac{-\bar{u} \pm 2a}{\gamma} \\ w + \hat{\xi}_z \frac{-\bar{u} \pm 2a}{\gamma} \\ \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{-(\gamma - 1)\bar{u}^2 \pm 2(\gamma - 1)\bar{u}a + 2a^2}{(\gamma^2 - 1)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\hat{e}_1^{\pm} = \pm \frac{\rho a}{4} (M_{\xi} \pm 1)^2 = \pm \frac{\rho}{4a} (\bar{u} \pm a)^2$$

$$\bar{u} = \hat{\xi}_x u + \hat{\xi}_y v + \hat{\xi}_z w$$

$$(\hat{\xi}_x, \hat{\xi}_y, \hat{\xi}_z) = \frac{(\xi_x, \xi_y, \xi_z)}{|\text{grad} \xi|}$$

$M_{\xi} \geq 1$ 时, $\hat{E}^{+} = \hat{E}$, $\hat{E}^{-} = 0$; 当 $M_{\xi} \leq 1$ 时, $\hat{E}^{+} = 0$, $\hat{E}^{-} = \hat{E}$ 。

$\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 在通用坐标系下的通量分裂公式与公式 (3) 类似, 以 $\hat{E}$ 为例, 分裂通量的差分可以表示为

$$\delta_{\xi}^{-} \hat{E}^{+} + \delta_{\xi}^{+} \hat{E}^{-} = [\hat{E}^{+}(Q^{-}) + \hat{E}^{-}(Q^{+})]_{i+\frac{1}{2}} - [\hat{E}^{+}(Q^{-}) + \hat{E}^{-}(Q^{+})]_{i-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$\hat{E}^{+}(Q^{-})$ 表示用 Q^{-} 的值计算 $\hat{E}^{+}$, Q^{+} 为网格界面处的迎风插值, 表达式为

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^{-} = Q_i + \frac{\varphi}{4} [(1 - \kappa_x) \nabla_x + (1 + \kappa_x) \Delta_x] Q_i \quad (5)$$

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^{+} = Q_{i+1} - \frac{\varphi}{4} [(1 - \kappa_x) \Delta_x + (1 + \kappa_x) \nabla_x] Q_{i+1} \quad (6)$$

其中 $Q_{i,j,k}^n$ 代表网格中心的值, 参数 κ 决定空间差分的精度: $\kappa = -1$ 对应于全迎风格式, $\kappa = +1$ 为中心差分格式, $\kappa = 1/3$ 为三阶偏迎风格式。开关 $\varphi = 0$ 对应于一阶迎风差分, $\varphi = 1$ 对应于高阶差分。

4 松弛解法

在对方程 (1) 进行空间离散的基础上, 用欧拉隐式方法对时间进行离散, 可得到:

$$\frac{\Delta Q}{J \Delta t} = R^{n+1}(Q), \quad \Delta Q = Q^{n+1} - Q^n \quad (7)$$

其中上标 n 代表已知时间层。 $R(Q)$ 为剩余值, 它的表达式为:

$$R(Q) = -\delta_\xi^- E^+ - \delta_\xi^+ E^- - \delta_\eta^- F^+ - \delta_\eta^+ F^- - \delta_\zeta^- G^+ - \delta_\zeta^+ G^- + \frac{1}{Re_{cr}} \delta_\eta \hat{F}_v \quad (8)$$

在已知的时间层上对 $R^{n+1}(Q)$ 进行线性化处理并忽略线性化时黏性的变化, 方程 (7) 可以写成:

$$\left[\frac{I}{J \Delta t} + \delta_\xi^- \hat{A}^+ + \delta_\xi^+ \hat{A}^- + \delta_\eta^- \hat{B}^+ + \delta_\eta^+ \hat{B}^- + \delta_\zeta^- \hat{C}^+ + \delta_\zeta^+ \hat{C}^- - \frac{1}{Re_{cr}} \delta_\eta (C \delta_\eta \hat{B}_v) \right] \Delta Q = R^n(Q) \quad (9)$$

其中 $\hat{A}^\pm$ 、 $\hat{B}^\pm$ 、 $\hat{C}^\pm$ 和 $\hat{B}_v$ 分别为 $\hat{E}^\pm$ 、 $\hat{F}^\pm$ 、 $\hat{G}^\pm$ 和 $\hat{F}_v$ 的雅可比矩阵, I 为 5×5 的单位矩阵。当 $R(Q)$ 用高阶迎风格式进行离散时, 方程 (9) 中的左端项也要用相应的格式进行离散。当时间步长取得非常大时, 该方程的直接解法需要求解一个非常大的块带状矩阵方程; 近似因子分解法产生的误差会对原算法的稳定性产生非常大的影响, 因此采用线 Gauss-Siedel 松弛方法对方程 (9) 进行求解。将方程 (9) 展开在每一个网格可以得到一个矢量方程:

$$\bar{A} \Delta Q_{i-2} + \bar{B} \Delta Q_{i-1} + \bar{C} \Delta Q + \bar{D} \Delta Q_{i+1} + \bar{E} \Delta Q_{i+2} + \bar{F} \Delta Q_{j-2} + \bar{G} \Delta Q_{j-1} + \bar{H} \Delta Q_{j+1} + \bar{I} \Delta Q_{j+2} + \bar{J} \Delta Q_{k-2} + \bar{K} \Delta Q_{k-1} + \bar{L} \Delta Q_{k+1} + \bar{M} \Delta Q_{k+2} = R(Q) \quad (10)$$

其中 $\bar{A}$ 到 $\bar{M}$ 为通量雅可比矩阵的线性组合, $\bar{C}$ 包含时间项。为了书写方便, 将上标为 ' n ' 下标为 ' i ', ' j ' 或 ' k ' 时都省略掉。

如果忽略雅可比矩阵随空间变化, 可以证明一阶迎风差分在任何时间步长下系数矩阵都是对角占优的, 中心差分的对角元素中只包含时间项和黏性项, 对于高阶差分, 系数矩阵的对角元素的值与非对角元素的数值之比为:

$$3(1 - \kappa) / [4 + 3(1 - \kappa)]$$

其中 κ 值从 -1 到 $+1$ 。因此, 对于高阶差分系数矩阵永远不可能是对角占优的, 只是 κ 越接近 -1 , 系数矩阵的条件越好。当对流和压力项采用高阶差分时, 在每条线上就要求解五对角矩阵方程, 用一阶迎风差分时则只需求解块三对角矩阵方程, 从稳定性的角度考虑, 采用交替方向的向前向后扫描方法, 从左下角到右上角的扫描过程可以写为:

$$(\bar{F}, \bar{G}, \bar{C}, \bar{H}, \bar{I}) \Delta Q = R(Q) - \bar{A} \Delta Q_{i-2} - \bar{B} \Delta Q_{i-1} - \bar{J} \Delta Q_{k-2} - \bar{K} \Delta Q_{k-1} \quad (11)$$

从右上角到左下角的扫描公式为:

$$(\bar{F}, \bar{G}, \bar{C}, \bar{H}, \bar{I}) \Delta Q = R(Q) - \bar{D} \Delta Q_{i+1} - \bar{E} \Delta Q_{i+2} - \bar{L} \Delta Q_{k+1} - \bar{M} \Delta Q_{k+2} \quad (12)$$

为了提高整个算法的收敛速度, 对边界条件也进行类似隐式线化处理, 并组合到内部网格点的离散方程中去。边界条件的具体取法在算例中讨论。

5 计算结果

对不同出口压力下强制偏流喷管扩散段内的流场进行数值计算, 网格划分如图 1 所示。在轴线方向及圆周方向上网格点基本上是均匀分布的, 在径向靠近壁面处网格很密, 以确保附面层内数值计算的准确性。壁面边界条件采用无滑移、等温及法向梯度为零。扩散段的入口为超音速, 入口条件给定, 由于喷管喉塞上的喉孔在圆周方向是均匀分布的, 因此计算区域的两侧都采用对称边界条件。出口边界与锥形喷管不同, 在靠近壁面处气流一般为超音速, 而在轴线处气流一般为亚音速。为此在每个时间步中需要对出口边界的每个点进行判断。对于超音速点, 由于外界压力的影响不可能传到上游, 可以采用三点外插公式进行处理, 对于亚音速点, 出口压力可以向扩散段内传播, 因此采用 $\partial p / \partial x = 0$ 的处理办法, 其余变量仍采用三点外插公式进行计算。

图 2 为无量纲压力 (出口压力与喉部的临界压力之比) $p = 0.01$ 时的压力等值线图。从图中可以看出, 气流从喉孔流出以后迅速发生剧烈膨胀, 压力很快降低, 在喉塞底部靠近喉孔处产生气体的过膨胀区, 在轴线处气体的压力变化不大, 基本上等于外界大气压。

图 3 为无量纲压力不同时以通过喉孔中心面上的速度矢量图, 由于流动的对称性, 该平面上的法向速度为零。很明显, 当出口压力比较大时, 气流被压向壁面, 轴线处的气流速度很小, 随着出口压力的降低, 气流的膨胀区域不断增大, 验证了强制偏流喷管具有自动补偿外界压力变化的能力。

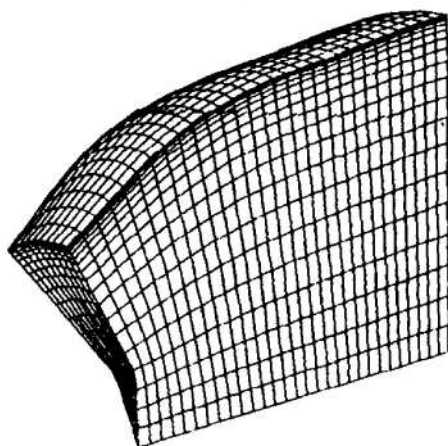


Fig. 1 3-D grid for forced deflection nozzle

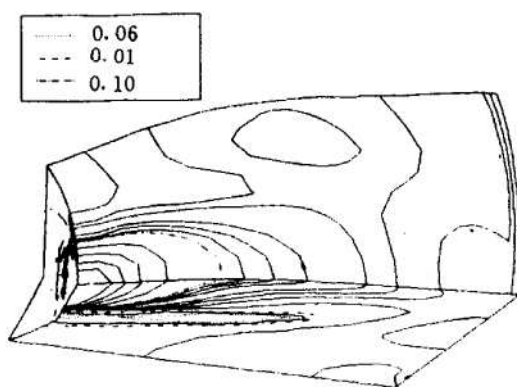


Fig. 2 Pressure isogram under dimensionless pressure 0.01 on exit section

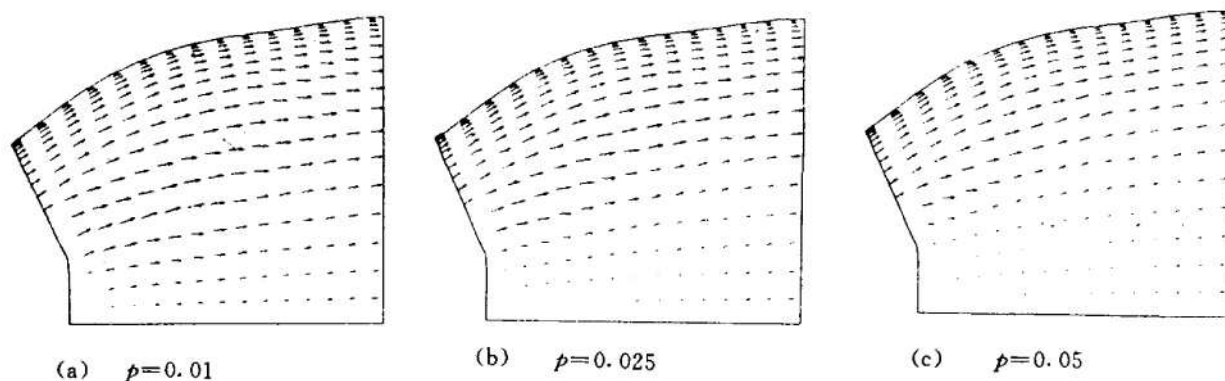


Fig. 3 Velocity vector under varied dimensionless pressure on exit section

壁面压力随轴线的变化如图4所示, 开始阶段压力下降很快, 到喷管出口附近压力基本保持不变, 与实验时压力测试结果基本吻合。

参 考 文 献

- [1] Thomas J L, Walters R W. Upwind Relaxation Algorithms for the Navier-Stokes Equations. AIAA Journal, 1987, 25 (4)
- [2] Napolitano M, Walters R W. An Incremental Block Line Gauss-Siedel Method for the Navier-Stokes Equations. AIAA Journal, 1986, 24 (5)
- [3] Newsome R W, Walters R W, Thomas J L. An Efficient Iteration Strategy for Upwind/Relaxation Solution to the Thin-Layer Navier-Stokes Equations. AIAA Paper 87-113
- [4] Walters R W, Dwoyer D L. An Efficient Iteration Strategy for the Euler Equations. AIAA Paper 85-1529
- [5] Thomas J L, Van Leer B, Walters R W. Implicit Flux-Split Schemes for the Euler Equations. AIAA Paper 85-1680
- [6] Taylor A C, Ng W F, Walters R W. Upwind Relaxation Methods for the Navier-Stokes Equations Using Inner Iterations. AIAA Paper 89-1954

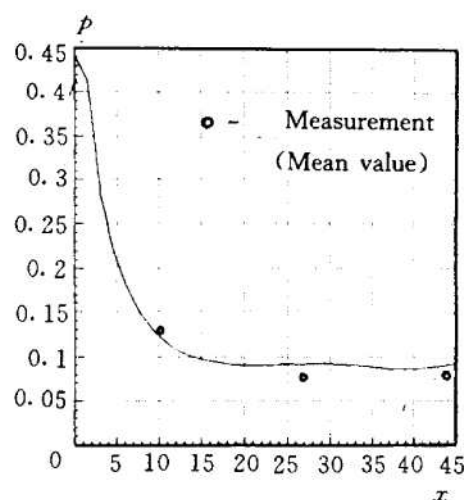


Fig. 4 Dimensionless wall pressure along axis