

变比热平行混合近似解*

崔 济 亚

(北京航空航天大学动力系, 北京, 100083)

摘 要: 平行混合变比热改进解析解, 合理、简明、快捷, 定比热解误差大。在准确的改进解与定比热解之间, 探索了几种简化的近似解, 从中看出, 冷、热、混三气各简化按其自身静温比热比 k_T 作计算的近似解, 结果总的误差较小, 可供参照取用。算例包括不等总压及等总压混合, 并对等总压混合后总压降低作出初步分析。

主题词: 无粘流, 气动热力学, 计算流体力学, 比热

分类号: V231.11, V211.24

AN APPROXIMATE SOLUTION FOR VARYING SPECIFIC HEAT PARALLEL STREAM MIXING

Cui Jiya

(Dept. of Jet Propulsion, Beijing Univ. of Aeronautics & Astronautics, Beijing, 100083)

Abstract: The author has already put forward an improved analytical solution for varying specific heat parallel stream mixing, which is more rational, simpler, quicker and hence more advanced. And it is understood that fixed specific heat solution gives big errors. This paper is aimed at searching for some simplified approximate solutions between the former two. It is clear now that the method using only specific heat ratios k_T for cold, hot and mixed streams static temperatures gives nearest to accurate results, so could be adopted for reference and applications. Illustrative examples include mixing of unequal and equal total pressures, with the drop of total pressure after mixing in the latter case primarily analyzed.

Subject terms: Inviscid flow, Aerothermodynamics, Computational fluid dynamics, Specific heat

1 前 言

利用变比热气动函数, 计算变比热无粘平行混合, 作者先后发表准确解与次准确解^[1,2]及

* 本文 1995 年 2 月 15 日收到

更为合理简明快捷所以先进的改进解^[3]。定比热 k 为 1.4 解的误差大^[1,2]，也很自然。在准确的改进解与定比热解间，本文进一步探索了几种简化的近似解，从中提出误差较小的一种，供工程、设计中选用。

2 近似解

在改进解中，冷、热、混气均各仍需用两个比热比，即总静温平均比热的比热比 k 及静温比热比 k_T 。近似解中，对三种气各自保留一种比热比，甚至三种气共用一个比热比，现分述如下。

2.1 三气静温比热比 k_T 解

给定：冷热气流量 $\dot{m}_c$ 、 $\dot{m}_h$ ，总温 T_c^* 、 T_h^* ，总压 p_c^* 、 p_h^* ，热流油气比 g_r 、马赫数 M_h 。

求解：混气总温 T_m^* ，总压 p_m^* ，马赫数 M_m ，截面积 F_m 。

步骤如下：

(1) 按焓拟合式^[4]求冷热总焓 i_c^* 、 i_h^* ，混气总焓

$$i_m^* = (\dot{m}_c i_c^* + \dot{m}_h i_h^*) / (\underbrace{\dot{m}_c + \dot{m}_h}_{\dot{m}_m}) \quad (1)$$

混气油气比

$$g_{r_m} = g_r \frac{\dot{m}_h / (1 + g_r)}{\dot{m}_c + \dot{m}_h / (1 + g_r)} \quad (2)$$

由 i_m^* 经过迭代求 T_m^* 。

(2) 设静温 T_h 以其 k_{T_h} 算出迭代值

$$T_h = \frac{T_h^*}{1 + \epsilon_{T_h} M_h^2} = \frac{T_h^*}{1 + \frac{k_{T_h} - 1}{2} M_h^2} \quad (3)$$

符合设值为止。

静压为

$$p_h = p_h^* \left(\frac{T_h}{T_h^*} \right)^{\frac{k_{T_h}}{k_{T_h} - 1}} \quad (4)$$

密度、速度、截面积分别为

$$\rho_h = p_h / R T_h \quad (5)$$

$$c_h = M_h \sqrt{k_{T_h} R T_h} \quad (6)$$

$$F_h = \dot{m}_h / \rho_h c_h \quad (7)$$

(3) 冷流进口静压与热流一致 $p_c = p_h$ 。设静温 T_c 以其 k_{T_c} 算出迭代值

$$T_c = T_c^* \left(\frac{p_c}{p_c^*} \right)^{\frac{k_{T_c} - 1}{k_{T_c}}} \quad (8)$$

符合设值为止。

密度、马赫数、速度、截面积分别为

$$\rho_c = p_c / R_c T_c \quad (9)$$

$$M_c = \sqrt{\left(\frac{T_c^*}{T_c} - 1\right) \frac{2}{(k_{T_c} - 1)}} \quad (10)$$

$$c_c = M_c \sqrt{k_{T_c} R_c T_c} \quad (11)$$

$$F_c = \dot{m}_c / \rho_c c_c \quad (12)$$

(4) 三气冲力为

$$S_h = \dot{m}_h (c_h + p_h / \rho_h c_h), \quad S_c = \dot{m}_c (c_c + p_c / \rho_c c_c) \quad (13)$$

$$S_m = S_h + S_c \quad (14)$$

(5) 设混合后 T_m 求马赫数、速度

$$M_m = \sqrt{\left(\frac{T_m^*}{T_m} - 1\right) \frac{2}{(k_{T_m} - 1)}} \quad (15)$$

$$c_m = M_m \sqrt{k_{T_m} R_m T_m} \quad (16)$$

迭代入冲力式

$$S_m = \dot{m}_m (c_m + R_m T_m / c_m) \quad (17)$$

符合 (14) 式值为止。

按 $F_m = F_c + F_h$ 求密度

$$\rho_m = \frac{\dot{m}_m}{F_m c_m} \quad (18)$$

静压、总压为

$$p_m = \rho_m R_m T_m \quad (19)$$

$$p_m^* = p_m \left(\frac{T_m^*}{T_m}\right)^{\frac{k_{T_m}}{k_{T_m}-1}} \quad (20)$$

2.2、三气总温比热比 k_T^* 解

考虑到冷热混合某种意义上是总温总压相混，因此也试一下三气 k_T^* 解如何。

将上小节步骤中的 k_{T_h} 、 k_{T_c} 、 k_{T_m} 分别换为 $k_{T_h}^*$ 、 $k_{T_c}^*$ 、 $k_{T_m}^*$ 即可，自然地 (3) (8) 两式求 T_h 、 T_c 就无需迭代了。

2.3 单混气总温比热比 $k_{T_m}^*$ 解、定比热 $k=1.4$ 解

显然这些就更简化了，全部 k 值都用 $k_{T_m}^*$ 或定值 1.4 就得了，必然也最粗糙。

3 另一通用的由冲力 S_m 求静温 T_m 法

在探索近似解过程中，意外地发展了一种由冲力求静温法，对于从改进解到各类近似解

通用, 现按改进解推导如下:

$$\text{由于} \quad \frac{c_m^2}{2} = c_p(T_m^* - T_m) = \frac{k_m R_m}{k_m - 1}(T_m^* - T_m)$$

(17) 式可写为:

$$S_m = \dot{m}_m \left[\sqrt{\frac{2k_m R_m}{k_m - 1}(T_m^* - T_m)} + \frac{R_m T_m}{\sqrt{\frac{2k_m R_m}{k_m - 1}(T_m^* - T_m)}} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{令 } A = \frac{2k_m}{k_m - 1}} \dot{m}_m \sqrt{R_m} \left[\sqrt{A(T_m^* - T_m)} + \frac{T_m}{\sqrt{A(T_m^* - T_m)}} \right]$$

移项并全式平方得

$$\frac{S_m^2}{\dot{m}_m^2 R_m} A(T_m^* - T_m) = A^2(T_m^* - T_m)^2 + 2AT_m(T_m^* - T_m) + T_m^2$$

整理后有

$$T_m^2 = BT_m + C = 0 \quad (21)$$

$$\text{其中} \quad B = \frac{A}{(A-1)^2} [2T_m^2(A-1) - \frac{S_m^2}{\dot{m}_m^2 R_m}], \quad C = \frac{A}{(A-1)^2} T_m^* (AT_m^2 - \frac{S_m^2}{\dot{m}_m^2 R_m})$$

其合用解为

$$T_m = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad (22)$$

迭代到 T_m 与 T_m^* 平均比热的比热比 k_m 与前设 k_m 符合为止, 然后由 (15) (16) 式求 M_m 及 c_m 。

在三气 k_T 解, 以 k_{T_m} 取代 k_m 作近似, 也须迭代到 T_m 的 k_{T_m} 符合为止。

在三气 k_{T^*} 、 $k_{T_m^*}$ 解、定比热解, 均无迭代问题, 直接按 $k_{T_m^*}$ 定 A (或 $k=1.4$ 定 A), 由 (22) 式解出 T_m 。而如按第 2 节原法, 则仍必须试取 T_m 循 (15) (16) 式迭代到 (17) 式 S_m 值符合。

4 算 例

$$\text{给定: } \dot{m}_c = 0.2G \quad \dot{m}_h = (1+g_r) = 1.03994G \quad M_h = 0.5$$

作出两种算例:

	p_c^*	p_h^*	T_c^*	T_h^*
不等总压混合	$5.06 \times 10^5 \text{Pa}$	$5.5 \times 10^5 \text{Pa}$	483K	1443K
等总压混合	$5.475 \times 10^5 \text{Pa}$		495.85K	1440.4K

计算结果分头列在表 1, 2 中, 括弧内数字表示与改进解比较的误差。

Table 1 Unequal total pressure mixing

Parameter	Improve solution	Three k_T solution	Three k_{T^*} solution	Single k_{T_m} solution	Const. sp. ht. solution
k_h	1.2859	—	—	—	} 1.4
k_{T_h}	1.2869	$1.2869(4.25 \times 10^{-6})$	$k_{T_h^*} = 1.2850$	$k_{T_m^*} = 1.2949$	
ϵ_{T_h}	0.1431	$0.1435(2.77 \times 10^{-3})$	$\epsilon_{T_h^*} = 0.1425$	$\epsilon_{T_m^*} = 0.1474$	
M_h	0.5	0.5	0.5	0.5	
F_h/G	0.00247	$0.00247(5.32 \times 10^{-5})$	$0.00247(7.17 \times 10^{-4})$	$0.00246(-2.60 \times 10^{-3})$	
k_c	1.3888	—	—	—	} 1.4
k_{T_c}	1.3893	$1.3893(1.01 \times 10^{-6})$	$k_{T_c^*} = 1.3884$	$k_{T_m^*} = 1.2949$	
ϵ_{T_c}	0.1945	$0.1946(8.89 \times 10^{-4})$	$\epsilon_{T_c^*} = 0.1942$	$\epsilon_{T_m^*} = 0.1474$	
M_c	0.3295	$0.3296(3.64 \times 10^{-4})$	$0.3292(-8.27 \times 10^{-4})$	$0.3431(4.14\%)$	
F_c/G	0.000404	$0.000404(-2.78 \times 10^{-4})$	$0.000404(1.07 \times 10^{-3})$	$0.000403(3.19 \times 10^{-3})$	
k_m	1.2960	—	—	—	} 1.4
k_{T_m}	1.2971	$1.2971(2.89 \times 10^{-6})$	$k_{T_m^*} = 1.2949$	$k_{T_m^*} = 1.2949$	
ϵ_{T_m}	0.1481	$0.1485(2.90 \times 10^{-3})$	$\epsilon_{T_m^*} = 0.1474$	$\epsilon_{T_m^*} = 0.1474$	
M_m	0.4914	$0.4911(-5.82 \times 10^{-4})$	$0.4911(-6.29 \times 10^{-4})$	$0.4934(4.10 \times 10^{-3})$	
F_c/G	0.00287	$0.00287(6.54 \times 10^{-6})$	$0.00288(7.67 \times 10^{-4})$	$0.00287(-2.60 \times 10^{-3})$	
T_m^*, K	1305.8	1305.8	1305.8	1305.8	1305.8
p_m^*, Pa	541044	$541298(4.68 \times 10^{-4})$	$541301(4.75 \times 10^{-4})$	$541256(3.90 \times 10^{-4})$	$541007(-6.96 \times 10^{-5})$

Note: Unit for all F/G is $m^2/(kg/s)$, same in following table.

Table 2 Equal total pressure mixing

Parameter	Improve solution	Three k_T solution	Three k_{T^*} solution	Single k_{T_m} solution	Const. sp. ht. solution
k_h	1.2860	—	—	—	} 1.4
k_{T_h}	1.2870	$1.2871(4.27 \times 10^{-6})$	$k_{T_h^*} = 1.2850$	$k_{T_m^*} = 1.2949$	
ϵ_{T_h}	0.1431	$0.1435(2.77 \times 10^{-3})$	$\epsilon_{T_h^*} = 0.1425$	$\epsilon_{T_m^*} = 0.1475$	
M_h	0.5	0.5	0.5	0.5	
F_h/G	0.00248	$0.00248(5.30 \times 10^{-5})$	$0.00248(7.26 \times 10^{-4})$	$0.00247(-2.57 \times 10^{-3})$	
k_c	1.3881	—	—	—	} 1.4
k_{T_c}	1.3892	$1.3892(2.73 \times 10^{-4})$	$k_{T_c^*} = 1.3871$	$k_{T_m^*} = 1.2949$	
ϵ_{T_c}	0.1942	$0.1946(1.94 \times 10^{-3})$	$\epsilon_{T_c^*} = 0.1935$	$\epsilon_{T_m^*} = 0.1475$	
M_c	0.4824	$0.4824(6.92 \times 10^{-6})$	$0.4824(-2.58 \times 10^{-5})$	$0.5000(3.66\%)$	
F_c/G	0.000278	$0.000278(5.24 \times 10^{-5})$	$0.000278(7.19 \times 10^{-4})$	$0.000279(4.22 \times 10^{-3})$	
k_m	1.2961	—	—	—	} 1.4
k_{T_m}	1.2973	$1.2973(5.67 \times 10^{-6})$	$k_{T_m^*} = 1.2949$	$k_{T_m^*} = 1.2949$	
ϵ_{T_m}	0.1482	$0.1487(3.22 \times 10^{-3})$	0.1475	$\epsilon_{T_m^*} = 0.1475$	
M_m	0.5168	$0.5167(-8.31 \times 10^{-5})$	$0.5168(8.69 \times 10^{-5})$	$0.5188(3.89 \times 10^{-3})$	
F_m/G	0.00276	$0.00276(5.30 \times 10^{-5})$	$0.00276(7.26 \times 10^{-4})$	$0.00275(-1.89 \times 10^{-3})$	
T_m^*, K	1305.3	1305.3	1305.3	1305.3	1305.3
p_m^*, Pa	543888	$543915(5.04 \times 10^{-5})$	$543919(5.71 \times 10^{-5})$	$543891(6.64 \times 10^{-6})$	$543594(-5.39 \times 10^{-4})$

由表看出,各近似解中,以冷、热、混三气静温比热比 k_T 、简称三 k_T 解的误差最小,三 k_T 解次之,单 k_{T_m} 解又次,定比热解最差、已多为百分之几量级了。

5 等总压混合后总压下降分析

等总压混合使总压降低,早已注意到^[4],现由最准确的改进解算出 $p_m^* < p_{c,h}^*$,可进一步确信无疑。混合过程在温熵图上表示见图 1。

试熵的分析:取 $T_0 = 273.16\text{K}$, $p_0 = 1.012 \times 10^5\text{Pa}$ 为零熵点,任意状态时单位质量即每公斤的熵为

$$\begin{aligned} s &= s - s_0 = \int_{T_0}^T \frac{c_p}{T} dT - R \ln \frac{p}{p_0} \\ &= R(\ln \pi^0 - \ln \frac{p}{p_0}) \quad \text{J/(kgK)} \end{aligned} \quad (23)$$

热流燃气 $\dot{m}_h/G = 1.03994 \text{ kg}$ 的熵为

$$S_h = 1.03994 \times 1391.43 = 1447.00 \text{ J/K}$$

冷流空气 $\dot{m}_c/G = 0.2 \text{ kg}$ 的熵为

$$S_c = 0.2 \times 118.64 = 23.73 \text{ J/K}$$

所以混合前总熵为 $S_h + S_c = 1470.73 \text{ J/K}$; 而混合后 $\dot{m}_m/G = 1.23994 \text{ kg}$ 混气的熵算得

$$S_m = 1.23994 \times 1253.92 = 1554.79 \text{ J/K} > S_h + S_c$$

又如设混合后总压不降低而 $p_m^* = p_{c,h}^*$,可算出混气的熵仍大于混合之前:

$$S'_m = 1.23994 \times 1252.02 = 1552.43 \text{ J/K} > S_h + S_c$$

这对无黏平行混合的总压下降与熵的增大,提供了稍进一步新的理解。

6 小 结

本文探索了平行混合的几种简化的近似解,从其与改进解比较看出,三静温比热比 k_T 解误差较小,多为万分之几;三总温比热比 k_T 解略次;单总温比热比 k_{T_m} 再次,误差多为千分之几;定比热 $k=1.4$ 最差,误差多为百分之几,可以根据具体任务要求情况,斟酌选用。

并对等总压混合后熵增加而总压降低做出初步分析。

参 考 文 献

- [1] 崔济亚. 平行混合的变比热准确解与次准确解. 推进技术, 1994 (1)
- [2] 崔济亚. 变比热气动计算准确解及次准确解与最佳内外涵混合. 中国航空科技文献, HJB941332. 1994
- [3] 崔济亚. 改进的变比热平行混合解析解. 推进技术, 1994 (3)
- [4] 崔济亚. 用变比热次准确解算最佳内外涵混合, 工程热物理学报, 1987, 8 (2)

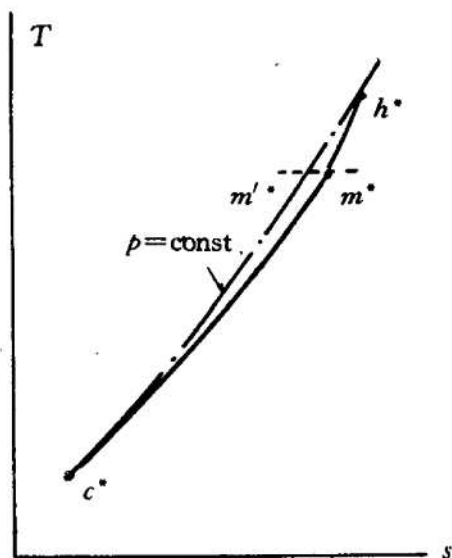


Fig. 1 Diagrammatic sketch of equal total pressure mixing