

强制偏流喷管的三维网络生成*

于胜春 蔡体敏 何洪庆

(西北工业大学航天工程学院, 西安, 710072)

摘 要: 运用泊松方程实现了强制偏流喷管内的三维网络生成, 方程中的源项采用了与边界形状和边界网格点分布无关的数学形式, 源项内的自由参数由横向网格线与边界的交角及横向网格线在边界处的局部曲率两个约束条件来确定, 实现了由边界上的网格分布直接控制内部的网格点, 使生成的网格具有良好的正交性和合理性。

主题词: 泊松方程, 喷管气流, 数值计算, 格网法, 固体推进剂火箭发动机

分类号: V435.23

THREE-DIMENSIONAL GRIDS GENERATION IN FORCED DEFLECTION NOZZLES

Yu Shengchun Cai Timin He Hongqing

(Coll. of Astronautics, Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an, 710072)

Abstract: Three-Dimensional grids generation in forced deflection nozzles has been accomplished using Poisson Equations. The interior grid is controlled directly by the grid point distribution assigned on the boundaries. This is accomplished by use of source terms in the Poisson Equations whose mathematical form is independent of the boundary shape and of the boundary grid point distribution, the source terms contains free parameters evaluated locally at the boundaries using limiting forms of the elliptic equations and interpolated into the interior. Solved numerically, the elliptic system then generates an interior grid that reflects both the geometric shape of the boundary and the spatial distribution of grid points along the boundary. To obtain the three-dimensional grids, a set of six two-dimensional grids, one for each boundary surface of segment must be set up. Once the boundary values have been obtained for all faces of the computational cube, the three-dimensional grid can be generated.

Subject terms: Poisson equation, Nozzle gas flow, Numerical calculation, Grids method, Solid propellant rocket engine

* 本文1994年4月26日收到, 本项目为国防科技预研基金课题

1 引言

为了提高多级固体导弹的总体性能,在 80 年代初由美国提出固体火箭发动机的整体级方案,如图 1 所示,该方案中的关键技术之一是采用新型的强制偏流喷管(见图 2)。

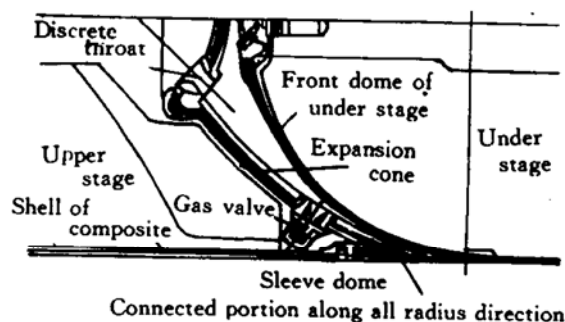


Fig. 1 American integrated stage concept



Fig. 2 Forced deflection nozzle

该喷管是由一个具有多个独立喉孔的喉塞和抛物形的扩散段组成,与传统的锥形喷管相比它具有结构简单、可靠性高、自动补偿外界压力变化等优点,对多级火箭而言,它可以减少整个火箭的长度,增加射程,因此国外针对该喷管已做了许多实验方面的工作。为了进一步分析研究该喷管的工作过程,本文运用 Thomas 方法对强制偏流喷管进行了三维网格生成,为数值仿真奠定了基础。

数值网格生成作为计算流体力学的一个重要部分已得到了很大的发展,TTM (Thompson, Thames, Mastin)^[1]方法则是目前应用最广的方法之一,它可以实现由任意形状的物理区域到矩形计算区域的网格变换,并由 Mastin Thompson^[2]将该方法推广到空间三维区域,然而 TTM 方法一般需凭经验人工给出合理的参数值才能得到满意的内部网格点分布,因此 Thomas Middlecoff^[3]对该方法进行了修改,将 Poisson 方程中的源项采用了与边界形状和边界网格点分布无关的数学形式,源项内的自由参数由横向网格线与边界的交角及横向网格线在边界处的局部曲率两个约束条件来确定,然后将边界上的参数值线性插值到内部各个网格点上去,以实现由边界上的网格分布直接控制内部的网格点。修改后的方法中一个很大的优点就是可以任意指定横向网格线与边界的交角,这对多连通域进行分块网格生成时特别有益。之后 Thomas^[4]又将该方法发展到三维情况。为得到三维网格的边界值必须先对围成该空间区域的各个面进行网格生成,并用与二维情况类似的参数确定办法求得各个面上的参数值,然后插值到空间内部区域,最终实现空间区域的三维网格生成。

2 二维平面的网格生成

给定二维平面上扇形的物理区域,如图 3 所示,要将该区域转换成规则的矩形区域(如图 4),它的变换方程为:

$$\nabla^2 \xi = \varphi(\xi, \eta) |\nabla \xi|^2 \quad \nabla^2 \eta = \psi(\xi, \eta) |\nabla \eta|^2 \quad (1)$$

其中 φ 、 ψ 为自由参数, 由物理平面上的边界值 $OABCO$ 来计算。

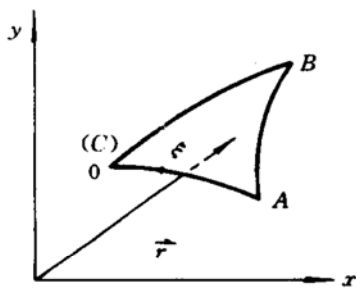


Fig. 3 2-D physical area

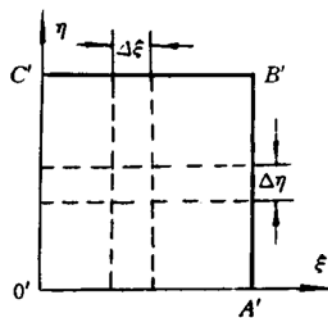


Fig. 4 2-D calculated area

将方程中的自变量和因变量进行交换, 把 x 、 y 坐标系下的控制方程转换到 ξ 、 η 坐标系下, 得到矢量形式的非线性椭圆方程:

$$\alpha(\bar{r}_{\xi\xi} + \varphi\bar{r}_{\xi}) - 2\beta\bar{r}_{\xi\eta} + \gamma(\bar{r}_{\eta\eta} + \psi\bar{r}_{\eta}) = 0 \quad (2)$$

$$\bar{r} = (x, y) \quad (2a)$$

$$\alpha = |\bar{r}_{\eta}|^2, \quad \beta = \bar{r}_{\xi} \cdot \bar{r}_{\eta}, \quad \gamma = |\bar{r}_{\xi}|^2 \quad (2b)$$

其中 α 、 β 、 γ 为方程 (2) 的非线性系数。矩形区域的边界值是给定的, 它对应于物理区域边界上的坐标值。自由参数需要在适当的约束条件下在计算区域的每一个边界上分别求出。以边界 $O'A'$ 为例, $\bar{r}_{\xi}$ 为相对应物理平面中边界 OA 的局部切向矢量, $\bar{r}_{\eta}$ 为与该边界相交的横向坐标曲线的局部切向矢量, 假定横向坐标曲线与边界相垂直, 则有:

$$\bar{r}_{\xi} \cdot \bar{r}_{\eta} = 0 \quad (\text{在 } O'A'B'C'O' \text{ 上}) \quad (3)$$

用 $\bar{r}_{\xi}$ 点乘方程 (2) 并代入约束条件 (3) 可得到仅含参数 φ 的表达式:

$$\varphi = -(T_0 + |\bar{r}_{\xi}|T_1) \quad (4a)$$

$$T_0 = (\bar{r}_{\xi} \cdot \bar{r}_{\xi\xi})/|\bar{r}_{\xi}|^2 \quad (4b)$$

$$T_1 = (\bar{r}_{\xi} \cdot \bar{r}_{\eta\eta})/(|\bar{r}_{\xi}||\bar{r}_{\eta}|^2) \quad (4c)$$

从方程 (4) 可以看出, T_0 中只包含 ξ 方向的导数, 由给定的边界值可以直接求出, 而 T_1 项中包括有 η 方向的导数不可能由给定的边界值单独求出, 但文献 [3] 经研究后证明, T_1 为横向网格线 ($\xi = \text{常数}$) 在边界处的局部曲率, 因此针对不同的情况 T_1 可以采取不同的处理方法。在多数情况下, 横向网格线在边界处是直的, 这时可以令 $T_1 = 0$, 由 T_0 值直接得到 φ 值。但在其它一些情况下, 如图 3 所示, 它的横向网格线为弧线, 再令 $T_1 = 0$ 显然不合理, 这时可以由两种方法确定: 一是已知横向网格线沿边界的曲率分布, T_1 可直接得到; 二是用一侧差分计算边界两端的值, 然后线性插值到该边界内的各个网格点。上边界的 φ 值用类似的办法求得, 然后将上下边界的值代入插值公式:

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{i,1} + (\varphi_{i,J} - \varphi_{i,1})(j-1)/(J-1) \quad (5)$$

得到矩形区域内每一个网格点上的 φ 值。对于 $\zeta = \text{常数}$ 的边界进行类似的处理, 得到每一个网格点上的 ψ 值, 这时方程 (2) 就可以在规则的矩形区域上进行数值求解, 实现二维平面的网格生成。

3 空间曲面的网格生成

将二维平面的坐标变换方程推广到空间曲面。假定空间曲面的方程为 $z = f(x, y)$, 其中 f 二阶可微, 则它相应的变换方程为:

$$|\bar{r}_\eta|^2(x_{\xi\xi} + \varphi x_\xi) - 2(\bar{r}_\xi \cdot \bar{r}_\eta)x_{\xi\eta} + |\bar{r}_\xi|(x_{\eta\eta} + \psi x_\eta) + f_x G = 0 \quad (6a)$$

$$|\bar{r}_\eta|^2(y_{\xi\xi} + \varphi y_\xi) - 2(\bar{r}_\xi \cdot \bar{r}_\eta)y_{\xi\eta} + |\bar{r}_\xi|(y_{\eta\eta} + \psi y_\eta) + f_y G = 0 \quad (6b)$$

$$\bar{r} = (x, y, z), \quad z = f(x, y) \quad (6c)$$

$$G = J_2^2[(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}]/(1 + f_x^2 + f_y^2) \quad (6d)$$

$$J_2 = \partial(x, y)/\partial(\xi, \eta) = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (6e)$$

其中 J_2 为二阶雅可比行列式。方程 (4) 仍用于确定 $\eta = \text{常数}$ 的边界上的参数 φ , 不同的是此时的 $\bar{r}$ 具有三维意义。

4 三维网格生成

在对围成空间区域的各个面进行网格生成的基础上, 可以实现三维网格生成。对于任意空间区域, Thomas 方法的变换方程为:

$$\alpha_1(\bar{r}_{\xi\xi} + \varphi \bar{r}_\xi) + \alpha_2(\bar{r}_{\eta\eta} + \psi \bar{r}_\eta) + \alpha_3(\bar{r}_{\zeta\zeta} + \omega \bar{r}_\zeta) + 2(\beta_1 \bar{r}_{\xi\eta} + \beta_2 \bar{r}_{\eta\zeta} + \beta_3 \bar{r}_{\xi\zeta}) = 0 \quad (7)$$

$$\bar{r} = (x, y, z) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= J_3^2(\nabla \xi \cdot \nabla \xi) & \alpha_2 &= J_3^2(\nabla \eta \cdot \nabla \eta) & \alpha_3 &= J_3^2(\nabla \zeta \cdot \nabla \zeta) \\ \beta_1 &= J_3^2(\nabla \xi \cdot \nabla \eta) & \beta_2 &= J_3^2(\nabla \eta \cdot \nabla \zeta) & \beta_3 &= J_3^2(\nabla \zeta \cdot \nabla \xi) \end{aligned} \quad (9)$$

其中 J_3 为逆变换的雅可比行列式:

$$J_3 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \quad (10)$$

方程 (9) 中的梯度项由下面的公式给出:

$$\nabla \xi = J_3^{-1}(\bar{r}_\eta \times \bar{r}_\zeta) \quad \nabla \eta = J_3^{-1}(\bar{r}_\zeta \times \bar{r}_\xi) \quad \nabla \zeta = J_3^{-1}(\bar{r}_\xi \times \bar{r}_\eta) \quad (11)$$

将方程 (11) 代入方程 (9) 并整理得:

$$\alpha_1 = (|\bar{r}_\eta||\bar{r}_\zeta|)^2 - (\bar{r}_\eta \cdot \bar{r}_\zeta)^2 \quad \alpha_2 = (|\bar{r}_\zeta||\bar{r}_\xi|)^2 - (\bar{r}_\zeta \cdot \bar{r}_\xi)^2$$

$$\alpha_3 = (|\bar{r}_\xi||\bar{r}_\eta|)^2 - (\bar{r}_\xi \cdot \bar{r}_\eta)^2$$

$$\beta_1 = (\bar{r}_\eta \cdot \bar{r}_\xi)(\bar{r}_\xi \cdot \bar{r}_\xi) - (\bar{r}_\xi \cdot \bar{r}_\eta)|\bar{r}_\xi|^2$$

$$\beta_2 = (\bar{r}_\xi \cdot \bar{r}_\xi)(\bar{r}_\xi \cdot \bar{r}_\eta) - (\bar{r}_\eta \cdot \bar{r}_\xi)|\bar{r}_\xi|^2$$

$$\beta_3 = (\bar{r}_\xi \cdot \bar{r}_\eta)(\bar{r}_\eta \cdot \bar{r}_\xi) - (\bar{r}_\xi \cdot \bar{r}_\xi)|\bar{r}_\eta|^2 \quad (12)$$

与二维情况类似, 三维问题也遇到由边界值确定自由参数 φ 、 ψ 、 ω 的问题, 如图 5、图 6 所示。以上下两个面为例, 假定 ξ 方向上的网格线与这两个面局部垂直, 则有:

$$\bar{r}_\xi \cdot \bar{r}_\xi = 0, \quad \bar{r}_\xi \cdot \bar{r}_\eta = 0 \quad (\text{在 } \xi = 0, 1 \text{ 上}) \quad (13)$$

其中 $\bar{r}_\xi$ 、 $\bar{r}_\eta$ 为上下两个面的局部切矢量, $\bar{r}_\xi$ 为横向网格线的局部切矢量, 进一步假定边界面内的两个局部切矢量也互相垂直, 则:

$$\bar{r}_\xi \cdot \bar{r}_\eta = 0 \quad (14)$$

用 $\bar{r}_\xi$ 点乘方程 (7) 并将约束条件 (13) (14) 代入, 得到参数 φ 的方程为:

$$\varphi = -[T_0 + |\bar{r}_\xi|T'_1 + T_2] \quad (\xi = 0, 1) \quad (15)$$

$$T'_1 = (\bar{r}_\xi \cdot \bar{r}_{\xi\xi})/(|\bar{r}_\xi||\bar{r}_\xi|^2), \quad T_2 = (\bar{r}_\xi \cdot \bar{r}_{\eta\eta})/|\bar{r}_\eta|^2 \quad (15a)$$

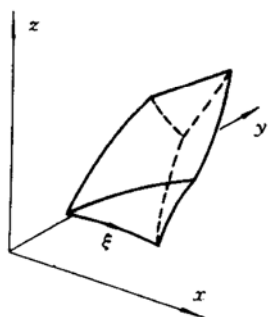


Fig. 5 3-D physical area

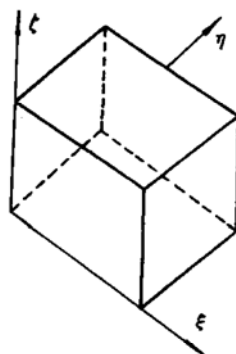


Fig. 6 3-D calculated area

其中 T_0 的表达式与方程 (4) 相同, T_0 、 $\bar{r}_\xi$ 、 T_2 可由上下两个面的边界值直接确定, T_1 的物理意义仍为 ξ 方向上横向网格线的局部曲率, 与以前的确定办法相同。一般情况下, 一个参数在四个面上有定义, 如 φ 在除 $\xi = \text{常数}$ 的两个面之外有定义, 为了在内部点得到光滑的参数值, 也需要进行线性插值, 以参数 φ 为例, 需要在 $\xi = i$ 的每个面上求解方程 $\varphi_{\xi\eta} = 0$ 。

5 算 例

目前, 椭圆方程的解法较多, 本文采用了对多维问题收敛速度较快的交替方向的线超松弛迭代方法求解各个椭圆离散方程, 并实现了强制偏流喷管内的三维网格生成, 图 7 为四个喉孔, 偏转角为 30° 时的网格图, 图 8 为六个喉孔, 偏转角为 30° 时的网格图。从图中可以看出, 在靠近壁面处网格具有充分的密集度, 在整个物理区域内具有良好的正交性。三维网格

的生成,提高了数值计算的准确性和程序的通用性。

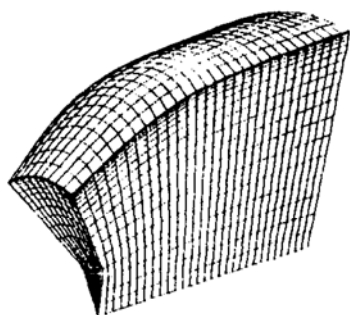


Fig. 7 Grid diagram with 4 throat ports

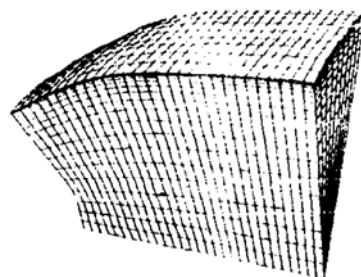
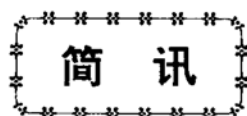


Fig. 8 Grid diagram with 6 throat ports

参 考 文 献

- [1] Thompson J F, Thmas F C, Mastin C S. Boundary Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing any Number of Arbitrary Two Dimensional Bodies. Journal of Computational Physics, 1974, 15: 299~319
- [2] Mastin C W, Thompson J F. Transformation of Three Dimensional Regions onto Rectangular Regions by Elliptic System. Numerical Mathematics, 1978, 29(4): 397~407
- [3] Thomas P D, Middlecoff J F. Direct Control of the Grid Point Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations. AIAA Journal 1980, 17: 652~656
- [4] Thomas P D. Composite Three-Dimensional Grids Generated by Elliptic Systems. AIAA Journal 1982, 20 (9): 1195~1202



《推进技术》第六届编辑委员会在深圳召开

第六届《推进技术》编辑委员会于1995年4月4日至6日在深圳召开。会议中心内容是研讨全面提高期刊质量及效益。会议由编委会副主任阎雍贵同志主持。编委会主任刘兴洲同志就第六届编委组成作了说明,并宣讲了《推进技术》的宗旨和办刊方针和编委的职责。戴耀松主编向委员们传达了航天总公司第四次科技期刊工作会议精神并代表第五届编委会和编辑部作了工作报告。与会委员对《推进技术》在1994年航天系统科技期刊评比中又获一等奖感到由衷的高兴,并为全面提高期刊的质量和效益积极献计献策。杜磊委员根据编委们的发言,就坚持办刊宗旨、提高刊物质量、扩大期刊影响以及进一步发挥编辑人员积极性、创造性等问题作了总结发言。

根据编委会章程,在会议期间进行了编委调整和补充。第六届编委会由32人组成(名单见封四)

通讯员