

粘弹性泊松比与动态复数泊松比的研究*

赵 伯 华

(北京理工大学飞行器工程系, 北京, 100081)

摘 要: 论述了静态粘弹性泊松比与动态复数泊松比的各种精确与近似表达式及其测试方法, 通过实验计算出一种复合固体推进剂的粘弹性泊松比。本文对获得固体推进剂的精确粘弹性泊松比值具有重要实用意义。

主题词: 泊松比, 材料力学, 材料性能, 固体推进剂, 粘弹性, 弹性模量

分类号: O345, V512

AN INVESTIGATION ON VISCOELASTIC POISSON'S RATIO AND DYNAMIC COMPLEX POISSON'S RATIO

Zhao Bohua

(Dept. of Flight Vehicle Engineering, Beijing Inst. of Technology, Beijing, 100081)

Abstract: Various accurate and approximate formulations for static viscoelastic poisson's ratio and dynamic complex poisson's ratio are discussed. Formulation of viscoelastic poisson's ratio for a composite solid propellant is given based on experiments and computations. This paper is available to obtain accurate viscoelastic poisson's ratio of solid propellant.

Subject terms: Poisson's ratio, Mechanics of material, Material property, Solid propellant, Viscoelasticity, Elastic modulus

1 引 言

线弹性材料的泊松比 ν 是一个常数, 而适用于固体推进剂等粘弹性材料的泊松比是一个与温度和载荷作用时间(或频率)相关的特性参量。根据载荷的性质分别称为静态粘弹性泊松比 $\nu(t)$ 和动态复数泊松比 $\nu^*(i\omega)$ 。实际分析计算表明, 泊松比的很小变化, 对固体火箭装药结构完整性分析结果影响很大。因此, 只有采用 $\nu(t)$ 或 $\nu^*(i\omega)$ 的精确表达式及其相应的精确

* 本文 1994 年 5 月 2 日收到, 本课题是部级预研基金资助项目

测试方法, 才能获得准确可靠的结果。

2 粘弹性泊松比的精确表达式

弹性泊松比 ν 定义为单轴拉伸载荷作用下, 试件横向应变 ϵ_y 与纵向应变 ϵ_x 之比的负值, 即

$$\nu = -\epsilon_y/\epsilon_x \quad (1)$$

粘弹性泊松比 $\nu(t)$ 表征在拉伸静载作用下, 横向应变 $\epsilon_y(t)$ 对纵向应变 $\epsilon_x(t)$ 的响应。由于试件材料的粘弹性, 在外载作用下要产生松弛或蠕变, 而且横向应变响应 $\epsilon_y(t)$ 滞后于纵向变形历史 $\epsilon_x(t)$; 即 $\nu(t)$ 与 $\epsilon_y(t)$ 、 $\epsilon_x(t)$ 相关, 是横向变形的一个记忆函数。因此 $\nu(t)$ 的精确表达式就不像 ν 那么简单, 也不能由实测的 $\epsilon_y(t)$ 和 $\epsilon_x(t)$ 通过简单的代数运算求得精确的 $\nu(t)$ 值。

2.1 微分型 $\nu(t)$ 表达式

应力及应变张量 $\sigma_{ij}(t)$ 、 $\epsilon_{ij}(t)$, 应力及应变偏张量 $S_{ij}(t)$ 、 $e_{ij}(t)$, 应变及应力球张量 $\epsilon_{kk}(t)$ 、 $\sigma_{kk}(t)$, 根据粘弹性理论其微分型本构方程为^[1]

$$\sigma_{ij}(t) = S_{ij}(t) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}(t) \quad (2)$$

$$\epsilon_{ij}(t) = e_{ij}(t) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\epsilon_{kk}(t) \quad (3)$$

$$e_{ij}(t) = \frac{P_1}{Q_1}S_{ij}(t) \quad (\text{剪切形变}) \quad (4)$$

$$\epsilon_{kk}(t) = \frac{P_2}{Q_2}\sigma_{kk}(t) \quad (\text{体积形变}) \quad (5)$$

$$\text{式中 } P_1 = \sum_{i=0}^m a_i \partial^i / \partial t^i; \quad Q_1 = \sum_{i=0}^m b_i \partial^i / \partial t^i;$$

$$P_2 = \sum_{i=0}^n a_i \partial^i / \partial t^i; \quad Q_2 = \sum_{i=0}^n b_i \partial^i / \partial t^i;$$

δ_{ij} 为克罗内克符号; P_1/Q_1 为剪切算子柔量; P_2/Q_2 为体积算子柔量。由式 (2) ~ (5) 分析推导可得

$$(Q_1 P_2 - Q_2 P_1)\sigma_x = 3Q_1 Q_2 \epsilon_y \quad (6)$$

$$(Q_1 P_2 + 2Q_2 P_1)\sigma_x = 3Q_1 Q_2 \epsilon_x \quad (7)$$

由式 (6) 和式 (7) 得 $\nu(t)$ 的微分算子表达式为

$$(\nu(t) = (Q_2 P_1 - Q_1 P_2) / (Q_1 P_2 + 2Q_2 P_1)) \quad (8)$$

对式 (8) 求拉氏变换, 则得 $\nu(t)$ 的微分型拉氏变换式为

$$\bar{\nu}(s) = (\bar{Q}_2(s)\bar{P}_1(s) - \bar{Q}_1(s)\bar{P}_2(s)) / (\bar{Q}_1(s)\bar{P}_2(s) + 2\bar{Q}_2(s)\bar{P}_1(s)) \quad (9)$$

对式 (9) 求拉氏逆变换得微分型 $\nu(t)$ 精确表达式为

$$\nu(t) = L^{-1}[\bar{\nu}(s)] \quad (10)$$

设 P/Q 为拉伸算子柔量, 同理得其它二种 $\nu(t)$ 的微分算子表达式为

$$(QP_1 - PQ_1)/PQ_1; (PQ_2 - P_2Q)/2PQ_2 \quad (11)$$

$\nu(t)$ 的具体表达式取决于载荷历史及所选的力学模型, 因微分算子依不同的力学模型而具有不同的形式。当选用简单的二元件模型则不能真实反映 $\nu(t)$; 而选用多元件模型, 把微分算子转换成多项式, 通过实验由多项式反算拟合又很烦。若选用积分型 $\nu(t)$ 表达式则可直接引用实验数据, 使用方便。

2.2 积分型 $\nu(t)$ 表达式

对线粘弹性材料, 定义像域泊松比为

$$\bar{\nu}(s) = -\bar{\epsilon}_y(s)/\bar{\epsilon}_x(s) \quad (12)$$

式中 s 为复变量, 假设蠕变是在定载荷 σ_0 作用下产生的, 则单轴拉伸时的应力应变关系的拉氏变换为

$$\bar{\sigma}_x(s) = \frac{\sigma_0}{s} = \bar{E}(s)\bar{\epsilon}_x(s) \quad (13)$$

$$\bar{\nu}(s) = -\frac{1}{\sigma_0}\bar{\epsilon}_y(s) \cdot s\bar{E}(s) \quad (14)$$

根据卷积定理, 对式 (14) 求拉氏逆变换得第一个积分型 $\nu(t)$ 精确表达式为

$$\nu(t) = -\frac{1}{\sigma_0} \left[\int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_y(\tau)}{\partial \tau} d\tau + E(t) \cdot \epsilon_y(0) \right] \quad (15)$$

如果已知 $E(t)$ 和 $\epsilon_y(t)$ 的实验结果, 则可由式 (15) 求得精确的 $\nu(t)$ 。

由弹性力学可知泊松比 ν 与拉伸模量 E 、剪切模量 G 、体积模量 K 、剪切柔量 J 、体积柔量 B 有如下相互关系。

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{EJ}{2} - 1 \quad (16)$$

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{E}{6K} = \frac{1}{2} - \frac{EB}{6} \quad (17)$$

$$\nu = (3K - 2G)/(6K + 2G) \quad (18)$$

根据弹性/粘弹性对应原理, 以 $s\bar{\nu}(s)$ 、 $s\bar{E}(s)$ 、 $s\bar{G}(s)$ 、 $s\bar{J}(s)$ 、 $s\bar{K}(s)$ 和 $s\bar{B}(s)$ 分别取代弹性常数 ν 、 E 、 G 、 J 、 K 和 B 即可求得式 (16) ~ (18) 的拉氏变换式为

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}(s) &= \bar{E}(s) \cdot s\bar{J}(s)/2 - 1/s \\ s\bar{\nu}(s) &= (\bar{E}(s) - 2\bar{G}(s))/2\bar{G}(s) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}(s) &= 1/2s - \bar{E}(s) \cdot s\bar{B}(s)/6 \\ s\bar{\nu}(s) &= (3\bar{K}(s) - \bar{E}(s))/6\bar{K}(s) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

或

$$\bar{\nu}(s) = (3\bar{K}(s) - 2\bar{G}(s)) / (6\bar{K}(s) + 2\bar{G}(s)) \quad (21)$$

分别对式 (19) ~ (21) 求拉氏逆变换, 则得

$$\left. \begin{aligned} \nu(t) &= \frac{1}{2} \left\{ E(t)J(0) + \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial J(\tau)}{\partial \tau} d\tau - 2 \right\} \\ \text{或} \quad \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial \nu(\tau)}{\partial \tau} d\tau &= E(t)/2 - G(t)[1 + \nu(0)] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \nu(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left\{ E(t)B(0) + \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right\} \\ \text{或} \quad 6 \int_0^t K(t-\tau) \frac{\partial \nu(\tau)}{\partial \tau} d\tau &= 3K(t)[1 - 2\nu(0)] - E(t) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$[6K(t) + 2G(t)]\nu(0) + \int_0^t [6K(t-\tau) + 2G(t-\tau)] \frac{\partial \nu(\tau)}{\partial \tau} d\tau = 3K(t) - 2G(t) \quad (24)$$

如果已知拉伸松弛模量 $E(t)$ 和剪切蠕变柔量 $J(t)$ 或剪切松弛模量 $G(t)$ 的实验结果, 则可由式 (22) 求得精确 $\nu(t)$; 如果已知 $E(t)$ 和体积蠕变柔量 $B(t)$ 或体积松弛模量 $K(t)$ 的实验结果, 则可由式 (23) 求得精确的 $\nu(t)$; 如果已知 $G(t)$ 和 $K(t)$ 的实验结果则可由式 (24) 求得精确的 $\nu(t)$ 。

2.3 体积应变型 $\nu(t)$ 表达式

根据体积模量 K 的定义得 $K = -p/(\Delta V/V_0)$, 而体积应变 $\Delta V/V_0 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$

因 $\epsilon_x = \sigma_x/E$; $\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\sigma_x/E$; $p = \sigma_x/3$

$$\text{则} \quad \Delta V/V_0 = \sigma_x/E - 2\nu\sigma_x/E = \phi \quad (25)$$

$$\text{得} \quad \nu = \frac{1}{2} - \frac{E}{2\sigma_x} \frac{\Delta V}{V_0} \quad (26)$$

由式 (25) 得 $\Delta V/V_0$ 的拉氏变换式为

$$\bar{\phi}(s) = \bar{\epsilon}_x(s) - 2s\bar{\epsilon}_x(s) \cdot \bar{\nu}(s) \quad (27)$$

利用卷积定理对式 (27) 求拉氏逆变换得

$$\phi(t) = \frac{\Delta V(t)}{V_0} = \epsilon_x(t) - 2 \left[\epsilon_x(0)\nu(t) + \int_0^t \nu(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_x(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \quad (28)$$

设轴向应变速率 R 为常数, 即 $\epsilon_x/t = R$, 则得

$$\phi(t) = Rt - 2R \int_0^t \nu(t-\tau) d\tau \quad (29)$$

对式 (29) 进行积分, 得体积应变型 $\nu(t)$ 精确表达式为

$$\nu(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2R} d[\Delta V(t)/V_0]/dt \quad (30)$$

如果已知 R 和 $\Delta V(t)/V_0$ 的实验结果, 则可由式 (30) 求得精确的 $\nu(t)$ 。

通过上述粘弹泊松比 $\nu(t)$ 的精确表达式的分析研究, 得出三种微分型 $\nu(t)$ 表达式, 六种积分型 $\nu(t)$ 表达式和一种体积应变型 $\nu(t)$ 表达式。它们是开展粘弹性泊松比 $\nu(t)$ 实验研究和获得 $\nu(t)$ 精确结果的理论技术基础。人们可以根据自己已有的实验设备与条件, 选择其中一种 $\nu(t)$ 精确表达式。

2.4 实验与算例

根据一种复合固体推进剂的 $E(t)$ 和 $G(t)$ 的实验结果, 由式 (22) 通过数值积分求得其在 20°C 时 $\nu(t)$ 的计算公式为

$$10^3\nu(t) = 499.761 - 29.5646e^{-0.5t} - 22.3411e^{-0.05t} - 18.0195e^{-0.005t} - 11.3538e^{-0.0005t} \\ - 9.8114e^{-0.00005t} - 7.0186e^{-0.000005t} - 7.7289e^{-0.0000005t} - 3.8681e^{-0.00000005t}$$

文献[5]根据 $E(t)$ 和 $K(t)$ 的实验结果给出了一种固体推进剂的 $\nu(t)$ 结果及其计算公式。上述 $\nu(t)$ 实验计算结果, 可以达到小数点以后三位有效数值。

3 粘弹性泊松比的近似表达式

如果受到测试设备的限制, 无法采用上述精确表达式获得 $\nu(t)$, 在初步计算时则可采用如下的近似式, 通过实验计算获得 $\nu(t)$ 。

当变形不大时, 考虑到 $K(t)$ 随 t 变化小, 假设 $K(t) \cong K$ (常数), 则得第一个近似式为

$$\nu(t) \cong 1/2 - E(t)/6K \quad (31)$$

若令 $\epsilon_x(t) \cong \epsilon_0$ (常数), 则得第二个近似式为

$$\nu(t) \cong -\epsilon_y(t)/\epsilon_0 \quad (32)$$

$\nu(t)$ 与 $\epsilon_y(t)$ 、 $\epsilon_x(t)$ 之间的精确关系式, 由式 (1) 根据对应原理, 通过积分变换得

$$\left. \begin{aligned} -\epsilon_y(t) &= \nu(t)\epsilon_x(0) + \int_0^t \nu(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_x(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\ &= \epsilon_x(t)\nu(0) + \int_0^t \epsilon_x(t-\tau) \frac{\partial \nu(\tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

或

式 (33) 表明: 横向应变响应 $\epsilon_y(t)$ 滞后于纵向变形 $\epsilon_x(\tau)$ 的历程, $\nu(t)$ 是式 (33) 遗传积分的核函数——横向应变的记忆函数; $\nu(t)$ 与 $\epsilon_y(t)$ 、 $\epsilon_x(t)$ 之间是一种遗传积分关系, 而不是简单的代数关系。

如果已知动态贮存泊松比 $\nu'(\omega)$ 和损耗泊松比 $\nu''(\omega)$, 则可由如下近似式求 $\nu(t)$ 。

$$\nu(t) \cong 0.2817 \exp[-(0.108 + 0.015 \lg t)] \nu'(\omega) \big|_{\omega=2/\pi t} \quad (34)$$

$$\nu(t) \cong 0.2817 \exp[-(0.108 + 0.015 \lg t)] (\nu'(\omega) \\ - 0.566 \nu'(0.5\omega) + 0.203 \nu''(\omega)) \big|_{\omega=1/t} \quad (35)$$

4 复数泊松比

在动态载荷作用下, 其动态应变张量 $\tilde{\epsilon}_{ij}(t)$ 与动态应力张量 $\tilde{\sigma}_{ij}(t)$ 、应力球张量 $\tilde{\sigma}_{kk}(t)$ 的关

系可由三维本构方程表示。

$$E^*(i\omega)\tilde{\epsilon}_{ij}(t) = \tilde{\sigma}_{ij}(t) + \nu^*(i\omega)[\tilde{\sigma}_{ij}(t) - \delta_{ij}\tilde{\sigma}_{kk}(t)] \quad (36)$$

式中 $E^*(i\omega)$ 和 $\nu^*(i\omega)$ 分别表示动态拉伸复模量和动态复数泊松比。 $\nu^*(i\omega)$ 表征在动态拉伸载荷作用下, 横向应变 $\epsilon_y(\omega)$ 对纵向应变 $\epsilon_x(\omega)$ 的响应, 因此具有柔量属性。 $\nu'(\omega)$ 和 $\nu''(\omega)$ 分别表示贮存泊松比和损耗泊松比, 则

$$\nu^*(i\omega) = \nu'(\omega) - i\nu''(\omega) = \nu'(\omega)[1 - id_v] \quad (37)$$

式中 d_v 为动态损耗正切, 表示在拉伸试验时横向应变比纵向应变滞后的相位。

如果动载频率在超声范围以上频段, 则 $\nu^*(i\omega)$ 与纵向复模量 $L^*(i\omega)$ 、剪切复模量 $G^*(i\omega)$ 的精确关系为^[8]

$$\nu^*(i\omega) = (L^*(i\omega) - 2G^*(i\omega))/2(L^*(i\omega) - G^*(i\omega)) \quad (38)$$

把上式的实数与虚数分量分开并略去比 1 小得多的 d_G^2 、 d_L^2 和 $d_L d_G$, 则得

$$\nu'(\omega) \cong (L'(\omega) - 2G'(\omega))/2(L'(\omega) - G'(\omega)) \quad (39)$$

$$d_v \cong L'(\omega)G'(\omega)(d_G - d_L)/(L'(\omega) - G'(\omega))(L'(\omega) - 2G'(\omega)) \quad (40)$$

在低于超声范围的频段, 用下式计算 $\nu^*(i\omega)$ ^[8]

$$\nu^*(i\omega) = E^*(i\omega)/2G^*(i\omega) - 1 \quad (41)$$

假设忽略比 1 小得多的 d_G^2 和 $d_G d_E$ 项, 则

$$\nu'(\omega) \cong E'(\omega)/2G'(\omega) - 1 \quad (42)$$

$$\text{和} \quad d_v = [(1 + \nu'(\omega))/\nu'(\omega)](d_G - d_E) \quad (43)$$

如果已知 $\nu(t)$, 根据静动转换关系, 可由如下近似式计算 $\nu'(\omega)$ 和 $\nu''(\omega)$

$$\nu'(\omega) \cong \nu(t) + 0.86[\nu(t) - \nu(2t)] \quad (44)$$

$$\text{或} \quad \nu'(\omega) \cong 3.55\exp(1.09 + 0.017\lg t)\nu(t)|_{t=2/\pi\omega} \quad (45)$$

$$\nu''(\omega) \cong \frac{3.516\exp(1.09 + 0.017\lg t)}{\omega} \left| \frac{d\nu(t)}{dt} \right|_{t=2/\pi\omega} \quad (46)$$

文献 [8] 给出了 $\nu^*(i\omega)$ 、 $\nu'(\omega)$ 和 d_v 的实验计算结果和曲线。

5 表征与测试方法分析

对弹性泊松比、粘弹性泊松比与复数泊松比的各种精确与近似表达式, 显然要求采用不同的测试方法。弹性泊松比已有标准测试方法。美国 ASTM E132/61, 79 规定采用两对引伸计; 中国 GB-2105-80 规定通过测定拉伸模量 E 和剪切模量 G , 由式 (16) 计算获得泊松比 ν 。目前泊松比已发展多种测试方法, 有机测法、电测法和光测法等。

采用接触测试法, 不管接触力多么小对测粘弹性软材料的 $\nu(t)$, 显然是不适宜的; 采用非接触测试方法如激光全息干涉法或光导热塑全息照相法或影像云纹法, 都是测量纯弯曲条件下渐近线之间的夹角 α , 由 $\nu = \tan^2 \alpha$ 计算获得 ν ; 若采用激光散斑法或激光杠杆法或摄影法则由 $\nu = |\Delta\epsilon_y/\Delta\epsilon_x|$ 计算获得 ν 。上述各种非接触光测法, 由于采用弹性泊松比表达式, 测试结果显然是 ν 值。而这些方法又没有考虑试件形状因子对 ν 的影响, 在未确定为国家标准测试方法以前, 其结果仅有相对比较参考价值。

要获得精确 $\nu(t)$ 必须同时满足四个条件:

- (1) 采用 $\nu(t)$ 精确表达式, 而不能采用 $\nu = -\epsilon_y/\epsilon_x$ 或 $\nu = |\Delta\epsilon_y/\Delta\epsilon_x|$;
- (2) 采用非接触测试方法;
- (3) 消除试件形状因子对泊松比测试结果的影响, 被测参量必须符合国家标准测试方法;
- (4) 能获得宽广时间和温度范围的 $\nu(t)$ 变化规律, 特别是 $t=0.01s$ 左右的短时 $\nu(t)$ 值。

采用式 (15) 或 (22) 或 (23) 的 $\nu(t)$ 精确表达式, 其中被测参量 $E(t)$ 、 $G(t)$ 国内已有非接触光学测试设备和国家标准测试方法; $K(t)$ 的测试不受试件形状因子的影响, 也有体积形变实时非接触精确测试系统^[9]。所以满足上述四个条件, 能获得三位有效数的 $\nu(t)$ 值。如果需要动态 $\nu^*(i\omega)$ 或精确的瞬态 $\nu(t)$ 值, 可采用式 (38) 或式 (41) 由超声浸渍法或动态粘弹谱仪测试计算获得。

参 考 文 献

- [1] Christensen R M. Theory of Viscoelasticity. An Introduction Second Edition. New York: Academic Press Inc, 1982
- [2] Ward I M. Mechanical Properties of Solid Polymers. New York: 2nd Ed., Wiley Interscience, 1983
- [3] 金观昌等. 用光导热塑全息照相测量材料的泊松比. 理化检验, 1981(4): 27~30
- [4] 马素贞等. 用激光散斑干涉法测定膨胀石墨的弹性模量与泊松比. 理化检验, 1989(4): 28~31
- [5] 赵伯华. 固体推进剂粘弹泊松比的研究. 北京理工大学学报, 1994(1): 87~90
- [6] Regan F C. Small Strain Modulus and Poisson's Ratio in Viscoelastic Materials. United States Naval Postgraduate School, 1967
- [7] Sim S, Kim K J. A Method to Determine the Complex Modulus and Poisson's Ratio of Viscoelastic Materials for FEM Applications. J of Sound and Vib, 1990, 141(1): 71~82
- [8] Ead B E R, Ean G D D. 聚合物和复合材料的动态性能测试. 上海: 科学技术出版社, 1986
- [9] 赵伯华等. 火箭装药体积形变力学特性的研究. 推进技术, 1984(2): 58~77

简 讯

阿里安 5 通过了决定性试验

欧洲航天局阿里安 5 助推器的主级推进系统在法国的库鲁完成了 280s 的点火试验。1994 年 11 月战船推进剂形状试验论证了法国天融星液氧/液氢低温发动机的点火顺序以及该级流质和电子系统的工作情况。

1995 年初将要进行的第二次试验包括整个第一级飞行结构。助推器仪表舱整流罩真空中最后分离试验已于 11 月 17 日在 NASA 的普拉姆-布鲁克中心完成。阿里 5 的首次飞行定于 1995 年 11 月 29 日进行。其航天飞行将于 1995 年 10 月进行首次商业发射。

龙玉珍 供稿