

长期贮存的固体火箭发动机 药柱的温度应力分析*

冯志刚 周建平

(国防科技大学航天技术系, 长沙, 410073)

摘 要: 分析了固体火箭发动机药柱在长期贮存过程中, 由于温度载荷谱的变化所引起的力学响应。基于粘弹性积分蠕变型本构关系, 推导出了能分析粘弹结构热载荷的有限元模型, 并用它分析了梁、厚壁圆筒与真实固体火箭发动机的热应力问题。

主题词: 固体推进剂火箭发动机, 推进剂药柱, 推进剂可储存性, 粘弹性, 热应力

分类号: V512.3

THE THERMAL STRESS OF SOLID ROCKET MOTOR GRAIN IN STORAGE

Feng Zhigang Zhou Jianping

(Department of Astronautics, National Univ. of Defense Tech., Changsha, 410073)

Abstract: Stress analysis of solid propellant motor when temperature varies in storage is presented in this paper. A viscoelastic finite element model based on integral creep constitutive relation is obtained and applied to the thermal stress analysis for viscoelastic beams, cylinders and solid propellant motors.

Keywords: Solid propellant rocket engine, Propellant grain, Propellant storability, Viscoelasticity, Thermal stress

复合固体推进剂药柱在贮存期间, 由于环境温度载荷谱的变化(贮存温度与固化温度的不同及日常环境温度的变化)以及固体火箭发动机不同结构所用材料的热膨胀系数存在差异, 使药柱在贮存中长期处于交变热应力作用之下。由于这种低周疲劳载荷的作用, 药柱材料的微观结构上会发生损伤与损伤发展, 可能导致药柱结构上出现宏观裂纹, 最终导致药柱和发动机的失效。因此准确地分析固体火箭发动机在贮存期内的热应力谱, 对固体火箭发动机的

* 本文 1993 年 6 月 24 日收到, 本项目为国家自然科学基金资助项目。

结构完整性分析与寿命预估是十分有意义的。但由于药柱材料是一种具有粘弹性特性的高聚物,工程上目前还很难对它进行十分有效的分析,一般是把它简化为弹性结构进行定性的分析,然后在局部考虑其粘弹性效应,导致误差较大。本文基于粘弹性本构关系,用有限元法定量地分析了药柱在环境交变热载荷作用下的响应。算例表明,本文的方法对固体火箭发动机药柱材料的热应力分析,具有较高的精度。

1 有限元模型

1.1 适合有限元分析的增量型本构关系

考虑损伤时线粘弹性材料的本构关系可表示为

$$\sigma = (1 - \omega) \int_{-\infty}^t E(t - \tau) \frac{\partial \epsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1)$$

其中 ω 为损伤变量,定义等效应力 $\bar{\sigma}$ 为

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - \omega)} \quad (2)$$

应力应变关系 (1) 式改写为

$$\bar{\sigma} = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) \frac{\partial \epsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3)$$

若改用蠕变柔量 $J(t)$, 则有

$$\epsilon = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{\partial \bar{\sigma}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4)$$

其中 $J(t)$ 为单轴蠕变柔量,可表为

$$J(t) = J_0 + \sum_{i=1}^N J_i (1 - e^{-t/\tau_i}) \quad (5)$$

对于三轴应力状态并存在热变形的情况,材料内部应变由弹性应变 $\{\epsilon^e\}$ 、粘性应变 $\{\epsilon^v\}$ 和热应变 $\{\epsilon^T\}$ 三部分构成

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^e\} + \{\epsilon^v\} + \{\epsilon^T\} \quad (6)$$

热应变 $\{\epsilon^T\}$ 可表示为

$$\{\epsilon^T\} = \alpha_T \Delta T [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (7)$$

其中 α_T 是热膨胀系数, ΔT 是温度增量。为了有限元分析方便,采用矩阵记法

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{\sigma}_{11} \ \bar{\sigma}_{22} \ \bar{\sigma}_{33} \ \bar{\sigma}_{12} \ \bar{\sigma}_{23} \ \bar{\sigma}_{31}]^T \quad (8a)$$

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \epsilon_{12} \ \epsilon_{23} \ \epsilon_{31}]^T \quad (8b)$$

$$\{\epsilon^e\} = [\epsilon_{11}^e \ \epsilon_{22}^e \ \epsilon_{33}^e \ \epsilon_{12}^e \ \epsilon_{23}^e \ \epsilon_{31}^e]^T \quad (8c)$$

$$\{\epsilon^v\} = [\epsilon_{11}^v \ \epsilon_{22}^v \ \epsilon_{33}^v \ \epsilon_{12}^v \ \epsilon_{23}^v \ \epsilon_{31}^v]^T \quad (8d)$$

弹性应变和蠕变应变由下式确定

$$\{\epsilon^e\} + \{\epsilon^c\} = [ED] \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{\partial \{\bar{\sigma}(\tau)\}}{\partial \tau} d\tau \quad (9)$$

其中

$$[ED] = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (10)$$

因为引入了损伤变量, 所以 (9) 式中 $\{\epsilon^e\} + \{\epsilon^c\}$ 与 $\{\sigma\}$ 是一种积分蠕变型非线性粘弹本构关系。将时间区域离散成 $t_0, t_1, \dots, t_m$ 个时刻。由于 (9) 式中 $\{\bar{\sigma}\}$ 与 $\{\epsilon\}$ 符合粘弹关系, 因此, 对有效应力和有效应变, 可以利用线粘弹叠加原理来导出增量型本构关系。

只要将时间间隔划分得充分小, 即可从 (9) 式得到 t_m 时刻的应变为

$$\{\epsilon^e\} + \{\epsilon^c\} = [ED] \sum_{k=0}^m J(t_m - t_k) \{\Delta \bar{\sigma}\}_k \quad (11)$$

$$\{\Delta \bar{\sigma}\}_k = \{\bar{\sigma}(t_k)\} - \{\bar{\sigma}(t_{k-1})\} \quad (12)$$

在 $\Delta t_{k+1} = t_{k+1} - t_k$ 这段时间内, 总应变增量为

$$\{\Delta \epsilon\}_{k+1} = \{\epsilon\}_{k+1} - \{\epsilon\}_k = \{\Delta \epsilon^e\}_{k+1} + \{\Delta \epsilon^c\}_{k+1} + \{\Delta \epsilon^T\}_{k+1} \quad (13)$$

其中弹性应变增量为

$$\{\Delta \epsilon^e\}_{k+1} = \frac{1}{E_0} [ED] \{\Delta \bar{\sigma}\}_{k+1} \quad (14)$$

在 (14) 中, $E_0 = \frac{1}{J(0)}$ 为弹性模量 (持久模量)。由 (9) 式得到蠕变变增量为

$$\{\Delta \epsilon^c\}_{k+1} = [ED] \sum_{j=0}^k [J(t_{k+1} - t_j) - J(t_k - t_j)] \{\Delta \bar{\sigma}\}_j \quad (15)$$

式 (14) 显然不利于有限元分析。因为, 每个时间步都要求记录下历史 $\{\Delta \bar{\sigma}\}_j$, 从而需要大量内存和时间, 为了克服这一困难, 将 (5) 式代入 (15) 式, 通过推导可得下述适合有限元分析的有用的递推公式

$$[\Delta \epsilon^c]_{k+1} = \sum_{j=1}^N [S_{k+1}^j] J_j \{1 - e^{-\frac{\Delta t_{k+1}}{\tau_j}}\} \quad (16)$$

$$[S_{k+1}^i] = [S_k^i] e^{-\frac{\Delta t_k}{\tau_i}} + [ED][\Delta \bar{\sigma}]_k \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (17)$$

$$[S_0^i] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (18)$$

利用递推公式 (18), 在计算 $[\Delta \epsilon]_{k+1}$ 时, 无需记录全部历史, 而只需贮入 $[S_k]$ 即可, 从而大大节约了计算机内存和计算时间。

由 (6)、(14) 式得到应力增量为:

$$[\Delta \tilde{\sigma}]_{k+1} = [E](\{\Delta \epsilon\}_{k+1} - \{\Delta \epsilon^e\}_{k+1} - \{\Delta \epsilon^T\}_{k+1}) \quad (19)$$

其中 $[E] = E_0[ED]^{-1}$ 为通常的弹性矩阵。

t_{k+1} 时刻的总应力和总应变为

$$\{\tilde{\sigma}\}_{k+1} = \{\tilde{\sigma}\}_k + \{\Delta \tilde{\sigma}\}_{k+1} \quad (20)$$

$$\{\epsilon\}_{k+1} = \{\epsilon\}_k + \{\Delta \epsilon\}_{k+1} \quad (21)$$

由等效应力的定义可导出以下关系

$$\begin{aligned} \{\Delta \tilde{\sigma}\}_{k+1} &= \{\tilde{\sigma}\}_{k+1} - \{\tilde{\sigma}\}_k = \frac{1}{1 - \omega_{k+1}} \{\sigma\}_{k+1} - \frac{1}{1 - \omega_k} \{\sigma\}_k \\ &= \frac{\{\Delta \sigma\}_{k+1}}{(1 - \omega_{k+1})} + \frac{\Delta \omega_{k+1} \{\sigma\}_k}{\{(1 - \omega_k)(1 - \omega_{k+1})\}} \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $\Delta \omega_{k+1} = \omega_{k+1} - \omega_k$ 为损伤变量的增量。

联立 (19) 和 (22) 式, 得到增量型本构关系为

$$\{\Delta \sigma\}_{k+1} = (1 - \omega_{k+1})[E](\{\Delta \epsilon\}_{k+1} - \{\Delta \epsilon^e\}_{k+1} - \{\Delta \epsilon^T\}_{k+1}) - \frac{\Delta \omega_{k+1}}{1 - \omega_k} \{\sigma\}_k \quad (23)$$

其中 $\{\Delta \epsilon^e\}_{k+1}$ 由 (15) 式计算, $\Delta \omega_{k+1}$ 由损伤演变方程得到。

1.2 有限元分析法

采用有限元方法进行结构应力分析时, 单元位移和应变分别表示为

$$\{u\} = [N]\{u_i\} \quad (24a)$$

$$\{\epsilon\} = [B]\{u_i\} \quad (24b)$$

其中 $\{u_i\}$ 是节点位移。时刻 t_k 和 t_{k+1} 的位移和应变增量为

$$\{\Delta u\}_{k+1} = [N]\{\Delta u_i\}_{k+1} \quad (25a)$$

$$\{\Delta \epsilon\}_{k+1} = [B]\{\Delta u_i\}_{k+1} \quad (25b)$$

其中 $\{\Delta u_i\}_{k+1} = \{u_i\}_{k+1} - \{u_i\}_k$ 是节点位移增量。由虚功原理, 在时刻 t_k 和 t_{k+1} , 我们分别有

$$\int_V \{\sigma\}_k^T \{\delta \epsilon\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{p\}_k dV + \int_{VS} \{\delta u\}^T \{P\}_k dS \quad (26a)$$

$$\int_V \{\sigma\}_{k+1}^T \{\delta \epsilon\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{p\}_{k+1} dV + \int_S \{\delta u\}^T \{P\}_{k+1} dS \quad (26b)$$

其中 $\{\delta u\}$ 是位移, $\{\delta \epsilon\}$ 是虚应变, $\{p\}$ 是体积力, $\{P\}$ 是边界上的面积力或集中力。

由 (26b) 减去 (26a) 得到

$$\int_V \{\Delta \sigma\}_{k+1}^T \{\delta \epsilon\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{\Delta p\}_{k+1} dV + \int_S \{\delta u\}^T \{\Delta P\}_{k+1} dS \quad (27)$$

将 (23) 式代入 (27) 式, 可导出如下表征结构总体平衡的非线性方程

$$[K(\omega_k)]\{\Delta u_i\}_{k+1} = \{\Delta Q(\omega_k)\} + \{\Delta Q^c(\omega_k, \Delta \omega_{k+1})\} \quad (28)$$

其中

$$[K(\omega_k)] = \int_V (1 - \omega_k) [B]^T [E] [B] dV \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta Q(\omega_k)\} &= \int_V [N]^T \{\Delta p\}_{k+1} dV + \int_S [N]^T \{\Delta P\}_{k+1} dS \\ &+ \int_V (1 - \omega_k) [B]^T [E] (\{\Delta \epsilon\}_{k+1} + \{\Delta \epsilon^T\}_{k+1}) dV \end{aligned} \quad (29b)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta Q^c(\omega_k, \Delta \omega_{k+1})\} &= \int_V \Delta \omega_{k+1} [B]^T \\ &\left[[E] (\{\Delta \epsilon\}_{k+1} - \{\Delta \epsilon^c\}_{k+1} - \{\Delta \epsilon^T\}_{k+1}) + \frac{1}{1 - \omega_k} \{\sigma\}_k \right] dV \end{aligned} \quad (29c)$$

在每个时间增量步中, $[K(\omega_k)]$ 和 $\{\Delta Q(\omega_k)\}$ 仅是前一时间步损伤变量的函数, 只需计算一次, 失衡力矢量 $\{\Delta Q^c\}$ 用迭代方法解出, 迭代收敛判据取为

$$\frac{\sum_i \left| \Delta u_{i,k+1}^{(j+1)} - \Delta u_{i,k+1}^{(j)} \right|}{\sum_i \left| \Delta u_{i,k+1}^{(j+1)} \right|} < \epsilon \quad (30)$$

其中 $\Delta u_{i,k+1}^{(j)}$ 是 i 节点位移在第 k 个时间增量步时迭代 j 次的位移增量, ϵ 是充分小的正数。

对于二维平面应力或平面应变问题, 选择八节点等参元进行有限元分析。相应的等参公式参考文献 [3]。下面用此模型求解粘弹结构的热应力问题。

2 数值算例与结论

(1) 两端固定的热应力梁, 有限元单元网络图如图 1。材料的固化温度 $T_s = 333K$, 松弛模量形为 $E(t) = E_0 + E_1 e^{-\frac{t}{t_1}} \frac{N}{M^2}$, 其中 $E_0 = E_1 = 3 \times 10^6$, $t_1 = 10^{-4}$ 。

(a) 模拟一种一天的温度变化为一个正弦波的温度载。取温度谱为: $T = T_0 + T_1 \sin \frac{2\pi}{24 \times 60} t$, 其中 $T_0 = 293K$, $T_1 = 10$, t 以分为单位。可以推导出热应力解为:

$$\sigma(t) = -\alpha_T \{ E_0 T_1 \sin \alpha_2 t - E_1 \alpha_2 T_1 e^{-\alpha_1 t} \frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 t} \cos \alpha_2 t - \alpha_1 + \alpha_2 e^{\alpha_1 t} \sin \alpha_2 t}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \}$$

$$-(E_0 + E_1)(T_0 - T_s)\} \quad (31)$$

其中 $\alpha_1 = -\frac{1}{t_1}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{24 \times 60}$ 。取 $\alpha_T = 0.0001$ 时, 结果如表 1:

表 1 两端固定梁的热力解

时间 (min)	0.0	400	800	1200	1490
理论解 (10^{-2})	2.4	1.81	2.60	2.92	2.25
有限元 (10^{-2})	2.40	1.805	2.597	2.906	2.253

(b) 取 $T = T_0 + T_1 \sin 2\pi t + T_2 \sin \frac{2\pi t}{365}$, 即模拟每年的温度变化也是一个正弦波的情形, 其中 t 以天为单位。取 $T_2 = 10$, 求得的响应见图 2。

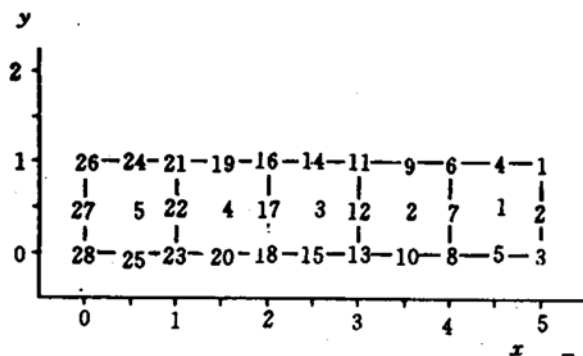


图 1 三向简支热应力梁单元网络图
(结构应力分析有限元单元网络图)

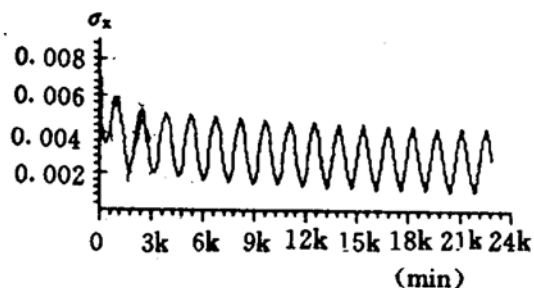


图 2 热应力梁轴向应力变化图
(节点 1 的应力时间曲线)

(2) 厚壁圆筒的热应力解。一个内半径为 5, 外半径为 10 的圆筒, 有限元网络图见图 3。取 $\alpha_T = 0.001$, $\Delta T = -40H(t)$, $\mu = 0.495$ 。图 4 为圆筒内壁环向应力随时间的变化图, 表 2 为应力解结果。

表 2 圆筒热应力解结果

半径 R	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
理论解 σ_θ	0.2058	0.1744	0.1554	0.1431	0.1347	0.1286
有限元 σ_θ	0.2063	0.1750	0.1559	0.1435	0.1350	0.1288
理论解 σ_r	0.0	0.0314	0.0504	0.0627	0.0711	0.0772
有限元 σ_r	0.0005	0.0308	0.0499	0.0623	0.0708	0.0770

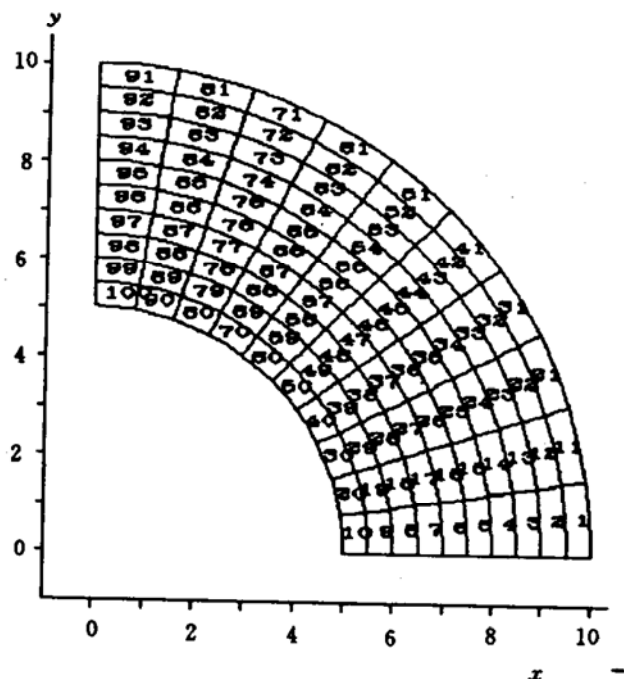


图3 厚壁圆筒单元网络图

中最外层为壳体, 材料常数为: $E_c = 2.1 \times 10^7 (\text{N/m}^2)$, $\mu_c = 0.3$ 。

(a) 取温度谱为算例1中(2)的形式, 模拟每年及每天的温度变化为一正弦波的情形。求得药柱A点的第一、第二主应力图如图6, 7。

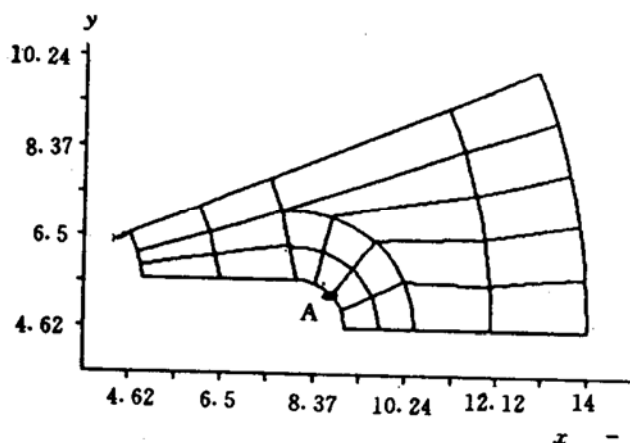


图5 受热载药柱计算部分单元网络图

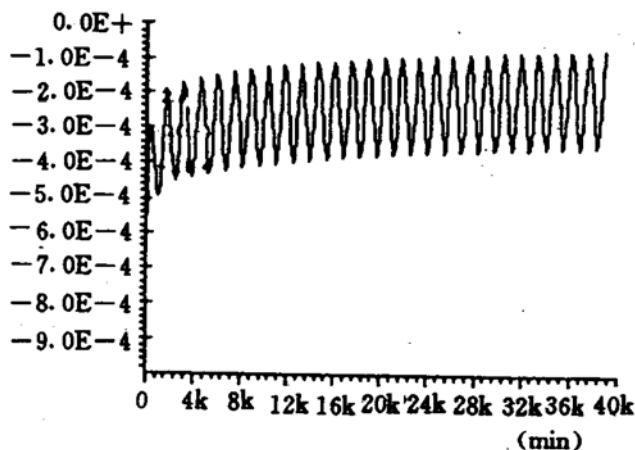


图6 受热载药柱A点第一主应力变化图

(b) 取 $T = T_0 + T_1 \sin \frac{2\pi t}{91} + T_2 \sin \frac{2\pi t}{365}$, 即模拟每年及每个季度的温度变化为一个正弦波的情形, 其中 t 以天为单位。其它参数同上。当药柱贮存三年左右时, A点的第一、第二主应力变化分别见图8、9。图10绘制了在药柱贮存11天时, 药柱半圆孔四分之一圆弧段上第一主应力的分布图。

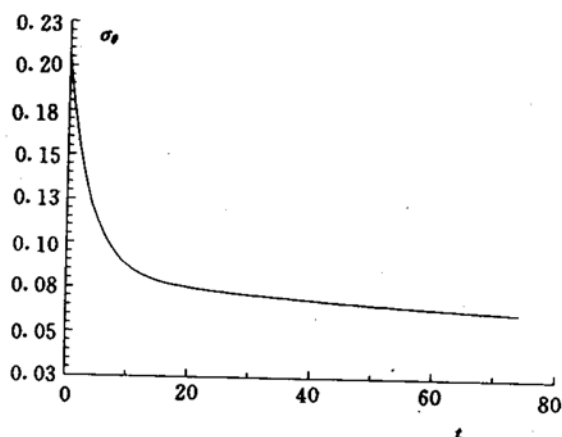


图4 厚壁圆筒内壁环向应力变化图

(3) 固体火箭发动机药柱的热应力解。

本文分析了一个八星孔的发动机药柱, 由于结构与受载的对称性, 可以只取半个星孔进行有限元计算。单元网络图如图5。其

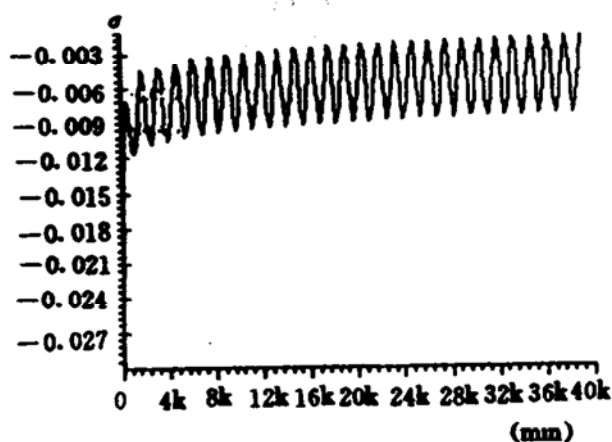


图7 受热载药柱A点第二主应力变化图

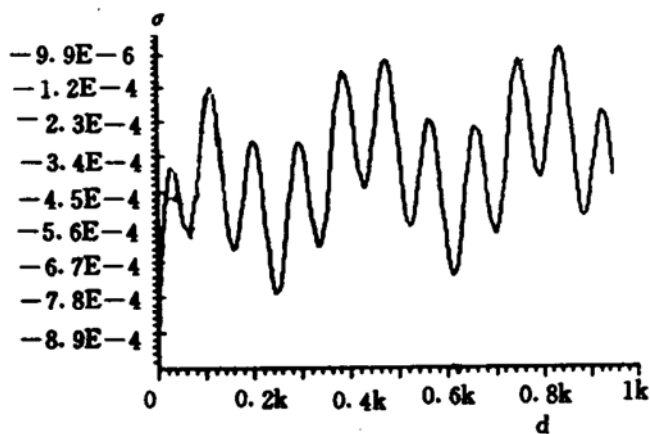


图8 受热载药柱A点第一主应力图

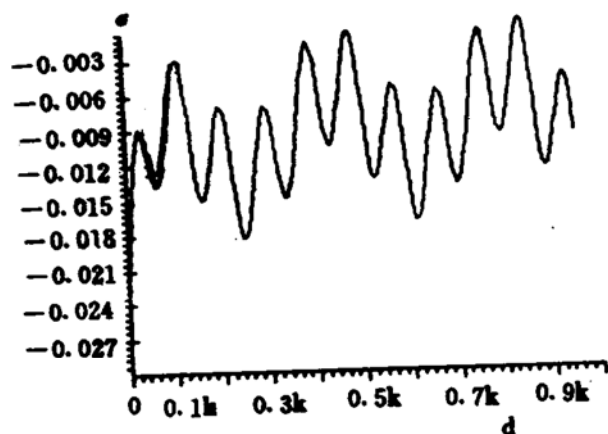
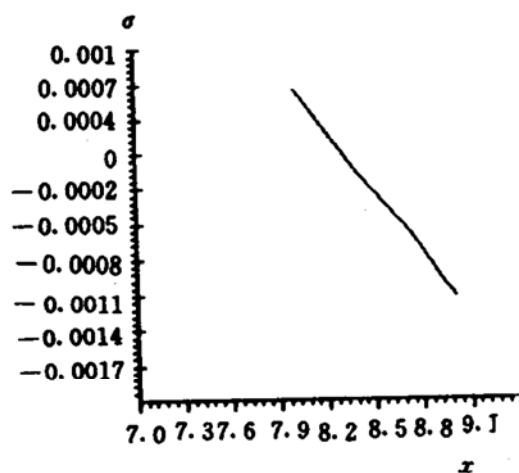


图9 受热载药柱A点第二应力图

图10 星孔内表面(四分之一圆周)
截面11天时第一主应力图

参 考 文 献

- [1] Christensen R M. Theory of Viscoelasticity, An Introduction. Academic Press, 1982: 1-182
- [2] 周建平, 冯志刚, 唐国金等. 复合固体推进剂老化本构关系和固体火箭发动机应力分析方法研究. 国防科大, 1993. 6
- [3] Zienkwich O C. 有限元法. 北京: 科学出版社, 1985