

固体火箭发动机燃烧稳定性预估的 三维通用计算方法*

谢蔚民 李 江 周金仙

(西北工业大学航天工程学院, 西安, 710072)

闵 斌 赵湘恒

(上海新力动力设备研究所, 上海, 200127)

摘 要: 针对一个变截面开槽管状装药单室双推力发动机, 讨论如何应用三维声学有限元分析来确定燃烧室内腔的声学特性, 以及在此基础上进行发动机燃烧稳定性预估的三维计算方法, 目的是为研制部门提供通用的软件。应用本文编制的计算程序进行试算的结果表明: (1) 燃烧室内腔前 10 阶固有振型的预估误差不大于 3%; (2) 该发动机的燃烧稳定性接近临界状态, 与地面试车情况定性一致。最后, 还就声学分析的验证, 减少占用内存及计算机时, 以及预估方法的进一步改进等问题做了必要的讨论。

主题词: 固体推进剂火箭发动机, 燃烧稳定性, 有限元法

分类号: V435.12

A VERSATILE 3-DIMENSIONAL CALCULATING METHOD OF COMBUSTION STABILITY PREDICTION FOR SOLID ROCKET MOTORS

Xie Weimin Li Jiang Zhou Jixian

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnic University, Xi'an, 710072)

Min Bing Zhao Xiangheng

(Shanghai Xinli Power Equipment Research Institute, Shanghai, 200127)

Abstract: A method of 3-dimensional acoustic finite element analysis and combustion stability prediction for a slotted-tube dual thrust solid rocket motor is pre-

* 本文 1994 年 1 月 17 日收到

sented, and a versatile computer code has been programmed. The calculating results demonstrate: (1) Calculation error for ten lower natural acoustic modes in the cavity of combustion chamber is less than 3%; (2) Combustion stability of the motor is close to criticality, which is qualitatively consistent with results of firing tests. By the end of this paper, some problems, for example, verification of acoustic analysis, reduction of machine time and internal storage, and improvement of versatility are also discussed.

Keywords: Solid propellant rocket engine, Combustion stability, Finite element method

1 前言

固体火箭发动机的不稳定燃烧现象涉及燃烧室内的燃烧、气体流动及声波运动等过程。由于装药几何形状复杂多样, 以上过程宜用三维模型描述。然而目前还不可能实现如此复杂的三维计算, 因而不得不做出各种简化。通常, 将燃烧室内腔看作一个封闭的声腔, 燃面和喷管则分离出来作为边界处理。在平均流动马赫数不大的情况下, 认为平均流动主要影响喷管声能对流, 所以可将平均流简化为轴向一维流动。至于声波运动, 为了便于分析, 常根据内腔的特定几何形状将其简化为一维问题或二维轴对称问题。文献 [1] 是应用二维有限元分析对锥柱形装药发动机进行声学分析的例子。实际上, 切向振型并不具有轴对称性, 所以这种方法含有明显的近似性, 而且适用范围有限。本文将针对一个采用变截面通道槽管式装药单室双推力发动机, 讨论如何应用三维声学分析来确定燃烧室内腔的声学特性, 以及在此基础上进行燃烧稳定性预估三维计算的方法。目的是为研制部门提供一套通用的计算软件。

2 三维声学有限元分析

2.1 数学模型

简谐声场可用熟知的亥姆霍茨方程描述,

$$\nabla^2 p + K^2 p = 0 \quad (1)$$

在线性分析中, 假定声场边界近似为刚性壁面, 故边界条件为

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (2)$$

上式中, p 为声压振幅, K 为波数, n 表示边界面的外法向。

按照伽辽金法, 在一个有限单元内, 设

$$p = \sum_{j=1}^m N_j^e p_j^e \quad (3)$$

其中, N_j^e 为有限单元内的插值函数, p_j^e 为节点 j 上的声压振幅值, m 为每一有限单元的节点数。将 (3) 式代入 (1) 式后与插值函数在单元上做内积, 并取全计算域 (内腔) 上的和为零, 即

$$\sum_{e=1}^l \int_{V_e} N_K \left[\nabla^2 (N_j p_j^e) + K^2 (N_j p_j^e) \right] dV = 0$$

此处 1 为全计算域上的单元总数。应用格林定理做降阶处理, 并将 (2) 式代入即得

$$\sum_{e=1}^l [A^e P^e - K^2 B^e P^e] = 0 \quad (4)$$

其中, A^e 、 B^e 均为 $m \times m$ 阶方阵, 其元素为

$$a_{ij} = \int_{V_e} \nabla N_K \nabla N_j dV \quad (5)$$

$$b_{ij} = \int_{V_e} N_K N_j dV \quad (6)$$

$$(j, K = 1, 2 \cdots m)$$

通过矩阵加法运算, 由 (4) 式可得有限元方程

$$(A - K^2 B)P = 0 \quad (7)$$

A 、 B 为整体系数矩阵。对上式而言, 要使 P 有非零解, 必须

$$|A - K^2 B| = 0 \quad (8)$$

由此式可解出 K^2 , 然后由 (7) 式解得 P 。 K^2 为满足 (8) 式的特征值, P 为对应的特征向量。这样一来, 计算声场固有振型和频率 (或波数 K) 的问题便转化为求特征值和特征向量的数学问题了。

2.2 有限元及插值函数的选择

为便于对边界形状复杂的声场做贴体计算, 本文选用三维八节点等参元, 如图 1 所示, 其中 (b) 为母元。母元各节点的插值函数 (在局部坐标系中) 为

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) \quad (9)$$

ξ_i , η_i , ζ_i 为各节点的坐标值, 见下表:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
ξ_i	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
η_i	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
ζ_i	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

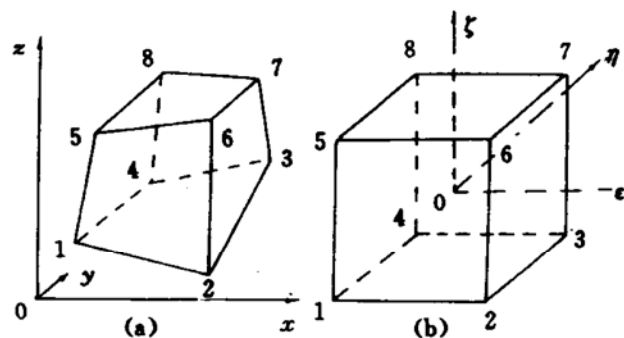


图 1 有限单元

整体坐标与局部坐标的变换关系为

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^8 N_i z_i \quad (10)$$

式中, x_i, y_i, z_i 是各单元节点在整体坐标系中的坐标值。

2.3 A, B 矩阵元素的计算

在三维直角坐标系中, (5) 式和 (6) 式应写为

$$a_{jk} = \int_{V_e} \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dV + \int_{V_e} \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dV + \int_{V_e} \frac{\partial N_k}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} dV \quad (11)$$

$$b_{jk} = \int_{V_e} N_k N_j dV \quad (12)$$

为了在局部坐标系中完成各项积分, 需做坐标变换并用高斯数值积分法算得 a_{jk}, b_{jk} 并形成单元矩阵 A^e, B^e 之后, 即可按照节点局部编号与整体编号之间的对应关系完成矩阵加法运算 (或称为单元矩阵向整体矩阵的“投放”), 最终形成整体系数矩阵 A 和 B 。

2.4 特征值与特征向量的计算

矩阵 A, B 均为高阶矩阵, 一般的求解特征值的方法不再适用, 所以本文采用求解大型特征值问题的 ESPACK 程序系列^[3], 其计算过程如下。首先将 (7) 式改写为

$$AX = \lambda BX \quad (13)$$

其中, $\lambda = K^2, X = P$ 。求解上式的特征值及特征向量属于广义特征值问题。因为 A, B 均为实对称矩阵, 可将 B 分解为 $B = L \times L^T$ 。这里, L 是 B 的下三角矩阵, L^T 是 L 的转置。这样便将上述问题转化为 $PZ = \lambda Z$ 的标准对称矩阵特征值问题。其中, $P = L^{-1} A (L^{-1})^T, Z = L^T X$ 。显然, $AX = \lambda BX$ 的特征值就是 $PZ = \lambda Z$ 的特征值, 其特征向量 X 可由 $Z = L^T X$ 反变得到。

3 燃烧稳定性预估计算

根据固体火箭发动机燃烧稳定性的线性理论, 稳定性判据为 $\alpha < 0$

这里,
$$\alpha = \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \quad (14)$$

称为声压振幅增长常数, 其值取决于发动机的各种声放大和声阻尼因素的综合作用, 并可表示为各因素单独作用时的振幅增长常数之代数和, 即

$$\alpha = \sum \alpha_i \quad (15)$$

α_i 是正值, 表示该项因素提供声能增益、使声波放大; α_i 是负值, 表示该项因素提供声阻尼, 使声波衰减, 因而可分别称为放大系数或阻尼系数。影响 α 值的因素很多, 但其重要性相差很远。根据工程上的实际情况, 一般将 (15) 式写作

$$\alpha = \sum \alpha_i = \alpha_b + \alpha_N + \alpha_p + \alpha_{FT} \quad (16)$$

其中, α_b 为装药燃面压力耦合放大系数, α_N 为喷管阻尼系数, α_p 为燃气凝相微粒阻尼系数, α_{FT}

为燃气转弯损失系数。

由线性理论可以导出右端四项的预估公式。

3.1 燃面放大系数

$$\alpha_b = \frac{a}{2} (A_b^{(r)} + \bar{M}_b) \frac{\int_{S_b} p^2 dS}{\int_V p^2 dV} \quad (17)$$

式中, $A_b^{(r)}$ 为燃面声导纳实部, $\bar{M}_b$ 为燃面法向平均 M 数, a 为平均音速, S_b 为燃面面积, V 为内腔体积。通常将 $(A_b^{(r)} + \bar{M}_b)$ 作为表征推进剂压力耦合响应特性参数, 它与常用的响应函数 $R_b^{(r)}$ 有如下关系:

$$(A_b^{(r)} + \bar{M}_b) = \gamma \bar{M}_b R_b^{(r)}$$

这两个参数的值与频率及压强有关, 需由实验测定。

3.2 喷管阻尼系数 α_N

对于非潜入式喷管, 若收敛段远小于燃烧室长度 (称为短喷管) 则有

$$\alpha_N = \frac{-a}{2} \frac{1+\gamma}{2} \bar{M}_n \frac{\int_{S_n} p^2 dS}{\int_V p^2 dV} \quad (18)$$

其中, $\bar{M}_n$ 为喷管进口平均 M 数, S_n 表示喷管进口截面。

3.3 微粒阻尼系数

对于三维声场

$$\alpha_p = \frac{-C_m}{2(1+C_m)} \left[\frac{\omega^2 \tau_v}{1+\omega^2 \tau_v^2} \frac{\int_V \nabla p \cdot \nabla p dV}{K^2 \int_V p^2 dV} + (\gamma-1) \frac{C_s}{C_p} \frac{\omega^2 \tau_t}{1+\omega^2 \tau_t^2} \right] \quad (19)$$

式中 $\tau_v = 2r_s^2 \rho_s / 9\mu$ $\tau_t = \frac{3}{2} \left(\frac{C_s}{C_p} \right) Pr \tau_v$ $C_m = 1.89\delta / (1 - 1.89\delta) = \rho_s / \rho_R$

δ 是推进剂中铝粉的质量分数, ω 为声振角频率, ρ_s , C_s , r_s 分别为微粒的密度、比热容和半径。 C_p , ρ_g , μ , Pr 分别为燃气的比热容、密度、粘性系数和普朗特数。

3.4 气流转弯损失系数 α_{FT}

燃气离开燃面时, 其速度方向垂直于燃面, 而后在平行于燃面的声波作用下折转 90° , 并以声振速度振荡, 这一过程消耗的声场能量就是气流转弯损失, 其大小与药柱实际燃速及燃面在声场中所处方位有关。文献 [2] 给出的公式

$$\alpha_{FT} = -\frac{1}{2} \bar{u}_b (S_b/V)$$

仅适用于圆柱形声腔的一维轴向振型。本文建议采用下式来近似计算三维声场的气流转

弯损失。

$$\alpha_{FT} = - \frac{1}{2} \frac{\bar{u}_b}{\int_V p^2 dV} \frac{\int_{S_b} p^2 dS}{\int_V p^2 dV} \quad (20)$$

式中, 燃面燃气平均流速 $\bar{u}_b = r_p \rho_p / \rho_g$, r_p 为药柱燃速。

分析公式 (17) ~ (20) 可知, α_b , α_N , α_p , α_{FT} 的值均与频率及振型有关。所以燃烧稳定性预估就是在发动机工作过程的不同时刻, 针对每一声振型 (通常只是前几个低阶振型) 计算对应的 α_b , α_N , α_p , α_{FT} 以及它们的代数和 α 值, 并根据 α 的符号判定发动机在计算时刻对该振型是否稳定。

4 计算结果

本文选择一个采用变截面槽管式装药的单室双推力发动机作为预估对象, 其内腔初始形状及有限元网格如图 2 所示。单元总数 288, 节点总数 526, 编号方法亦示于图中。三维声学有限元分析的输出为前 11 阶振型的波数 K 及各个节点上的声压振幅相对值。表 1 列出了预估的波数及对应的固有频率值。前四阶振型的声压振幅沿轴向变化的曲线示于图 3~6。为便于比较起见, 图中同时绘出标准的余弦曲线。由此可见, 声压振幅沿轴向分布均显著不同于标准的简谐波, 这是主通道横截面变化和缝槽的存在造成的。

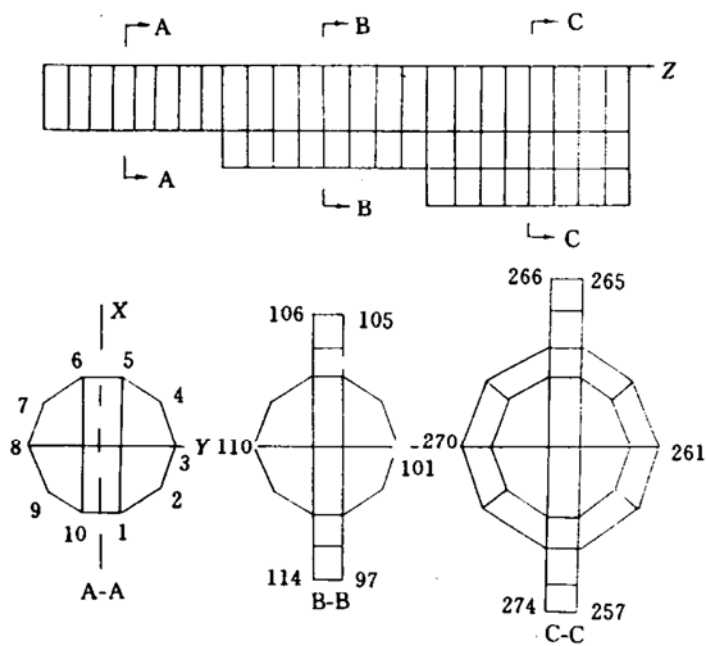


图 2 燃烧室内腔三维有限元网格

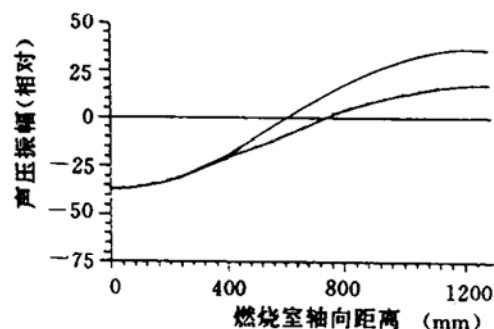


图 3 轴向波形 (基波)

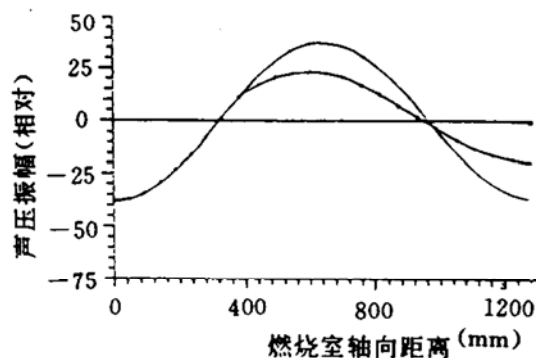


图 4 轴向波形 (2 阶波)

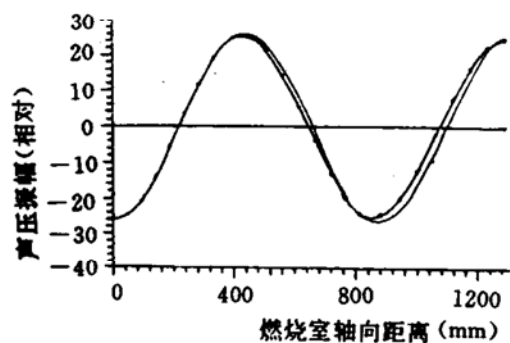


图 5 轴向波形 (3 阶波)

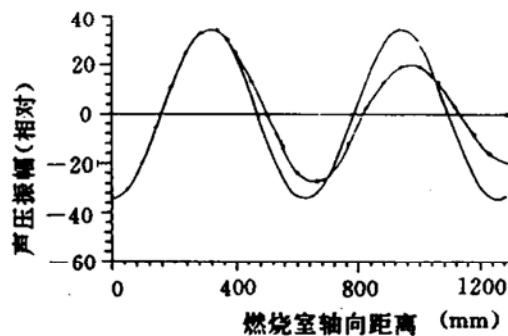


图 6 轴向波形 (4 阶波)

表 1 波数和频率的计算值

阶数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
K	2.58	4.83	7.19	10.0	12.4	14.7	17.9	20.5	22.8	26.4	29.3
f	451	846	1259	1751	2171	2574	3134	3589	3992	4622	5130

图 7 和图 8 是缝槽内声压振幅沿径向分布的两种典型情况。对于 1, 2, 3 阶振型, 不论是中段缝槽, 还是后段缝槽, 槽内声压振幅分布符合图 7。4 阶以上振型中, 可能出现图 8 的情况。此外, 在有缝槽的中段和后段, 主通道中声压振幅沿圆周方向也呈周期性变化, 其分布相当于二阶切向振型。然而, 计算结果表明, 头部端圆柱形通道中, 声压振幅仅沿轴向变化, 在横截面上均匀分布。本文还对后段速燃药刚刚燃尽时刻的内腔做了声学分析。计算表明, 此时还可能存在一阶切向振型, 高阶切向振型和径向振型。总之, 固体火箭发动机装药燃烧室内腔确为三维声场。

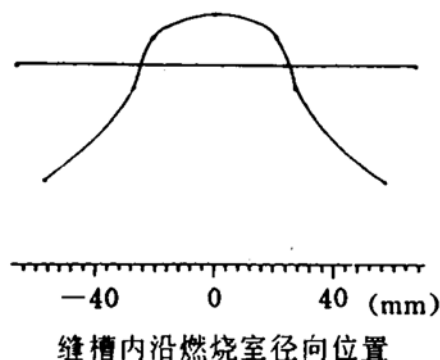


图 7 横向波形 (1, 2, 3 阶波)

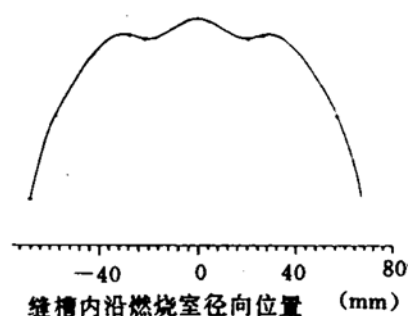


图 8 横向波形 (4 阶以上)

选择一组典型的输入数据, 分别对初始时刻和速燃药刚刚燃尽时刻进行燃烧稳定性预估计算。初始时刻的计算结果列于表 2。计算中, 凝相微粒 (Al_2O_3) 平均直径取为 $6\mu\text{m}$ 。由表列数据可知, 细粒对低阶振型的作用很小, 同时, 发动机燃烧室长径比较大, 喷管损失也相对较小, 致使 1, 2 阶振型的总增长常数 α 为正值, 说明可能出现频率低于 1kHz 的不稳定燃

烧现象。速燃药燃尽时刻的计算表明, 发动机工作后期的燃烧稳定性略有提高, 但基振振型的振幅增长常数仍为正值。此外, 试算中取响应函数 $R_b^{(r)} = 3.1$, 没有考虑其随频率变化的关系, 所以对高阶振型的预估是偏安全的。总之, 尽管某些输入参数选择不尽合理, 预估仍可说明该发动机的燃烧稳定性处于临界状态, 这与试车结果是定性一致的, 因为试车中确实出现过不稳定燃烧现象。在发动机结构一定的条件下, 应当通过 T 型燃烧器试验来调整推进剂配方, 以减小响应函数值和增大微粒阻尼值, 使发动机的燃烧稳定性得到可靠的保证。

表 2 计算结果

阶数	K	α_b	α_N	α_p	α_{FT}	α
1	2.58	831.7	-131.9	-69.54	-391.9	238.339
2	4.83	880.7	-153.3	-237.0	-415.1	75.290
3	7.19	865.8	-254.2	-484.54	-408.0	-280.9
4	10.0	864.0	-160.3	-824.35	-407.1	-527.75
5	12.4	862.5	-171.8	-1115.2	-406.4	-830.79
6	14.7	869.3	-259.0	-1381.1	-409.6	-1180.4
7	17.9	871.2	-186.3	-1924.7	-403.1	-1426.8
8	20.5	855.4	-203.9	-1924.7	-403.1	-1676.4
9	22.8	874.5	-273.0	-2099.7	-412.1	-1910.3
10	26.4	874.6	-233.5	-2317.9	-412.1	-2089.0
11	29.3	853.4	-252.7	-2460.8	-402.1	-2262.3

5 讨 论

以上计算结果证明本文提出的预估方法是有效的。有些问题尚需分析和讨论。

(1) 声学分析的验证和精度分析: 计算结果应通过声学实验予以验证。在不具备试验条件的情况下, 可用编制的计算软件对规则的圆柱形声腔进行数值计算, 并与解析解做比较。本文取圆柱形声腔长度 1m, 直径 0.3m。两种计算的前 10 阶振型的波数列于表 3。

比较表列数据可知, 相对误差一般不大于 3%。应当指出, 预估对象的内腔长径比很大, 为了尽量减少单元总数常使单元呈细长状态。一般希望单元最长边与最短边的比值不大于 3, 而在本文的单元中, 此比值可达到 6, 因而可能影响到计算精度。

(2) 减少机时及内存: 本文编制的计算程序在 IBM-4381 机上运行一次耗用机时 (CPU) 36 分钟, 占用内存 2.7MB, 因此有必要研究如何减少机时和内存的问题。首先, 采用多节点三维有限单元和高阶插值函数有可能减少节点总数而不降低计算精度。其次, 如以子空间迭代法或行列式搜索法替代 ESPACK 程序系列, 则可实现多维矩阵的一维压缩贮存, 从而大量节约内存, 很值得进一步研究。此外, 利用声场的对称性, 以部份代全体也可大量节约内存

和机时。然而分割之后的边界条件如何处理,尚待进一步研究。

表 3 波数计算值

阶数	1	m	n	解析解	有限元解
1	1	0	0	3.14159	3.156743
2	2	0	0	6.28318	6.387938
3	3	0	0	9.42477	9.677789
4	0	1	0	12.2752	12.59586
5	4	0	0	12.5663	12.83050
6	1	1	0	12.6708	12.98397
7	2	1	0	13.7898	13.40000
8	3	1	0	15.4760	15.94332
9	5	0	0	15.7079	16.00564
10	4	1	0	17.5668	17.32069

(3) 进一步提高预估方法的通用性: 本文提出的预估方法和软件具有相当高的通用性, 但是仍有若干特殊问题未曾考虑在内。例如, 大型火箭发动机药柱肉厚很大, 粘弹性药柱对声波的阻尼和对声振型的影响已不可忽略, 故应将声学有限元分析和结构有限元分析结合起来计算相应的结构阻尼系数^[4]。又如, 发动机长径比很大, 燃气平均流速很高时应当考虑平均流动对声场特性的影响^[5]。此外, 很多大型火箭发动机采用深潜入式喷管, 其 α_n 值不能再按 (18) 式计算, 需开展相应的实验研究和理论研究, 寻找确定喷管导纳函数的方法。

参 考 文 献

- [1] 操作, 谢蔚民, 周金仙. 固体火箭发动机的声学分析及燃烧稳定性预估, 推进技术, 1992(3)
- [2] Culick F E C. Combustion Instability in Solid Rocket Motors. AD/A-100291, 1981
- [3] 郭福印等. FOETRAN 算法汇编(第三分册). 北京: 国防出版社, 1982
- [4] Hackett R M. 3-D Finite Element Acoustic Analysis of Solid Rocket Motor Cavities. AD/A020380, 1975
- [5] Flandro G A. Stability Prediction for Solid Propellant Rocket Motors with High Speed Mean Flow. AD/A08936, 1980