

叶轮机平面叶栅的气动 设计及绕流计算*

隋 俊 友

(航天工业总公司 31 所, 北京, 100074)

摘 要: 通过全速势方程的数值积分, 利用 AF2 格式, 给出了一种用于叶轮机中叶栅型面的气动设计和绕流计算的便捷方法, 对于稳态亚音速、跨音速及超音速流动均适用。与目前普及很广的、在超音区应用人工压缩性的方案相比, 该算法有明显的优势。

主题词: 涡轮机, 平面叶栅, 叶栅流, 位函数, 计算流体动力学

分类号: V231.3 V235.113

AEROMECHANIC DESIGN AND CIRCUMFLUENT CALCULATION OF CASCADE PROFILES ABOUT TURBINE

Sui Junyou

(The 31st Research Institute, Beijing, 100074)

Abstract: A convenient and speedy used for aeromechanic design and calculation of turbine cascade profiles, based on numerical integral to full potential equations and AF2 (Approximate Factorization) procedure, is presented, which is applicable to steady subsonic, transonic and supersonic flows. Compared with the scheme using artificial compressibility in supersonic zone, which is very popular at present, this method shows its obvious superiorities.

Keywords: Turbine engine, Plane cascade, Cascade flow, Potential function, Computational fluid dynamics

* 本文 1993 年 1 月 8 日收到, 修改稿 1993 年 12 月 13 日收到

1 前言

求解平面叶栅中的跨音速气体流场, 由于激波的存在以及粘性效应的重要, 因此应以 N-S 方程解来完全描述, 特别对抖振和有分离的流动现象更应如此。但直到目前为止, 内流计算仍多以位流理论或 Euler 方程解作为气动设计和分析工具。本文采用的便是定常、无粘、位势流动的有限差分方法。在 80 年代初由 Ballhaus 等人提出的隐式近似因子分解法, 与时间相关法、松弛迭代法相比, 收敛速度极快, 并且在跨音区保证了二阶精度存在。该法的基础是对全速势方程的数值积分, 速势以散度形式被记录下来。与那些应用很广的、在超音速流域应用人工压缩性的方案相对照, 应用这种方法具有明显的优势。

对于全速势方程的求解, 大都应用中心差分法, 对超音速区域, 为使计算不出现振荡, 通常在差分算子中引入人工粘性和人工压缩项, 这时计算精度一般降为初阶。而在超音速区应用单侧迎风差分格式的这种方法, 在平滑区并不要求采用稳定措施。隐式近似因子分解法 (以下简称 AF 法) 能够在超音速区域应用二阶精度单侧差分格式, 并且当计算区域有激波存在时, 能够比较好地捕捉到压缩激波解。其解决途径是在差分格式中引入了稳定源形式补充项。与应用人工压缩性的方案比, 这一做法可以克服激波峰振荡、激波抹平过宽、激波位置偏移等一系列问题。根据这一方法用来计算涡轮机平面叶栅流场, 既快又准。大量的实际算例证明了这一点。

2 问题的提出

如图 1 所示, 理想气流 ($\mu=0$, $dq=0$) 均匀流进由相同叶型构成的平面叶栅。描述稳态无旋气流的原始方程, 包括连续方程和等熵流的伯努力积分关系式。由于用速度势的导数表示速度分量, 就可以由两个方程组成的方程组来确定两个未知数——速度和密度。

问题的边界条件是:

(1) 在计算域的进口段 a 、 a° 、 a' 给定来流速度向量与涡轮机轴线之间夹角值;

(2) 给出沿叶背 bc 和叶盆 $b^\circ c^\circ$ 的叶型处不渗透条件;

(3) 给定计算域出口段 d' 、 d° 、 d 的速度系数值;

(4) 给定在相应的直线段 ab 和 $a'b^\circ$, cd 和 $c'd'$ 上的周期性条件, 而这些直线限制了气流的研究区域。

借助于自变量代换, 将气流的物理域映射到矩形计算域。保持连续方程的散度形式, 采用与边界相适应的 H 型网格。为了建立这种网格, 利用基于拉普拉斯逆方程求解的微分方法。

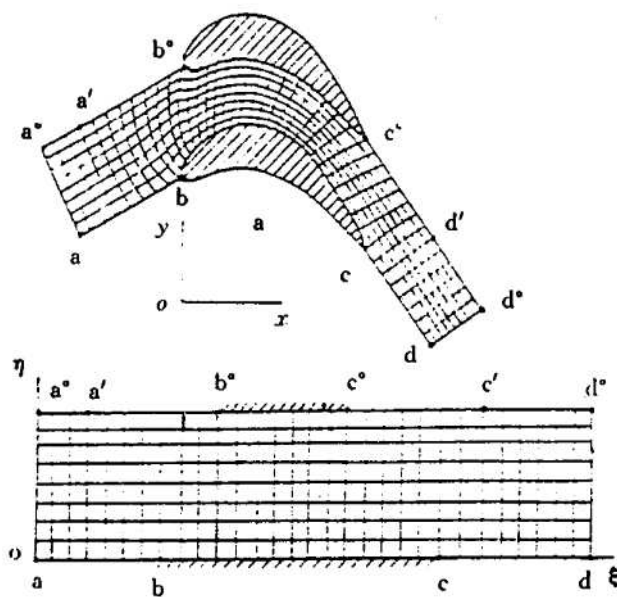


图 1 坐标变换网格

3 基本方程

描述理想气体稳态无旋流的原始方程。包括:

$$(1) \text{ 气体状态方程: } p/\rho = RT \quad (1)$$

$$(2) \text{ 等熵关系式: } p/\rho^\gamma = \text{const} \quad (2)$$

$$(3) \text{ 伯努力方程: } \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \quad (3)$$

$$(4) \text{ 密度与速度系数关系式: } \frac{\rho}{\rho_0} = (1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (4)$$

$$(5) \text{ 连续方程: } \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (5)$$

$$(6) \text{ 压强系数定义式: } C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} (\frac{p}{p_\infty} - 1) \quad (6)$$

其中: γ 为比热比。

将方程 (3) 和 (5) 加以变形, 可得:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$2\rho^{\gamma-1} + (\gamma-1)(u^2 + v^2) = \gamma + 1 \quad (8)$$

在 (7)、(8) 两个公式中, ρ 、 u 、 v 均为按临界参数做无量纲化后的参数。根据定义, $u = \partial\Phi/\partial x$, $v = \partial\Phi/\partial y$, 联立 (7) 和 (8), 便可求出两个未知数 Φ 和 ρ , 由公式 (1) ~ (6), 便可确定整个流场。

4 网格设计

(1) 对于较为复杂的形状, 我们可以这样来设计网格, 即将物体表面选择正交的或非正交的曲线。纬线上 $\eta = \text{const}$, 经线上 $\xi = \text{const}$, 那么平面上某一点 A, 其坐标 (x_A, y_A) 与 (ξ_A, η_A) , 就一一对应了。在 (ξ, η) 平面上, 原来不规则的几何图形就可以展成 (ξ, η) 平面上的规则矩形区域, 其边界均映射成直边界, 物理边界与计算点相吻合, 便于用传统的差分法求解。

借助映射关系

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (9)$$

并保持连续方程的散度形式:

$$\frac{\partial(\rho U/J)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho V/J)}{\partial \eta} = 0 \quad (10)$$

这里 $U = u\xi_x + v\xi_y$, $V = u\eta_x + v\eta_y$, $J = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x$ ——变换后的雅可比行列式。为了总体上方便, 引入符号 $F = \rho U/J$ 和 $G = \rho V/J$ 。

应用这种均匀划分的计算网格 (见图 1), 很容易保证方程 (1) 的差分精度和满足问题的

边界条件。

(2) 本文采用了适于计算区域的 H 型计算网格。为构造这种网格, 需应用以拉普拉斯逆方程的解为基础的微分法。即 $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ 满足方程

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0 \quad (11)$$

而 $x(\xi, \eta)$ 、 $y(\xi, \eta)$ 与 $\xi(x, y)$ 、 $\eta(x, y)$ 的变换关系为:

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0 \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中: $\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2$, $\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$, $\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$

为了改善计算网格的质量, 在方程 (12) 右端加入源项。不难推导证明, 坐标反变换方程在 (ξ, η) 平面内变为:

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2(x_\xi P + x_\eta Q) \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2(y_\xi P + y_\eta Q) \end{cases} \quad (13)$$

其中: 源项 P 和 Q 是位置的函数。这样, 通过 P 和 Q , 便可以调整网格的疏密程度了。

5 差分格式

这里给出求解势函数微分方程的近似因子分解法的详细描述。

$$L(\Phi) = \frac{\partial F(\Phi_\xi, \Phi_\eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial G(\Phi_\xi, \Phi_\eta)}{\partial \eta} = 0 \quad (14)$$

公式中: $F = \rho(C_1\Phi_\xi + C_2\Phi_\eta)/J$, $G = \rho(C_2\Phi_\xi + C_3\Phi_\eta)/J$

$$C_1 = \xi_x^2 + \xi_y^2, \quad C_2 = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y, \quad C_3 = \eta_x^2 + \eta_y^2。$$

对迭代格式进行研究:

$$N\epsilon^n = \sigma\tau L(\Phi^n) \quad (15)$$

这里 $\epsilon^n = \Phi^{n+1} - \Phi^n$ ——两次迭代中势值的变化, $R = L(\Phi^n)$ ——迭代要求的误差精度, σ ——影响收敛速度的正的参数, τ ——迭代过程参数。在 AF2 方法中, 算子 N 是以一些较为简单易解的因子乘积的形式存在的。在相应的 I 和 J 层, 沿坐标轴 ξ 和 η 方向分解计算域, 间距为一定的 $\Delta\xi$ 和 $\Delta\eta$ 。这样所得到的网格, 中心用两个半小标注 (如 $i - \frac{1}{2}$, $j - \frac{1}{2}$), 而边界用一个整小标和一个半小标注 (如 i , $j - \frac{1}{2}$), 势值 Φ 将在网格中心计算, 速度值和流量在网格边界计算, 类似的标注原则也适用于 $\epsilon_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^n$ 和下面所应用的系数 $A_{i-\frac{1}{2}, j}^n$ 和 $B_{i-\frac{1}{2}, j}^n$ 等。当方程 (15) 的右侧为近似值时, 公式 (16) 的应用保证了差分格式的守恒性。

$$L(\Phi_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^n) = \frac{F_{i, j-\frac{1}{2}}^n - F_{i-1, j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta\xi} - \frac{G_{i-\frac{1}{2}, j}^n - G_{i-\frac{1}{2}, j-1}^n}{\Delta\eta} \quad (16)$$

在通过网格边界求解流量时,应用差分格式的原则是:在亚音速流域,应用中心差分;在超音速流域,应用降低近似精度的单向差分法。

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \frac{\Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta \xi} + O[(\Delta \xi)^2] \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \frac{\Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^n - \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^n}{4\Delta \eta} + O[(\Delta \xi)^2 + (\Delta \eta)^2] \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)_{i-\frac{1}{2},j}^n = \frac{\Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - \Phi_{i-\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^n - \Phi_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}^n}{4\Delta \xi} + O[(\Delta \xi)^2 + (\Delta \eta)^2] \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)_{i-\frac{1}{2},j}^n = \frac{\Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta \eta} + O[(\Delta \eta)^2] \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \frac{2\Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - 3\Phi_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}^n + \Phi_{i-\frac{5}{2},j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta \xi} + O[(\Delta \xi)^2] \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \frac{3\Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - \Phi_{i-\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^n - 3\Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^n + \Phi_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2}}^n}{4\Delta \eta} + O[(\Delta \xi)^2 + (\Delta \eta)^2] \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)_{i-\frac{1}{2},j}^n &= \frac{3(\Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n) - 4(\Phi_{i-\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}^n + \Phi_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}^n)}{4\Delta \xi} \\ &\quad + \frac{\Phi_{i-\frac{5}{2},j+\frac{1}{2}}^n + \Phi_{i-\frac{5}{2},j-\frac{1}{2}}^n}{4\Delta \xi} + O[(\Delta \xi)^2 + (\Delta \eta)^2] \end{aligned} \quad (23)$$

本文(15)式中左边的差分算子被选为下面的形式:

$$N\epsilon_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n = (\Delta \xi^- - \tau \Delta \eta^- B_{i-\frac{1}{2},j}^n \Delta \eta^+) (1 - \tau A_{i,j-\frac{1}{2}}^n \Delta \xi^+) \epsilon_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n \quad (24)$$

这里 $\Delta \xi^\pm$ 和 $\Delta \eta^\pm$ 表示由下列关系式确定的一阶导数单向差分算子。

$$\Delta \xi^- \epsilon_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n = (\epsilon_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - \epsilon_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}^n) / \Delta \xi \quad (25)$$

$$\Delta \xi^+ \epsilon_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n = (\epsilon_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - \epsilon_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n) / \Delta \xi \quad (26)$$

$$\Delta \eta^- \epsilon_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n = (\epsilon_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - \epsilon_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^n) / \Delta \eta \quad (27)$$

$$\Delta \eta^+ \epsilon_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n = (\epsilon_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - \epsilon_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n) / \Delta \eta \quad (28)$$

引入参数符号:

$$A_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \left[\frac{\rho}{J} (C_1 - U^2/a^2) \right]_{i,j-\frac{1}{2}}^n, \quad B_{i-\frac{1}{2},j}^n = \left[\frac{\rho}{J} (C_3 - V^2/a^2) \right]_{i-\frac{1}{2},j}^n.$$

当进行计算时,为了快速收敛,在(15)式中,参数 τ 按几何级数从 $\tau_{\min}$ 到 $\tau_{\max}$ 循环变化。 $\tau_k = \tau_{\min} (\tau_{\max}/\tau_{\min})^{\frac{k-1}{K-1}}$, ($k=1,2,3,\dots,K$), 其中 k 为顺序元素数,在所进行的计算中, $\tau_{\min}=0.5\Delta\eta$, $\tau_{\max}=5\sim 10\Delta\eta$, $5\leq K\leq 10$, $\sigma=4/3$ 。

6 计算结果及评价

计算结果见图 2~5。

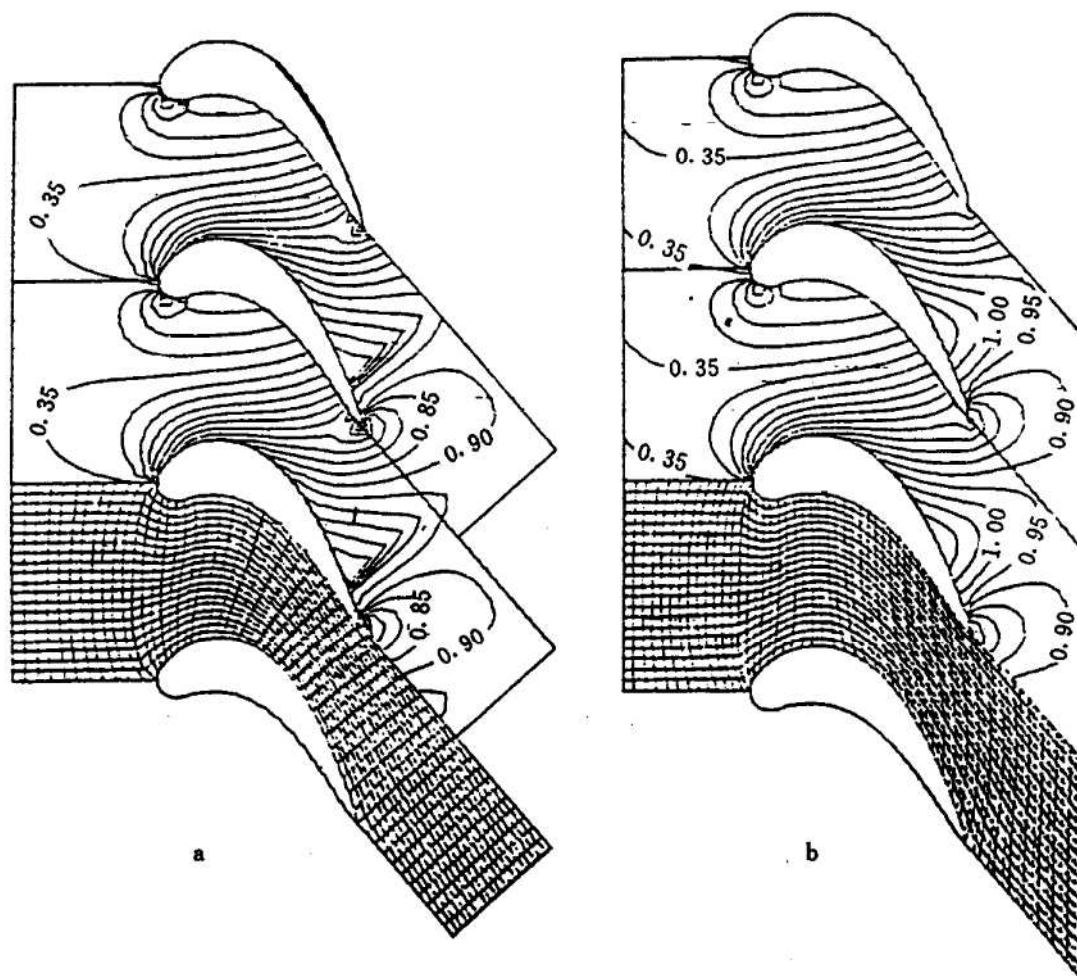


图 2 某发动机涡轮叶栅流场

a: $M_{out}=0.90$, $\Delta M=0.05$, GRID: 50×20 TIME: 36s

b: $M_{out}=0.90$, $\Delta M=0.05$, GRID: 60×20 TIME: 58s

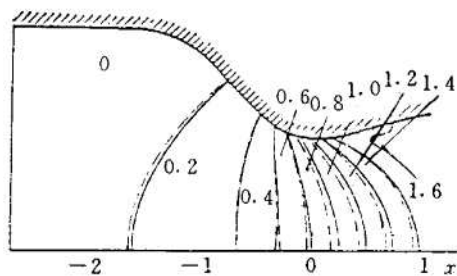


图 3 某发动机尾喷管流场

---人工压缩法得出势函数解

—AF2 格式得出的势函数解

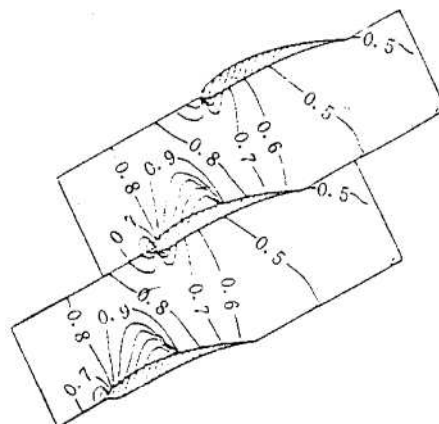


图 4 某发动机压气机叶栅流场

$M_{in}=0.8$, $\Delta M=0.1$ GRID: 52×16 TIME: 142s

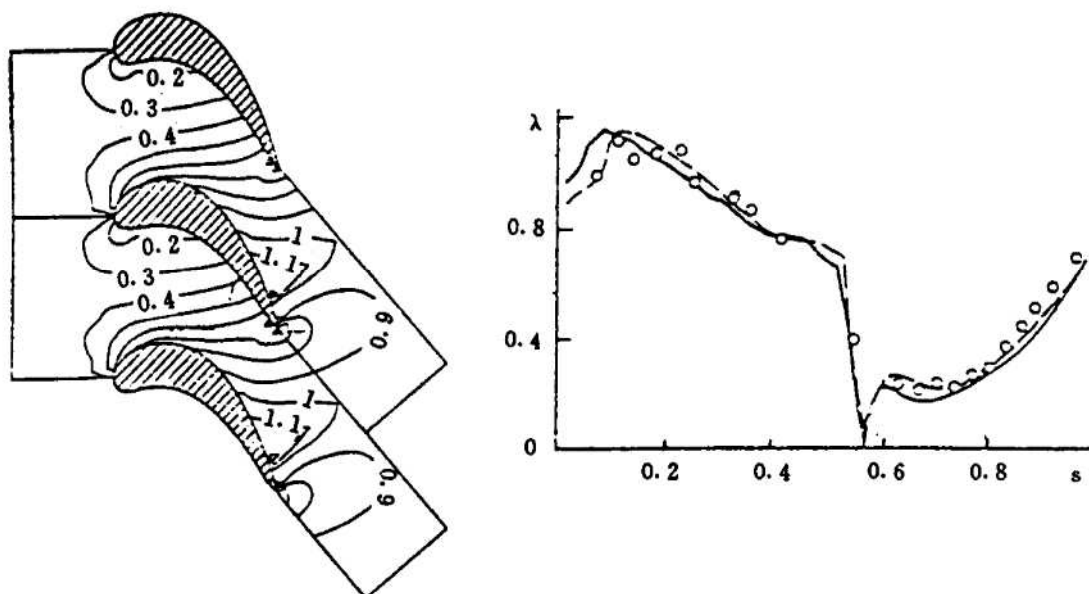


图5 计算结果与试验数据比较

ooo实验结果, ---Mac Cormack 格式得出的 N-S 方程解, —AF2 格式得出的势函数解

大量算例表明, 本文所采用的算法在求解全速势方程中, 是卓有成效的, 对激波的捕捉也非常理想。今后改进方向是使之考虑损失模型, 并且针对发动机内流计算本身的特点, 加以完善。

参 考 文 献

- [1] Ballhaus W F, Jameson A, Albert J. Implicit Approximate Factorization Schemes for Steady Transonic Flow Problems. AIAA Journal, 1987, 16 (6): 573~579
- [2] Holst T L, Ballhaus W F. Fast Conservative Schemes for the Full Potential Equation Applied to Transonic Flows. AIAA Journal, 1979, 17 (2): 145~152
- [3] Holst T L. Implicit Algorithm for the Conservative Transonic Full Potential Equation Using an Arbitrary Mesh. AIAA Journal, 1979, 17 (10): 1038~1045