

直接的矩阵分裂计算跨 音速喷管流场*

江兴宏 陈福连 吴心平

(西北工业大学航天工程学院, 西安, 710072)

摘 要: 给出了分离系数矩阵 (SCM) 求解欧拉方程组时系数矩阵的直接分离公式, 减少和简化了应用该方法时的矩阵运算。参照 Beam-Warming 显式格式构造与 SCM 方法一致的内点差分格式, 并分析了它的数值特性。对有斜激波的跨音速内流场进行了数值仿真。计算中采用变系数的当地时间步长, 加快了流场达到稳态的收敛速度。计算无需引入任何人工参数, 计算值与实验结果吻合。

主题词: 跨音速喷管, 喷管气流, 流动分布, 矩阵算法, 数值模拟

分类号: V434.11, V435.11

DIRECT COEFFICIENT MATRIX SPLITTING FOR NUMERICAL COMPUTATION OF TRANSONIC NOZZLE FLOW

Jiang Xinghong Chen Fulian Wu Xingping

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnic
University, Xi'an, 710072)

Abstract: The split coefficient matrix (SCM) method is improved for the numerical computation of Euler gas dynamic equations in nonconservative forms to simulate the transonic nozzle flowfields. Concise expressions for the direct coefficient matrix splitting are derived and presented in the paper, the related matrix splitting computation work is consequently greatly reduced and simplified. By referring to Beam-Warming's explicit finite difference scheme, a second-order accurate scheme in consistence with SCM method is constructed and analysed. Besides conventional local time stepping $\Delta t = C \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} / (\sqrt{u^2 + v^2} + a)$ to accelerating the convergence of steady state calculation, an additional option is switched on to setting the parameter C differently at each mesh point according to its local Mach number. The measure results a quicker convergence. Although there is an oblique

* 本文 1993 年 3 月 25 日收到, 1993 年 12 月 27 日收到修改稿

shock within the nozzle supersonic flow region, it revealed that the algorithm being used is still robust even if without any artificial parameter to control the numerical instability. Computational results are in good agreement with experiments in a wide range of Mach number.

Keywords: Transonic nozzle, Nozzle gas flow, Flow distribution, Matrix algorithm, Numerical simulation

1 引言

跨音速流计算中普遍采用时间推进方法数值求解双曲型气动方程组,常用的方法是有限差分法和特征线法。特征线法理论上严格,计算精度较高,但公式复杂,不易推广到三维流场和参数突跃区域,因而限制了它的应用范围。

Charkravarthy S R^[1]在80年代初提出了SCM方法求解双曲型气动方程组。该方法植根于特征线的数学理论,按扰动传播方向对控制方程进行重组,根据特征值符号来决定差分方向。方法保留有限差分法格式简单的优点,精度和稳定性有了较大的改善。与传统有限差分法比较,SCM方法对网格非正交性较不敏感^[2];可以用显式和隐式方法数值求解^[3];本身已具有处理激波和间断的能力,并适合与多种激波计算方法有效结合实现对复杂波系的精确模拟^[1,2,4]。与理论基础类似的矢通量分裂(FVS)方法^[5]相比,计算不需要调和项(blending terms)。计算表明,尽管流场中有斜激波,计算过程中仍然不需要人工粘性项。由于方法的上述特点,已成为求解流体力学问题的一项有力工具。

通常应用SCM方法时,要在每个时间层上逐点分裂特征值、计算相似变换矩阵、求逆矩阵并作多个矩阵相乘的运算^[1,2,6]。矩阵分裂的计算工作量较大。同时常规的差分格式已不适用。本文着重讨论矩阵分裂的直接公式和内点差分格式,并运用这套公式对有斜激波的跨音速内流进行了计算。

2 控制方程及数值方法

平面($\epsilon=0$)和轴对称($\epsilon=1$)欧拉方程,经贴体坐标变换,计算平面控制方程如下:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \tilde{B} \frac{\partial U}{\partial \eta} + H = 0 \quad (1)$$

式中: $U = [\rho, u, v, p]^T$, $H = [\epsilon \rho v / y, 0, 0, \epsilon \rho a^2 v / y]^T$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{u} & \xi_x \rho & \xi_y \rho & 0 \\ 0 & \tilde{u} & 0 & \xi_x / \rho \\ 0 & 0 & \tilde{u} & \xi_y / \rho \\ 0 & \xi_x a^2 \rho & \xi_y a^2 \rho & \tilde{u} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{v} & \eta_x \rho & \eta_y \rho & 0 \\ 0 & \tilde{v} & 0 & \eta_x / \rho \\ 0 & 0 & \tilde{v} & \eta_y / \rho \\ 0 & \eta_x a^2 \rho & \eta_y a^2 \rho & \tilde{v} \end{bmatrix}$$

ρ 、 u 、 v 、 p 、 a 分别代表气体密度、各个方向上分速、压强和音速。 $\tilde{u} = \xi_x u + \xi_y v$, $\tilde{v} = \eta_x u + \eta_y v$ 。由 $|\tilde{A} - \lambda E| = 0$ 和 $|\tilde{B} - \lambda E| = 0$ 可解出 $\tilde{A}$ 、 $\tilde{B}$ 矩阵的实特征值(E 为单位矩阵)。 Λ_A 、 Λ_B 分别为 $\tilde{A}$ 、 $\tilde{B}$ 矩阵特征值构成的对角矩阵。表达式如下:

$$\Lambda_A = \text{Diag}[\lambda_1^A, \lambda_2^A, \lambda_3^A, \lambda_4^A] = \text{Diag}[\tilde{u}, \tilde{u}, \tilde{u} + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \tilde{u} - a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}]$$

$$\Lambda_B = \text{Diag}[\lambda_1^B, \lambda_2^B, \lambda_3^B, \lambda_4^B] = \text{Diag}[\tilde{v}, \tilde{v}, \tilde{v} + a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}, \tilde{v} - a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}]$$

根据 SCM 方法, 分离系数矩阵之后的控制方程组如下:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + A^+ \frac{\partial U}{\partial \xi^+} + A^- \frac{\partial U}{\partial \xi^-} + B^+ \frac{\partial U}{\partial \eta^+} + B^- \frac{\partial U}{\partial \eta^-} + H = 0 \quad (2)$$

采用与文献 [1] 相同的特征值分裂方法对系数矩阵作相似变换, 经推导, $A^\pm$ 、 $B^\pm$ 有简洁的公式可以一步分离。以 $A^\pm$ 为例, 直接的矩阵分裂表达式如下:

$$A^\pm = \begin{bmatrix} C_1^\pm & S_2 C_3^\pm / a^2 & -S_1 C_3^\pm / a^2 & -C_4^\pm / a^2 \\ 0 & S_1^2 C_1^\pm + S_2^2 C_2^\pm & S_1 S_2 C_4^\pm & S_2 C_3^\pm / (\rho a)^2 \\ 0 & S_1 S_2 C_4^\pm & S_2^2 C_1^\pm + S_1^2 C_2^\pm & -S_1 C_3^\pm / (\rho a)^2 \\ 0 & S_2 C_3^\pm & -S_1 C_3^\pm & C_2^\pm \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中: $S_1 = x_\eta / \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2}$, $S_2 = y_\eta / \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2}$,

$$C_1^\pm = (\lambda_1^A \pm |\lambda_1^A|) / 2, \quad C_2^\pm = [\lambda_3^A + \lambda_4^A \pm (|\lambda_3^A| + |\lambda_4^A|)] / 4$$

$$C_3^\pm = \rho a [\lambda_3^A - \lambda_4^A \pm (|\lambda_3^A| - |\lambda_4^A|)] / 4, \quad C_4^\pm = C_1^\pm - C_2^\pm$$

(3) 式中分别用 $-x_\xi$ 、 $-y_\xi$ 取代 x_η 、 y_η , 即可得 $B^\pm$ 的表达式。网格生成后, S_1 、 S_2 便固定不变, 仅 $C_1^\pm$ 、 $C_2^\pm$ 、 $C_3^\pm$ 、 $C_4^\pm$ 、 a^2 、 $(\rho a)^2$ 在各个时间层上要重算。由于 (3) 式中许多项雷同, 而且 $1/a^2$ 可以留待差分格式中一次处理, 矩阵分裂的计算量大为减少。

方程 (2) 离散求解时, $\frac{\partial U}{\partial \xi^+}$ 、 $\frac{\partial U}{\partial \eta^+}$ 采用向后差分, $\frac{\partial U}{\partial \xi^-}$ 、 $\frac{\partial U}{\partial \eta^-}$ 采用向前差分。关于内点差分格式, 业已发现, 直接套用 MacCormack 格式的 FVS 方法, 格式对称性会被破坏, 最终只有一阶精度^[7]。对于 SCM 方法, 为了保证精度, 文献 [1]、[2] 中给出的内点差分格式, 预测步和校正步同时交替使用了两点和三点单侧差分, 但没有对精度问题作更深入的讨论。在此参照 Beam-Warming 二步格式构造与 SCM 方法一致的内点差分格式。以一维双曲型迁移方程 $U_t + AU_x = 0$ 为例, 选择其中特征值为 λ 的一个标量方程讨论该格式的精度问题。特征值按 $\lambda^\pm = (\lambda \pm |\lambda|) / 2$ 分裂, 预报步和校正步格式如下:

$$\text{预:} \quad \frac{\tilde{V}_j^{n+1} - V_j^n}{\tau} + \lambda^+ \frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{h} + \lambda^- \frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{h} = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{校:} \quad & \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\tau} + \lambda^+ \left(\frac{\tilde{V}_j^{n+1} - \tilde{V}_{j-1}^{n+1}}{2h} + \frac{2V_j^n - 3V_{j-1}^n + V_{j-2}^n}{2h} \right) + \\ & \lambda^- \left(\frac{\tilde{V}_{j+1}^{n+1} - \tilde{V}_j^{n+1}}{2h} + \frac{-2V_j^n + 3V_{j+1}^n - V_{j+2}^n}{2h} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

将校正步中带波纹号的量用预报步结果代入, (4)、(5) 两式合并后得出下式:

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\tau} + \lambda^+ \frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{h} + \lambda^- \frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{h}$$

$$= \frac{\lambda^+}{2} (\lambda^+ \tau - h) \frac{V_j^n - 2V_{j-1}^n + V_{j-2}^n}{h^2} + \frac{\lambda^-}{2} (\lambda^- \tau + h) \frac{V_{j+2}^n - 2V_{j+1}^n + V_j^n}{h^2} \quad (6)$$

利用泰勒级数展开式, 导出 (6) 式的等价微分方程如下:

$$V_t + 0(\tau^2) + \lambda V_x + \frac{\lambda h^2}{6} V_{3x} + 0(h^4) = \frac{|\lambda|}{2} h \left[\frac{h^2}{12} V_{4x} + 0(h^4) \right] - \left(\frac{(\lambda^+)^2}{2} \tau + \frac{\lambda^+}{2} h \right) [-hV_{3x} + 0(h^2)] + \left(\frac{(\lambda^-)^2}{2} \tau - \frac{\lambda^-}{2} h \right) [hV_{3x} + 0(h^2)] \quad (7)$$

(7) 式表明, 所构造的内点差分格式与原微分方程相容, 格式为 $O(h^2, h\tau, \tau^2)$ 二阶精度。与不采用矩阵分离的原始格式相比^[7], 等价微分方程中自然含有数值粘性项 $O(h^3 V_{4x})$, 有利于求解过程的稳定。多维情况下内点差分格式可类推。保证格式稳定的当地时间步长取 $\Delta t = C \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} / (\sqrt{u^2 + v^2} + a)$, C 在 0~1 之间。

3 算 例

应用上述公式计算有斜激波的轴对称跨音速喷管流场。喷管收敛段和扩张段为直线, 收敛角 $\alpha = 45^\circ$, 扩张角 $\beta = 15^\circ$, 喉部过渡圆弧与喉径之比 $R_c/R_t = 0.625$, 通过求解椭圆型微分方程生成计算网格^[8], 用参考平面特征线法补足边界条件, 按一维等熵流提供计算初场。

图 1 示出计算获得的轴线和壁面马赫数, 并与实验值^[9]进行了比较。在超音速区域, 流场中产生了斜激波, 使流场中马赫数发生了突降。全场马赫数分布情况见图 2。数值计算捕获了斜激波, 其位置与实验结果一致。

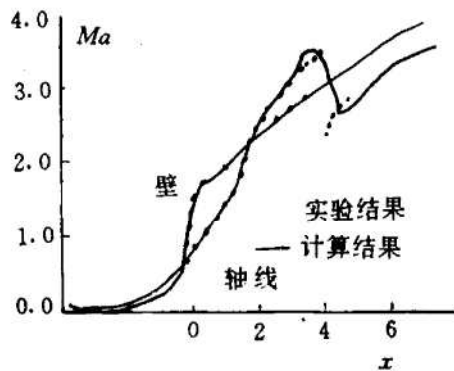


图 1 轴上和壁上马赫数分布

应用本程序作了广泛的数值实验。程度在很粗的网格上 (21×11) 能够得到合理的收敛解。采用 41×21 网格时, 两次迭代马赫数相对误差下降超过四个数量级需要 750 步, 486 微机耗时 27min。采用 21×11 网格时, 扰动和边界条件能更快传遍全场, 这时迭代 470 步即可收敛, CPU 时间仅 4 分钟。图 3 给出了误差下降过程。受格式数值粘性项的影响, 粗网格上误差下降过程更光滑。

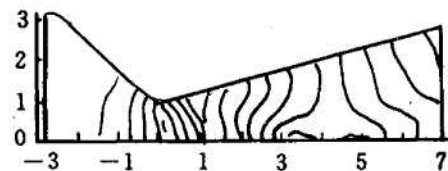


图 2 等马赫数型面 (41×21)

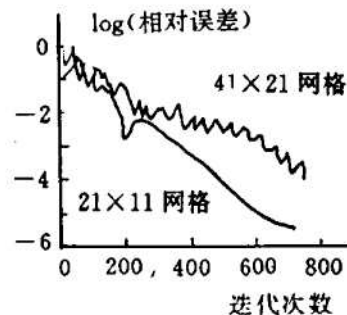


图 3 计算收敛过程

改变网格疏密和当地时间步长系数 C 的数值实验表明, 采用当地时间步长和全场统一常数 C 时, 最大 C 值允许取至 0.35, 收敛需要 1000 步, 如继续加大 C 值, 计算总是在低马赫数区域首先开始发散并逐渐向下游传播。这表明高马赫数区域有采用更大时间步长的潜力。试算结果表明, 高马赫数区域 C 值可取至 0.6~0.7, 这时运算至收敛只需要迭代 750 步。具体实施时, 当地 C 值按网格线估算。设 i 为网格点在轴线上的标号, 则:

$$C = C_1 + \frac{i-1}{M-1}(C_2 - C_1) \quad (8)$$

其中: M 为轴向网格数; C_1 为全场最小 C 值; C_2 为全场最大 C 值。

4 结 论

从公式推导和数值实验可以看出: (1) 欧拉方程系数矩阵有直接的公式可以一步分离。直接的矩阵分裂摆脱了分裂特征值、计算相似变换矩阵、求逆矩阵和多个矩阵相乘的过程, 减少了计算时间, 并节省机器内存。(2) 文中给出的内点显式差分格式, 具有时间和空间二阶精度, 隐含有四阶的数值粘性项。方法具备处理间断和斜激波的能力, 计算过程中无需引入任何人工参数而收敛过程稳定。(3) 采用变系数的当地时间步长, 高马赫数区域采用大的 C 值, 加快了流场达到稳态的收敛速度。

分离系数矩阵方法的基本原理和方法同样可以推广到 Navier-Stokes 方程组的数值求解中去。直接的矩阵分裂对 Navier-Stokes 方程组仍然是有效的。

参 考 文 献

- [1] Chakravarthy S R, Anderson D A, Salas M D. The Split-Coefficient Matrix Method for Hyperbolic Systems of Gas Dynamic Equations. AIAA 80-0268
- [2] Daywitt J E, Szostowski D J, Anderson D A. A Split Coefficient/Locally Monotonic Scheme for Multi-shocked Supersonic Flow. AIAA 82-0287
- [3] Anderson D A, Rajendran N. Application of an Implicit SCM Technique to Internal Flows, Computers in Flow Predictions and Fluid Dynamics Experiments. In: Washington D C ed. The Winter Annual Meeting of the ASME, 1981, 11: 15~20
- [4] Yamamoto O, Anderson D A, Salas M D. Numerical Computations of Complex Mach Reflection. AIAA 84-1679
- [5] Steger J L, Warming R F. Flux Vector Splitting of Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Difference Methods. J of Computational Physics 1981, 40: 263~293
- [6] Weiland C. A Split-Matrix Runge-Kutta Space Marching Procedure. Journal of Computational Physics, 1992, 102: 319~335
- [7] 刘导治. 计算流体力学基础. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989 年
- [8] Thomas P D, Middlecoff J F. Direct Control of Grid Point Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations. AIAA Journal, 1980, 18 (6)
- [9] Serra R A. Determination of Internal Gas Flows by a Transient Numerical Technique. AIAA Journal, 1972, 10 (5)