

三维粘弹性大变形动力响应分析*

王本华 张 戈

(西北工业大学航天工程学院, 西安, 710072)

摘 要: 将大变形增量问题的 Total Lagrangian 法应用于粘弹性结构的动力响应分析。利用 Prony 级数导出以 Kirchhoff 应力和 Green 应变表示的粘弹性积分型增量本构方程及其递推公式, 从而给出一种计算三维粘弹性大变形动力响应的有限元增量迭加方法。经算例验证, 所述方法及其相应程度具有机器内存少、计算量小和效率高的优点。

主题词: 粘弹性, 应力-应变关系, 应力计算, 有限元法, 动态响应, 固体推进剂

分类号: O347, V435.21

AN ANALYSIS ON DYNAMIC RESPONSE IN THREE DIMENSIONAL VISCOELASTIC LARGE DEFORMATION

Wang Benhua Zhang Ge

(College of Astronautics, Northwestern
Polytechnical University, Xi'an, 710072)

Abstract: The Total-Lagrangian approach of large deformation increment is used in dynamic response analysis of viscoelastic structures. The viscoelastic integral constitutive relation and a recurrence formula denoted by the Kirchhoff stress-Green strain are derived from Prony series on incremental form. A finite element incremental superposition method for dynamic response of three dimensional viscoelastic large deformation is given. It is proved by examples that the approach given in this paper has some advantages in decreasing computer storage and calculation amount, and increasing calculation efficiency.

Keywords: Viscoelasticity, Stress-Strain relationship, Stress computation, Finite element method, Dynamic response, Solid propellant

* 本文 1993 年 4 月 14 日收到

1 引 言

研究粘弹性材料在载荷作用下的动力响应历来是国内外学者十分关心的问题。Achenbach^[1]假设粘弹性材料完全不可压缩,分析了带有弹性外壳的粘弹性厚壁圆筒在内压或外压作用下的动力响应。随后, Achenbach^[2]又在同样的假设条件下,分析了具有烧蚀内表面的粘弹性厚壁圆筒在阶跃内压作用下的动力响应。Huang 等^[3]利用弹性-粘弹性对应原理分析了具有外部粘性阻尼的粘弹性铁木辛柯梁的自由振动。1987 年以来,国内学者^[4~6]也采用各种不同方法进行了类似的工作。上述分析与计算都是在小变形范围内进行的。然而,很多粘弹性材料例如固体推进剂等,其弹性模量较低,载荷作用下变形较大,应力-位移关系呈几何非线性。因此,对于这类粘弹性材料,必须采用大变形理论与方法进行分析。本文将大变形增量问题的 Total Lagrangian 法应用于粘弹性结构,给出一种计算三维粘弹性大变形动力响应的有限元增量迭加方法。经算例验证,该方法可以成功地解决粘弹性结构的大变形动力响应分析问题。

2 大变形增量变分方程

在求解大变形增量问题时,必须把物体连续变形过程分解为有限个离散的平衡状态,在已知初始状态解的条件下,逐次求出所有各离散状态的解。

用 0x_i 、 tx_i 和 ${}^{t+\Delta t}x_i$, $i=1, 2, 3$ 分别表示物体在 0, t 和 $t+\Delta t$ 时刻的坐标,用 tu_i 和 ${}^{t+\Delta t}u_i$, $i=1, 2, 3$ 分别表示 t 和 $t+\Delta t$ 时刻的位移,则物体构形与位移之间的关系可表示为

$$\left. \begin{aligned} {}^tx_i &= {}^0x_i + {}^tu_i, \\ {}^{t+\Delta t}x_i &= {}^0x_i + {}^{t+\Delta t}u_i = {}^0x_i + {}^tu_i + u_i \end{aligned} \right\} i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

用 ${}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij}$ 和 ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ 分别表示 $t+\Delta t$ 时刻相对初始构形定义的 Green 应变和 Kirchhoff 应力,则 $t+\Delta t$ 时刻相对初始构形的动力学变分方程为

$$\begin{aligned} & \int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} {}^0dV - \int_{{}^0S} {}^{t+\Delta t}f_i^s \delta {}^{t+\Delta t}u_i {}^0dS \\ & - \int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}f_i^b \delta {}^{t+\Delta t}u_i {}^0dV + \int_{{}^0V} \rho {}^{t+\Delta t}u_i \delta {}^{t+\Delta t}u_i {}^0dV = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

它的增量形式为

$$\begin{aligned} & \int_{{}^0V} {}^tS_{ij} \delta {}^0e_{ij} {}^0dV + \int_{{}^0V} {}^tS_{ij} \delta {}^0\eta_{ij} {}^0dV + \int_{{}^0V} {}^0S_{ij} \delta {}^0\epsilon_{ij} {}^0dV \\ & - \int_{{}^0S} {}^{t+\Delta t}f_i^s \delta u_i {}^0dS - \int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}f_i^b \delta u_i {}^0dV + \int_{{}^0V} \rho {}^{t+\Delta t}u_i \delta u_i {}^0dV = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

式中: $\delta S_{ij} = {}^{t+\Delta t}S_{ij} - {}^tS_{ij}$, ${}^0\epsilon_{ij} = {}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} - {}^t\epsilon_{ij}$ 分别为增量时间 Δt 内的应力增量和应变增量, ${}^0e_{ij}$ 和 ${}^0\eta_{ij}$ 分别为线性增量应变和非线性增量应变。

3 粘弹性大变形本构关系

弹性材料是粘弹性材料的一种极限情况,二者的本构关系存在相似性。同时,用 Kirchhoff 应力与 Green 应变描述的大变形本构关系,实际上就是小变形广义 Hooke 定律在大变形情况下的简单推广。因此,如果所讨论的材料是均匀的、各向同性的线性粘弹性材料,且满足零初始条件,则其大变形本构关系可表达为^[7]

$${}^t_0S_{ij} = \int_0^t C_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial \tau} d\tau \quad (4)$$

式中: $C_{ijkl}(t)$ 为粘弹性材料的松弛函数。把 (4) 式写成矩阵形式,得

$${}^t_0\{S\} = \int_0^t G(t-\tau)[C] \frac{\partial \{\epsilon\}}{\partial \tau} d\tau \quad (5)$$

式中: $\{S\} = (S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}, S_{13})^T$,

$$\{\epsilon\} = (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{13})^T,$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

从 (5) 式可以看出,为了计算 t 时刻的 Kirchhoff 应力,需要知道零时刻到 t 时刻的整个应变历史。因此,当采用增量方法进行计算时,每一时刻的应力涉及该时刻和该时刻前所有离散时刻的应变。显然,随着时步的增加,计算量和存贮量迅速增大。为了解决这一问题,将剪切松弛模量 $G(t)$ 表为 Prony 级数^[18]:

$$G(t) = G_0 + \sum_{m=1}^M G_m e^{-\beta_m t} \quad (6)$$

并假设在增量时间 $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ 内应变率等于常数,从而得到计算 Kirchhoff 应力的递推公式:

$${}^t_n\{S\} = \int_0^{t_n} G(t_n - \tau)[C] \frac{\partial \{\epsilon\}}{\partial \tau} d\tau = G_0[C] \{\epsilon\} + \sum_{m=1}^M \{q_m^n\} \quad (7)$$

式中: $\{q_m^n\} = \int_0^{t_n} [C] G_m e^{-\beta_m(t_n-\tau)} \frac{\partial \{\epsilon\}}{\partial \tau} d\tau$

$$= e^{-\beta_m \Delta t_n} \{q_m^{n-1}\} + \frac{G_m(1 - e^{-\beta_m \Delta t_n})}{\beta_m \Delta t_n} [C] {}^0\{\epsilon_{n-1}\} \quad (8)$$

由 (7)、(8) 式可见, t_n 时刻 Kirchhoff 应力的计算,除了需要知道 t_n 时刻的应变外,只需利用前一时刻 t_{n-1} 的递推量 $\{q_m^{n-1}\}$ 和应变增量 ${}^0\{\epsilon_{n-1}\}$,而与其它离散时刻的量无关。

根据 (7) 式,可以求得增量形式的粘弹性大变形本构方程:

$${}_0\{S_n\} = [D]_0\{\epsilon_n\} - {}_0\{S_n^0\} \quad (9)$$

式中:

$${}_0\{S_n\} = {}_0^{t_{n+1}}\{S\} - {}_0^t\{S\}$$

$${}_0\{\epsilon_n\} = {}_0^{t_{n+1}}\{\epsilon\} - {}_0^t\{\epsilon\},$$

$$[D] = (G_0 + \sum_{m=1}^M \frac{G_m(1 - e^{-\beta_m \Delta t_n})}{\beta_m \Delta t_n})[C],$$

$${}_0\{S_n^0\} = \sum_{m=1}^M \{q_m^n\}(1 - e^{-\beta_m \Delta t_n})$$

4 动力学有限元方程

在增量形式的变分方程 (3) 中, 积分 $\int_{{}_0V} {}_0S_{ij}\delta_0\epsilon_{ij}^0 dV$ 是增量位移的非线性函数。求解时需进行线性化处理。为此, 在增量时间 Δt 内, 取线性近似 ${}_0\epsilon_{ij} \doteq {}_0e_{ij}$, 并将 $\delta_0\epsilon_{ij} = \delta_0e_{ij}$ 和增量本构关系 ${}_0S_{ij} = {}_0C_{ijkl}{}_0e_{kl} - {}_0S_{ij}^0$ 代入, 得线性化的动力学增量变分方程:

$$\begin{aligned} & \int_{{}_0V} {}_0^t S_{ij} \delta_0 e_{ij}^0 dV + \int_{{}_0V} {}_0^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij}^0 dV + \int_{{}_0V} {}_0 C_{ijkl} e_{kl}^0 dV - \int_{{}_0V} {}_0 S_{ij}^0 \delta_0 e_{ij}^0 dV \\ & - \int_{{}_0S} {}_0^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^0 dS - \int_{{}_0V} {}_0^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i^0 dV + \int_{{}_0V} {}_0^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i^0 dV = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

将应力应变与位移的有限元公式代入, 得到增量形式的动力学有限元基本方程:

$$[M]^{t+\Delta t} \{\ddot{\alpha}\} + ({}_0^t[K_L] + {}_0^t[K_{NL}])\{\alpha\} = {}_0^{t+\Delta t}\{R\} + {}_0\{F^0\} - {}_0^t\{F\} \quad (11)$$

式中:

$\{\alpha\}$ —— 节点增量位移

$${}_0\{F^0\} = \int_{{}_0V} {}_0^t [B_L]^T \{S^0\}^0 dV$$

$${}_0^t\{F\} = \int_{{}_0V} {}_0^t [B_L]^T {}_0^t\{S\}^0 dV$$

当采用 Wilson θ 法求解时, 方程 (11) 变为

$$\begin{aligned} & ({}_0^t[K_L] + {}_0^t[K_{NL}] + \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} [M])\{\alpha\} \\ & = {}_0^{t+\theta\Delta t}\{R\} + [M](\frac{6}{\theta \Delta t} \{\dot{\alpha}\} + 2\{\ddot{\alpha}\}) + {}_0\{F^0\} - {}_0^t\{F\} \end{aligned} \quad (12)$$

为了消除线性化引起的误差, 在增量时间内采用修正牛顿法进行平衡迭代, 第 i 次迭代的基本方程为

$$\begin{aligned} & ({}_0^t[K_L] + {}_0^t[K_{NL}] + \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} [M])\{\Delta\alpha\}^{(i)} \\ & = {}_0^{t+\Delta t}\{R\} - {}_0^{t+\theta\Delta t}\{F\}^{(i-1)} - [M]^{t+\theta\Delta t}\{\ddot{\alpha}\}^{(i-1)} \end{aligned} \quad (13)$$

式中:

$${}^{t+\theta\Delta t}_0\{F\}^{(i-1)} = \int_{0V} ({}^{t+\theta\Delta t}_0[B_L]^{(i-1)})^T ({}^{t+\theta\Delta t}_0\{S\}^{(i-1)}) dV$$

$${}^{t+\theta\Delta t}_0\{S\}^{(i-1)} = ({}^t_0\{S\} + [D]_0\{\epsilon\}^{(i-1)} - {}^t_0\{S^0\})$$

5 算 例

鉴于目前尚未见到可资比较的粘弹性大变形动力响应分析资料, 我们计算了以下三个算例, 以考证本文给出的计算方法及其程序的正确性。算例中给出的应力都是 Euler 应力。

(1) 受均布横向载荷的弹性悬臂梁的动力响应

$$L = 25.40 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad h = b = 2.54 \times 10^{-2} \text{ m},$$

$$E = 8.27 \times 10 \text{ MPa}, \quad \nu = 0.2, \quad \rho = 10.69 \text{ kg/m}^3$$

在以上导出的公式中略去材料的粘弹性项, 计算图 1 所示悬臂梁在均布载荷作用下的弹性响应。计算结果示于图 2。由图可见, 本文结果与文献 [9] 的结果吻合较好, 证明了本文给出的方法与程序应用于弹性材料动力响应分析的正确性。

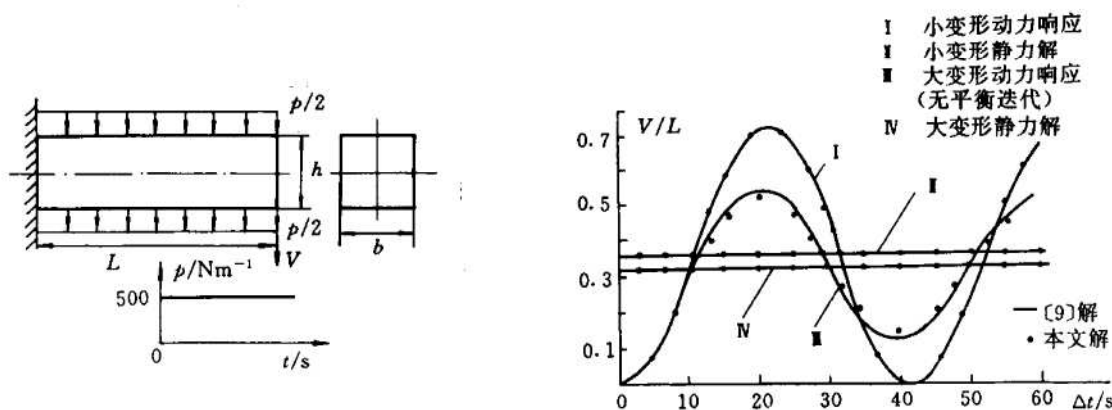


图 1

(2) 有弹性外壳的粘弹性厚壁圆筒在突加内压作用下的静力响应

几何尺寸:

$$a = 5.08 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad b = 10.16 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad h = 0.31 \times 10^{-2} \text{ m}$$

粘弹性厚壁圆筒材料特性:

$$E(t) = 690e^{-0.88889t} \text{ MPa}, \quad \nu = 0.4, \quad \rho = 4.44 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

弹性外壳材料特性:

$$E_e = 20.59 \times 4 \text{ MPa}, \quad \nu = 0.3, \quad \rho_e = 7.82 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

在以上导出的公式中略去惯性项, 计算图 3 所示带有弹性外壳的粘弹性厚壁圆筒, 在突加压力 p 作用下的静态压力分布。计算表明本文结果与文献 [10] 的结果吻合较好, 平均误差小于 5%, 证明了本文给出的方法及其计算程序应用于粘弹性大变形静力分析的正确性。

(3) 有弹性外壳的粘弹性厚壁圆筒在均布压力作用下的动力响应

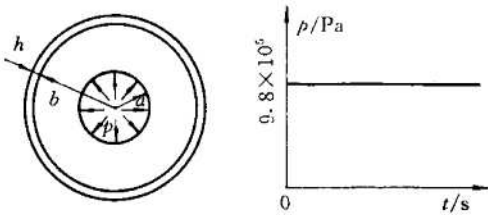


图 3

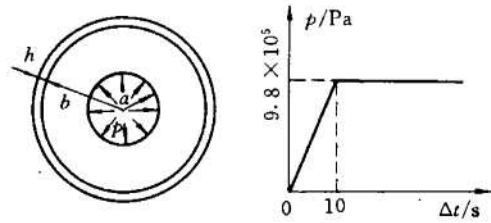


图 4

粘弹性圆筒参数:

$$a = 5 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad b = 20 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad \rho_p = 1.74 \times 10^3 \text{ kg/m}^3,$$

$$\nu = 0.29, \quad G(t) = 0.689 + 68.36e^{-\frac{t}{25.02}} \text{ MPa}$$

弹性外壳参数:

$$h = 0.2 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad \rho_c = 7.82 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \nu_c = 0.3,$$

$$E_c = 20.59 \times 10^4 \text{ MPa}$$

本文采用八节点平面等参元和二十节点立方体等参元分别进行计算, 计算结果示于图 5。由图可见, 二种方法的计算结果比较一致。值得注意的是, 在圆筒内孔附近的环向应力为拉应力, 且随着圆筒半径的减小, 环向拉应力迅速增大。这与实际中裂纹首先出现在圆筒内孔边界上的情况相符。

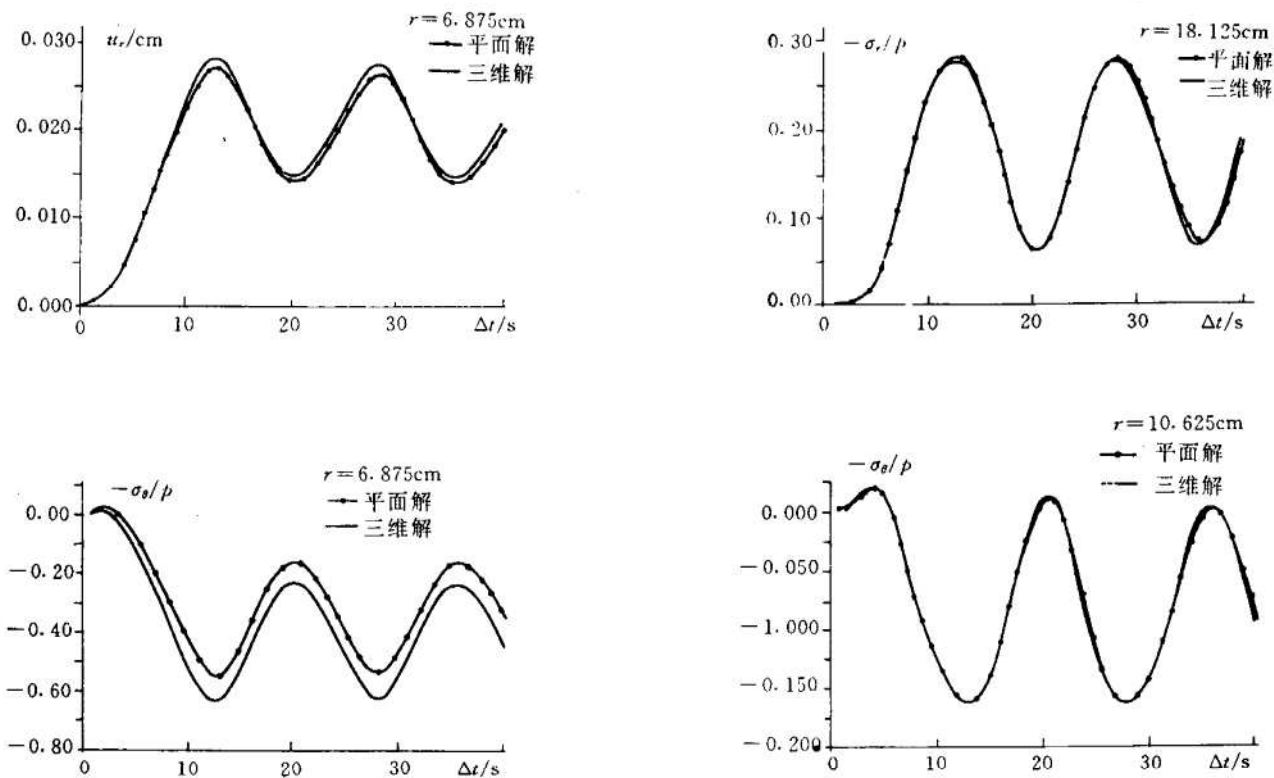


图 5

6 结 论

以上算例的计算结果表明,三维粘弹性大变形动力响应分析方法及其计算程序正确可靠。鉴于本文应用 Prony 级数建立了增量迭代的递推公式,使机器内存与计算量大为减少。此外,本文选择物体的初始构形作为参考构形,并以 Kirchhoff 应力和 Green 应变分别作为应力和应变的度量,不仅使物理的粘弹性大变形虚功方程较为简单,而且免去了在每时步重新计算一次形函数对坐标的导数,从而,提高了计算效率。因此,本文给出的方法可以成功的应用于固体推进剂药柱及其它粘弹性结构的动力响应分析。

参 考 文 献

- [1] Achenbach J D. Dynamic Response of a Long Case-Bonded Viscoelastic Cylinder. AIAA J, 1965, 3 (4)
- [2] Achenbach J D. Dynamic Response of a Viscoelastic Cylinder with Ablating Inner Surface. J Appl Mech, 1966. 6: 275~281
- [3] Huang J C, Huang C C. Free Vibrations of Viscoelastic Timoshenko Beams. J Appl Mech, 1971. 6: 515~521
- [4] 杨挺青, 王胜凯, 黄玉盈. 粘弹性轴对称平面问题的动态响应. 固体力学学报, 1987 (1)
- [5] 吴淇泰, 徐博候, 王泉. 粘弹性结构动力响应的一个计算方法. 计算结构力学及其应用, 1989, 6 (1)
- [6] 孙炳楠, 戚支全. 二维粘弹性结构动力响应的边界元法分析. 上海力学, 1990, 11 (1)
- [7] Swanson S R, Christensen L W. A Constitutive Formulation for High-Elongation Propellants. J Spacecraft, 1983, 20 (6)
- [8] Zak A R. Structural Analysis of Realistic Solid-Propellant Materials. J Spacecraft, 1968, 5 (3)
- [9] Bathe K J, Ramm E, Wilson E L. Finit Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis. Int J for Numerical Methods in Engineering, 1975, 9: 353~386
- [10] 沈亚鹏, 殷家驹, 陈书婵. 基于 Updated Lagrangian 法的三维粘弹性大变形问题的有限元分析. 计算结构力学及其应用, 1987, 4 (2)