

改进的变比热平行混合解析解*

崔 济 亚

(北京航空航天大学动力系, 北京, 100083)

摘 要: 鉴于原平行混合准确解牵动到物理过程一般并不经过的临界温度的比热值, 在变比热情况容易带来不必要误差, 文中推导了只动用总静温、并主要依靠静参数的全套改进解公式。从算例结果看出, 原准确误差很小, 但改进解不仅更为合理, 而且是简明快捷的, 所以是先进的。

主题词: 无粘流, 气动热化学, 计算流体力学, 比热

分类号: V211.3, V433.11

IMPROVED ANALYTICAL SOLUTION FOR VARYING SPECIFIC HEAT PARALLEL STREAM MIXING

Cui Jiya

(Department of Power, Beijing University of
Aeronautics & Astronautics, Beijing, 100083)

Abstract: In view of the fact that the original varying specific heat parallel mixing accurate solution by the author has utilized the critical temperature actually not experienced by the physical process, which possibly introduces unnecessary errors, an improved set of formulae relying mainly on static parameters is hereby derived.

Illustrative examples show that the original accurate solution gives very small errors, yet the improved solution, being not only more rational but also much simpler and quicker, is therefore more advanced.

Keywords: Inviscid flow, Aerothermochemistry, Computational fluid dynamics, Specific heat

符 号 表

k_k 临界温度时比热比

ϵ_v k 组合数 $\epsilon_v = 1 + (k_v - 1) k_k / (2k_v)$

* 本文 1993 年 9 月 15 日收到

k_v 总温到临界平均比热的比热比	ϵ k 组合数 $\epsilon = (k-1)k/(2k)$
k 总温到静温平均比热的比热比	k_T 静温时比热比
$\bar{k}_v$ 总温到临界的等熵指数	ϵ_T k 组合数 $\epsilon_T = (k-1)k_T/(2k)$
$\bar{k}$ 总温到静温的等熵指数	

下标:

h 热气流 c 冷气流 m 混合后气流

1 前 言

在变比热气动函数推导出来之后^[1], 变比热计算平行气流混合, 不仅成为可能, 而且并不困难^[2,3]。但对冷、热及混合气流三者, 准确解各用 5 个 k , 即 k_k 、 k_v 、 k 、 $\bar{k}_v$ 及 $\bar{k}$, 次准确解的后两者分别以无横杠“—”的值顶替, 也仍有 3 个 k , 其中总温到静温平均比热的 k 虽属必需, 而临界温度比热的 k_k 、总温到临界平均比热的 k_v , 均牵动到物理过程、特别是亚音流混合、并不经过的临界温度, 这在变比热并非与温度成线性变化时, 只会带来不必要的误差。基于这一情况, 本文努力发展出一种不牵动临界温度的变比热平行混合解, 其实现显然是合理与先进的, 故拟名为改进解。

2 改进解析解

改进解的特点, 是只用总静温间平均比热的 k 和静温比热的 k_T 、以及综合这二者的组合数^[4]。

$$\epsilon_T = \frac{(k-1)k_T}{2k}$$

并主要依靠马赫数 M 及静参数计算。

给定: 冷、热气流流量 $\dot{m}_c$ 、 $\dot{m}_h$, 总温 T_c^* 、 T_h^* , 总压 p_c^* 、 p_h^* , 热流油气比 gr 及马赫数 M_h (或冷流空气马赫数 M_c)。

求解: 混合后总温 T_m^* , 总压 p_m^* , 马赫数 M_m , 截面积 F_m 。

具体步骤如下:

(1) 据油气比按焓值拟合式^[5]求出冷热气流总焓 i_c^* 、 i_h^* , 按质量及能量守恒得混合流总焓

$$i_m^* = (\dot{m}_c i_c^* + \dot{m}_h i_h^*) / \underbrace{(\dot{m}_c + \dot{m}_h)}_{\dot{m}_m} \quad (1)$$

按混合流油气比

$$gr_m = gr \frac{\dot{m}_h / (1 + gr)}{\dot{m}_c + \dot{m}_h / (1 + gr)} \quad (2)$$

由 i_m^* 求总温 T_m^* (经过迭代)。

(2) 求热流参数: 由文献 4 公式按所设静温 T_h 的 k_{T_h} 、 k_h 迭代到

$$T_h = \frac{T_h^*}{1 + \epsilon_{T_h} M_h^2} = \frac{T_h^*}{1 + \frac{(k_h - 1)k_{T_h}}{2k_h} M_h^2} \quad (3)$$

算出值与所设值符合为止。

按相对压力关系求静压

$$p_h = p_h^* \frac{\pi_{T_h}}{\pi_{T_h}^*} \quad (4)$$

状态方程求密度、速度、截面积分别为

$$\rho_h = \frac{p_h}{R_h T_h} \quad (5)$$

$$C_h = M_h \sqrt{k_{T_h} R_h T_h} \quad (6)$$

$$F_h = \dot{m}_h / \rho_h C_h \quad (7)$$

(3) 求冷流参数：由混合进口静压一致 $p_c = p_h$ 可求相对压力

$$\pi_{T_c} = \pi_{T_c}^* \frac{p_c}{p_c^*} \quad (8)$$

并由 π_{T_c} 迭代求静温 T_c 。密度为

$$\rho_c = \frac{p_c}{R_c T_c} \quad (9)$$

仿 (3) 式求马赫数

$$M_c = \sqrt{\left(\frac{T_c^*}{T_c} - 1\right) / \epsilon_{T_c}} = \sqrt{\left(\frac{T_c^*}{T_c} - 1\right) \frac{2k_c}{(k_c - 1)k_{T_c}}} \quad (10)$$

速度及截面积分别为

$$C_c = M_c \sqrt{k_{T_c} R_c T_c} \quad (11)$$

$$F_c = \dot{m}_c / \rho_c C_c \quad (12)$$

(4) 冲力：热、冷流冲力分别为

$$S_h = \dot{m}_h [C_h + p_h / \rho_h C_h] \quad S_c = \dot{m}_c [C_c + p_c / \rho_c C_c] \quad (13)$$

混合后按冲力守恒为 $S_m = S_h + S_c$ (14)

(5) 混合后参数：设 T_m 仿 (10) 式求马赫数

$$M_m = \sqrt{\left(\frac{T_m^*}{T_m} - 1\right) / \epsilon_{T_m}} = \sqrt{\left(\frac{T_m^*}{T_m} - 1\right) \frac{2k_m}{(k_m - 1)k_{T_m}}} \quad (15)$$

从而求速度

$$C_m = M_m \sqrt{k_{T_m} R_m T_m} \quad (16)$$

$$\text{代入冲力式} \quad S_m = \dot{m}_m [C_m + R_m T_m / C_m] \quad (17)$$

须迭代到与 (14) 式值符合为止。

$$\text{按 } F_m = F_c + F_h \text{ 求密度} \quad \rho_m = \frac{\dot{m}_m}{F_m C_m} \quad (18)$$

$$\text{状态方程求静压} \quad p_m = \rho_m R_m T_m \quad (19)$$

按相对压力比求总压

$$p_m^* = p_m \frac{\pi_{T_m}^*}{\pi_{T_m}} \quad (16)$$

由上可见, 求解过程的简明快捷, 可说是一目了然, 比原准确解清楚得多。

3 算 例

$$\begin{aligned} \text{给定: } \dot{m}_c &= 0.2G \text{ (} G \text{ 为内涵空气流量)} & \dot{m}_h &= (1+gr) & G &= 1.03994G \\ T_c^* &= 483K & p_c^* &= 5.06 \times 10^5 \text{Pa} & T_h^* &= 1443K & p_h^* &= 5.5 \times 10^5 \text{Pa} \\ M_h &= 0.5 \end{aligned}$$

按以上步骤分别以双精度计算了改进解以及原准确解, 结果分列于表 1 中, 括弧内数字表示与改进解的万分差, 即两者之差为改进解值的万分甚至百万、万万分比。

表 1

参 数	改 进 解	准 确 解
k_{k_h}	—	1.2930
k_{v_h}	—	1.2888
k_h	1.2859316337	1.2859316299 (-2.92×10^{-9})
$\bar{k}_{v_h}$	—	1.2891
$\bar{k}_h$	—	1.2862
ϵ_{v_h}	—	1.4449
ϵ_h	—	0.1438
k_{T_h}	1.2869	—
ϵ_{T_h}	0.1431	—
M_h	0.5	0.5
$F_h/G, \text{ m}^2/\text{kg/s}$	0.00247	0.00247 (-1.42×10^{-8})
k_{k_c}	—	1.3953
k_{v_c}	—	1.3919
k_c	1.3888	1.3888 (-1.81×10^{-9})
$\bar{k}_{v_c}$	—	1.3924
$\bar{k}_c$	—	1.3892

续表 1

参 数	改 进 解	准 确 解
ϵ_{v_c}	—	1.1964
ϵ_c	—	0.1953
k_{T_c}	1.3893	—
ϵ_{T_c}	0.1945	—
M_c	0.3295	0.3295 (2.96×10^{-8})
$F_c/G, \text{m}^2/\text{kg/s}$	0.000404	0.000404 (-1.79×10^{-7})
k_{k_m}	—	1.3040
k_{v_m}	—	1.2992
k_m	1.2960	1.2960 (5.62×10^{-7})
$\bar{k}_{v_m}$	—	1.2996
$\bar{k}_m$	—	1.2962
ϵ_{v_m}	—	1.1502
ϵ_m	—	0.1489
k_{T_m}	1.2971	—
ϵ_{T_m}	0.1481	—
M_m	0.4914	0.4916
$F_m/G, \text{m}^2/\text{kg/s}$	0.00287	0.00287 (-3.73×10^{-8})
T_m^*, K	1305.8	1305.8
p_m^*, Pa	5.41044×10^8	5.40909×10^5 (-2.50×10^{-4})

由表可见,原准确解的误差最大也不过万分之几,应该可说是准确的;但改进解不牵动到临界温度的比热及比热比 k ,显然更为合理准确,而且参数少好多,也是清楚简捷的,所以算得上是先进的、改进的。这样有了计算机迭代,算变比热平行混合是并不怎么费事的。

参 考 文 献

- [1] 崔济亚. 变比热气动函数式及计算的准确解和近似解. 工程热物理学报, 1986, 7 (3)
- [2] 崔济亚. 用变比热次准确解算最佳内外函混合. 工程热物理学报, 1987, 8 (2)
- [3] 崔济亚. 平行混合的变比热准确解与次准确解. 推进技术, 1994 (1)
- [4] 崔济亚. 变比热时气动函数式的简化及正冲波解析解. 工程热物理学报, 1990, 11 (2)
- [5] 张世铮. 燃气热力性质的数学公式表示法. 工程热物理学报, 1980, 1 (1)