

三维瞬态导热温度场边界元计算及 一阶数学奇异的处理

徐 雕 黄太平

(南京航空航天大学)

摘 要: 推导了三维瞬态导热温度场边界元解法的积分方程和离散代数方程, 并编制了相应的计算机程序, 采用坐标变换的解析消去法, 处理边界元的一阶数学奇异点, 从而提高了算法的数值精度。用本程序计算了正方体和圆柱环瞬态导热温度场, 数值解与解析解的吻合程度令人满意。

主题词: 边界元法, 导热性, 瞬态温度分布, 计算方法

A BOUNDARY ELEMENT INVESTIGATION OF 3-DIMENSIONAL TRANSIENT HEAT CONDUCTION AND THE TREATMENT OF SINGULARITY

Xu Diao Huang Taiping

(Nanjing Aeronautical Institute)

Abstract: The 3-dimensional transient heat conductions in a cylinder and in a cube are numerically calculated using Boundary Element Method in the present study. To promote the accuracy of scheme, the analytical treatment is introduced to deal with mathematical singularity occurred in Boundary Element Method. Comparing with analytical solutions, the numerical results are quite good.

Keywords: Boundary element method, Thermal conductivity, Calculation method, Transient temperature distribution

1 引 言

导热温度场的数值计算方法较多。边界元方法作为一种积分型数值方法, 可以将区域内

求解转化成边界上求解的问题, 即可以降低控制方程的阶数和维数, 如三维空间问题可以转化成二维曲面边界问题。因而边界元方法具有占用内存少, 计算速度快等优点, 得到了愈来愈广泛地应用。

本文推导了三维瞬态导热温度场边界元解法的积分方程和离散格式, 并计算了正方体和圆柱环瞬态温度场。在处理数学奇异点问题上, 本文采用解析消去法, 提高了算法的数值精度。

2 问题的描述

直角坐标系上三维各向同性物体瞬态温度场可由以下方程描述

$$\begin{cases} \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ T = T(\Gamma_T, t) \\ q = q(\Gamma_q, t) \\ T = T(x, y, z, t_0) \end{cases} \quad (1)$$

其中, T 为温度; $q = \partial T / \partial n$, n 为边界的外法线方向; Γ 为求解域 Ω 的边界, $\Gamma = \Gamma_T + \Gamma_q$ 。

3 边界积分方程

定解问题 (1) 的基本解是满足下列方程

$$\begin{aligned} K \nabla^2 T^*(P, t; Q, \tau) + \frac{\partial T^*(P, t; Q, \tau)}{\partial t} \\ + \delta(P - Q) \cdot \delta(t - \tau) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

的函数

$$T^*(P, t; Q, \tau) = \frac{1}{[4\pi K(t - \tau)]^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{r^2}{4K(t - \tau)}\right] \quad (3)$$

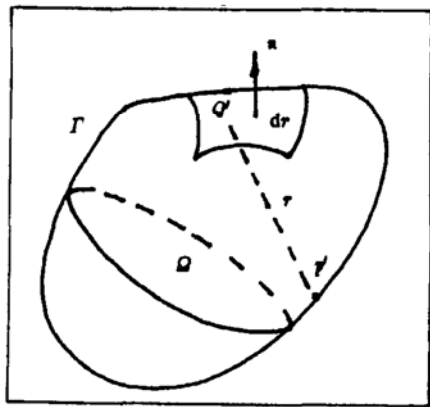


图 1 求解域

其中 P 为观察点, Q 是作用点, r 是两点间的距离, t 和 τ 分别为 P 和 Q 的作用时间。

$$\delta(P - Q) = \begin{cases} 1, & P = Q \text{ 时} \\ 0, & P \neq Q \text{ 时} \end{cases} \quad (4)$$

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t = \tau \text{ 时} \\ 0, & t \neq \tau \text{ 时} \end{cases} \quad (5)$$

应用格林公式, 并在空间和时间域上积分, 得积分方程

$$\begin{aligned}
& T(P, t) + K \int_{\Gamma} \int_{\tau} q^*(P, t; Q', \tau) \cdot T(Q', \tau) d\Gamma(Q') d\tau \\
& - K \int_{\Gamma} \int_{\tau} T^*(P, t; Q', \tau) \cdot q(Q', \tau) d\Gamma(Q') d\tau \\
& = \int_{\Omega} T^*(P, t; Q, t_0) \cdot T(Q, t_0) d\Omega(Q)
\end{aligned} \quad (6)$$

其中 $q^*(P, t; Q', \tau) = \frac{\partial T^*(P, t; Q', \tau)}{\partial n}$ (7)

上标“'”是指在边界上。将求解域的内点 P 移到边界上, 成为 P' , 可得边界积分方程

$$\begin{aligned}
& C(P')T(P', t) + K \int_{\Gamma} \int_{\tau} q^*(P', t; Q', \tau) \cdot T(Q', \tau) d\Gamma(Q') d\tau \\
& - K \int_{\Gamma} \int_{\tau} T^*(P', t; Q', \tau) \cdot q(Q', \tau) d\Gamma(Q') d\tau \\
& = \int_{\Omega} T^*(P', t; Q, t_0) \cdot T(Q, t_0) d\Omega(Q)
\end{aligned} \quad (8)$$

4 边界元离散

三维问题求解域的边界是二维曲面。将边界划分成 n 个小单元, 其中已知 T 的边界有 n_1 个单元, 已知 q 的边界有 n_2 个单元, $n = n_1 + n_2$ 。对于单元 T_i 上的节点 P'_i , 其作用点 Q'_j 在单元 Γ_j 上, 假设在单元上 T 和 q 为常量, 离散边界之积分方程 (8), 可得边界元离散方程

$$\sum_{j=1}^n T_j H_{ij} = \sum_{j=1}^n q_j G_{ij} + B_i \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned}
H_{ij} &= C(P')\delta_{ij} + K \int_{\Gamma_j} \int_{t_0}^t q^*(P', t; Q', \tau) d\tau d\Gamma(Q') \\
G_{ij} &= K \int_{\Gamma_j} \int_{t_0}^t T^*(P', t; Q', \tau) d\tau d\Gamma(Q') \\
B_i &= \sum_{s=1}^m \int_{\Omega_s} T^*(P', t; Q, t_0) \cdot T(Q, t_0) d\Omega(Q_s) \\
\delta_{ij} &= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}
\end{aligned} \quad (10)$$

5 系数矩阵的计算及奇异性的解析处理

假设在时间步长 $\Delta t = t - t_0$ 内, 边界单元上的温度 T 和导热 q 为常数, 解系数 (10) 的时

间积分可解析求出

$$\int_{t_0}^t T^*(P', t; Q', \tau) d\tau = \frac{1}{4\pi Kr} \operatorname{erfc}(a) \quad (11)$$

$$\int_{t_0}^t q^*(P', t; Q', \tau) d\tau = \frac{1}{4\pi Kr^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \cdot \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} a e^{-a^2} + \operatorname{erfc}(a) \right] \quad (12)$$

其中

$$a = \frac{r}{2\sqrt{K(t-t_0)}}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

r 是 P' 与 Q' 间的距离。

5.1 对角线元素

当 $i=j$ 时, P' 是单元 Γ_i 的中心节点, Q' 是同一单元上任意点。在 Γ_i 上求式 (11) 和 (12) 的面积分, P' 和 Q' 会重合在一起, 使 $r=0$, 式 (11) 出现一阶数学奇异, 式 (12) 产生二阶数学奇异, 消除奇异性的方法很多, 如有的方法是数值积分时人为地避开 P' 和 Q' 的重合点, 即人为地避开奇异点。本文认为这种方法人为地回避了 $1/r=\infty$ 这一点, 会使数值计算精度难以掌握, 是不可取的。与其它研究者的方法不同, 本文采用的是解析方法消除 $r=0$ 时的数学奇异。在极坐标上做面积分, 微元面积为 $rdrd\theta$, 代入式 (11), 直接消去了 $1/r$, 然后再求积分, 应该说本文的方法更精确。

$$\begin{aligned} G_{ii} &= \int_{\Gamma_i} \frac{1}{4\pi r} \operatorname{erfc}(a) \cdot d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_i} \frac{1}{4\pi r} \operatorname{erfc}(a) r dr d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r \operatorname{erfc}(a) dr d\theta \end{aligned} \quad (13)$$

H_{ii} 的 $1/r^2$ 阶奇异可以很幸运地消除。在同一平面单元上, $\partial r/\partial n=0$, 所以

$$H_{ii} = C(P') \quad (14)$$

5.2 非对角线元素

$i \neq j$ 时, P' 是单元 Γ_i 的中心点, Q' 是单元 Γ_j 的任意点, 直接将式 (11) 和 (12) 代入系数表达式 (10) 中即可求出 H_{ij} 和 G_{ij} 的数值积分。

$$H_{ij} = - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} a e^{-a^2} + \operatorname{erfc}(a) \right] d\Gamma \quad (15)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{4\pi r} \operatorname{erfc}(a) d\Gamma \quad (16)$$

本文采用七点高斯积分求上面两个积分的数值解。积分不涉及误差函数的计算,本文的做法是,将误差函数展成欧拉级数,用数值方法解欧拉级数,从而大大简化了程序的编制。

6 数值计算

根据以上推导的边界元离散方程和相应的系数方程,编制了瞬态导热温度场边界元数值求解程序,计算了圆柱环和正立方体内的瞬态温度场。

算例1是圆柱环瞬态温度场计算。圆柱环的外径 $R=1$,内径 $r=0.5$,高 $L=1$,初始温度 $T_0=100^\circ\text{C}$,内表面温度 $T_r=50^\circ\text{C}$,外表温度 $T_R=100^\circ\text{C}$,上下表面绝热。数值计算时取无因次时间步长 $F_0=K\Delta t/R^2=0.05$,为验证程序,仍在直角坐标系上求解。图2为圆柱环内瞬态温度场分布。

算例2是正立方体瞬态温度场计算。正立方体的边长 $L=1$,上下前后四个面绝热,左右两个面的温度分别为 0°C 和 100°C ,初始温度 $T_0=100^\circ\text{C}$,时间步长 $F_0=K\Delta t/L^2=0.001$ 。图3为瞬态温度场的数值结果。

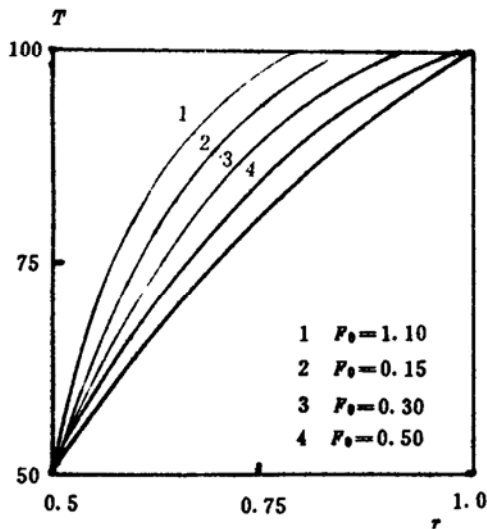


图2 圆柱环瞬态温度场

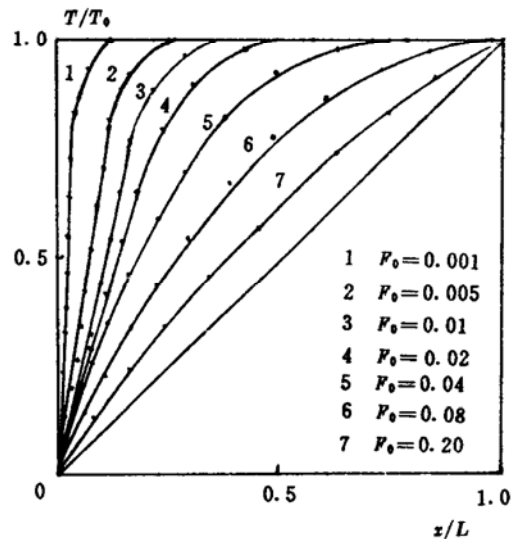


图3 正立方体瞬态温度场

以图2和图3的数值计算结果可以看出,本文的数值解,在 t 增加时逐渐靠近稳态解析解,其吻合程度令人满意。

参 考 文 献

- (1) 班努杰 P K. 工程科学中的边界元方法. 北京: 国防工业出版社, 1988
- (2) 王元淳. 边界元法基础. 上海: 上海交通大学出版社, 1988