

斜喷管收敛段壳体 三维应力场的有限元法计算

孙菊芳 相升海 孙 冰

(北京航空航天大学)

摘 要: 对固体火箭发动机斜喷管收敛段壳体应力场采用有限元法进行了分析和计算。提出了该方法的力学模型、基本公式、基本方法和算例。具有理论意义和工程应用价值。

主题词: 固体推进剂火箭发动机, 应力分布, 斜置喷管, 收敛段, 三轴应力, 有限元法

CALCULATION OF OBLIQUE NOZZLE CONTRACTION SHELLS THREE-DIMENSION STRESS PROFILE BY MEANS OF FINITE ELEMENT METHOD

Sun Jufang Xiang Shenghai Sun Bing

• (Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

Abstract: In this paper, solid rocket moter oblique nozzle contraction shells stress profile is analysed and calculated by means of finite element method. Mechanics model, basic formulas, basic measures and an example to use the method are given, which is significative in theory and applicable in engineering.

Keywords: Solid propellant rocket engine, Canted nozzle, Contractor, Stress distribution, Finite element method

1 前 言

国内外科技工作者, 在应用数值解法计算喷管某个典型零件的应力场方面, 已做了较多工作, 但大都是针对直喷管发动机进行的。人们通常将直喷管简化为轴对称体, 把结构应力场的分析问题作为二维问题来处理。而对于本文所研究的斜喷管收敛段壳体或不对称后封头(如图 1 所示), 应力场的理论预示尚不多见。

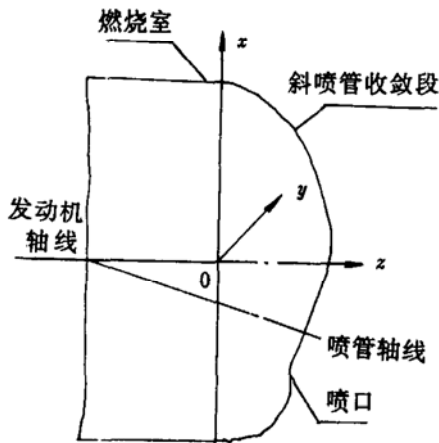


图1 斜喷管收敛段壳体示意图

本文所研究的斜喷管收敛段壳体，从几何形状、喷管工作条件和受力情况来分析，都不能作为二维轴对称问题来处理。因此，理论分析难度较大。本文采用空间单元对其进行三维有限元分析和计算。

该喷管的收敛段(或燃烧室的后封头)为椭球体，如果采用八节点正六面体空间单元，即用直线、直面来近似实际结构的曲线、曲面时，显然误差较大。为了提高计算精度、节省计算机内存，本文采用高精度曲六面体20节点空间等参数单元对求解域进行有限元剖分。

本文所提供的算例，虽然是针对固定喷管的，但所提供的应力场预示理论、基本方法也适用于摆动喷管的研究。

2 三维应力场的理论分析

2.1 基本方程

由弹性理论可知，三维有限元法几何方程写成矩阵形式为：

$$[\epsilon] = [B][\delta] \quad (1)$$

式中：\$[\epsilon]\$ ——应变矩阵； \$[B]\$ ——几何矩阵或应变矩阵； \$[\delta]\$ ——结构的节点位移矩阵。

$$[\epsilon] = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T \quad (2)$$

$$[B] = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad \dots \quad B_{20}] \quad (3)$$

其中子阵

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

上式的形函数 \$N_i\$ 是局部坐标的函数。

当物体具有初应变时, 其物理方程可以写成下列矩阵表达式:

$$[\sigma] = [D]([\epsilon] - [\epsilon_0]) \quad (5)$$

式中: $[\sigma]$ —— 应力矩阵; $[D]$ —— 弹性矩阵; $[\epsilon_0]$ —— 初应变矩阵。

$$[\epsilon_0] = \alpha T [111000]$$

式中: T —— 温度改变值; α —— 材料线膨胀系数。

在不计初应变时, 单元应力的表达式为:

$$[\sigma] = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T = [D][B][\delta]^e \quad (6)$$

2.2 空间单元的形函数

空间单元内任意一点的整体坐标为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\ z &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: x_i, y_i, z_i —— 分别为节点 i 的整体坐标值;

ξ, η, ζ —— 空间单元的局部坐标系。

将 20 节点正六面体单元作为母单元, 通过坐标变换, 就可以得到曲面、曲边实际单元。整体坐标 (x, y, z) 与局部坐标 (ξ, η, ζ) 的关系, 如图 2 所示。

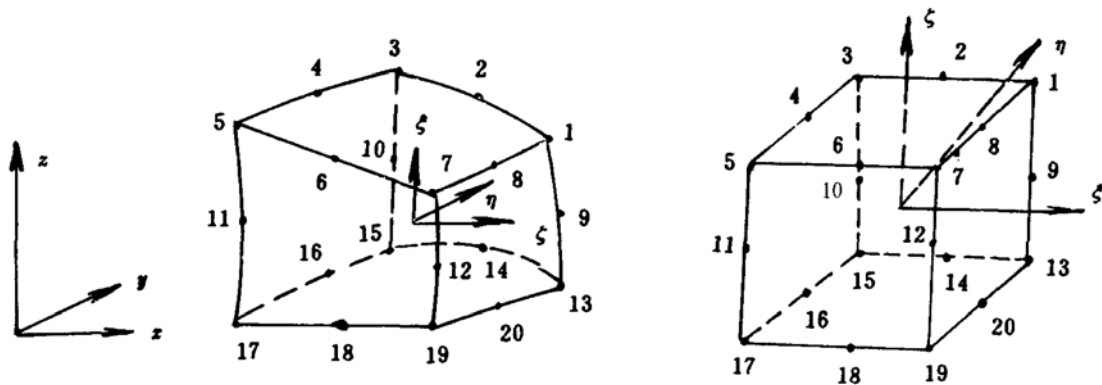


图2 整体坐标与局部坐标关系

单元的位移函数可写成:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i \\ v &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) v_i \\ w &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) w_i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: u_i, v_i, w_i ——分别为节点 i 的实际位移值。空间 20 节点等参数单元的形函数表达式为:

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \frac{1}{8} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \\ &\quad (i = 1, 3, 5, 7, 13, 15, 17, 19) \\ N_i &= \frac{1}{4} (1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \\ &\quad (i = 2, 6, 14, 18) \\ N_i &= \frac{1}{4} (1 - \eta^2)(1 + \xi_0)(1 + \zeta_0) \\ &\quad (i = 4, 8, 16, 20) \\ N_i &= \frac{1}{4} (1 - \zeta^2)(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \\ &\quad (i = 9, 10, 11, 12) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中, $\xi_0 = \xi_i \xi$; $\eta_0 = \eta_i \eta$; $\zeta_0 = \zeta_i \zeta$ 。 ξ_i, η_i, ζ_i 分别为节点 i 在局部坐标系中的坐标值。

形函数 N_i 是局部坐标的函数, 根据复合函数求导的规则, 可以找出整体坐标与局部坐标间的转换关系式:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (10)$$

或写成:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中, $[J]$ 称为雅可比矩阵, 其表达式为:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

2.3 变分原理

弹性体承受广义载荷时, 对于任意一个单元而言, 其泛函表达式为:

$$I^e = \frac{1}{2} \iiint_{V^e} ([\epsilon]^T [D] [\epsilon] - 2[\epsilon]^T [D] [\epsilon_0]) dv - \iiint_{V^e} [u]^T [p] dv - \iint_{A^e} [u]^T [q] dA \quad (13)$$

对于整个求解域而言, 为各单元泛函之和, 即

$$\begin{aligned} I &= \sum_e I^e = \sum_e \left(\frac{1}{2} ([\delta]^e)^T [k]^e [\delta]^e - ([\delta]^e)^T [F]^e \right) \\ &= \frac{1}{2} [\delta]^T [K] [\delta] - [\delta]^T [F] \end{aligned} \quad (14)$$

式中, $[\delta]^e$ —— 单元节点位移列阵; $[\delta]$ —— 结构节点位移列阵;
 $[F]^e$ —— 单元载荷向量; $[F]$ —— 结构载荷向量;
 $[k]^e$ —— 单元刚度矩阵; $[K]$ —— 整体刚度矩阵。

对式 (14) 取极值, 即 $\delta I = 0$, 得到下列线性方程组:

$$[K][\delta] = [F] \quad (15)$$

对上式引入相应的约束条件, 采用适当的求解方法, 即可求得各节点的位移。

2.4 单元刚度矩阵

单元刚度矩阵的表达式为:

$$[k]^e = \iiint_{V^e} [B]^T [D] [B] dv \quad (16)$$

其展开形式为:

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \cdots & k_{1,20} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \cdots & k_{2,20} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k_{20,1} & k_{20,2} & \cdots & k_{20,20} \end{bmatrix} \quad (17)$$

式(17)中各子阵的表达式为:

$$[k_{ij}] = \iiint_{v^e} [B_i]^T [D] [B_j] dv \quad (i, j = 1, 2, \dots, 20) \quad (18)$$

式(18)中 $[B_i]^T [D] [B_j]$ 是简单的矩阵乘法运算。如令:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= a_1, & \frac{\partial N_i}{\partial y} &= a_2, & \frac{\partial N_i}{\partial z} &= a_3 \\ \frac{\partial N_j}{\partial x} &= b_1, & \frac{\partial N_j}{\partial y} &= b_2, & \frac{\partial N_j}{\partial z} &= b_3 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

根据式(4),可以写成:

$$\begin{aligned} [B_{1i}] &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}, & [B_{2i}] &= \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \\ [B_{1j}] &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}, & [B_{2j}] &= \begin{bmatrix} b_2 & b_1 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \\ [B_i] &= \begin{bmatrix} B_{1i} \\ B_{2i} \end{bmatrix}, & [B_j] &= \begin{bmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

为便于数值积分,可将刚度矩阵的体积积分改写为对局部坐标的积分,即

$$\begin{aligned} [k_{ij}]^e &= \iiint_{v^e} [B_i]^T [D] [B_j] dx dy dz \\ &= \iiint_{v^e} [B_i]^T [D] [B_j] dv \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i]^T [D] [B_j] [J] d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (20)$$

上式的积分,可以选用高斯积分法。

3 边界条件的引入

3.1 几何边界条件的引入

收敛壳体与燃烧室壳体相连接,在计算时,认为在发动机轴线方向固定不动,即 $z = 0$ 。

由于斜喷管收敛段对于 xoz 坪面对称的,在计算时利用其对称性,切割椭球体的一半作为计算模型,故在切割面上,也应该固定不动,即 $y = 0$ 。

3.2 物理边界条件

椭球壳体的内壁,处处承受内压,只需将各节点上的压强引入,即可以形成内表面上的

面载荷。

4 计算结果及分析

(1) 需要指出, 由于本文所研究的不对称斜喷管收敛段壳体, 不仅结构不对称, 其内部载荷也不对称, 所以, 计算应力值, 在各单元和节点上也不具有对称性特征, 这不仅给应力场计算带来相当大的困难, 同时也给应力场计算结果的分析, 带来难以直观的困难。

(2) 在求解域的有限元网格中, 靠近与燃烧室壳体连接处的一些单元应力变化比较有规律, 现以轴向应力 σ_z 为例, 对典型单元 (见图 3) 的计算结果, 列于表 1。

表 1 典型单元 σ_z 计算结果

单元号	4	8	12	16
应力 σ_z (MPa)	279.4	229.4	225.0	210.7
单元号	20	24	28	32
应力 σ_z (MPa)	185.9	162.0	177.0	245.0

(3) 将表 1 计算结果绘制成曲线 (如图 4 所示)。由计算结果可见, 在喷口附近相对应的应力值 σ_z 较小, 这种规律符合实际情况或直观认识。

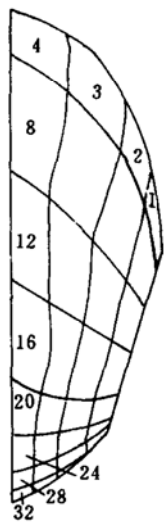


图 3 网格剖分图

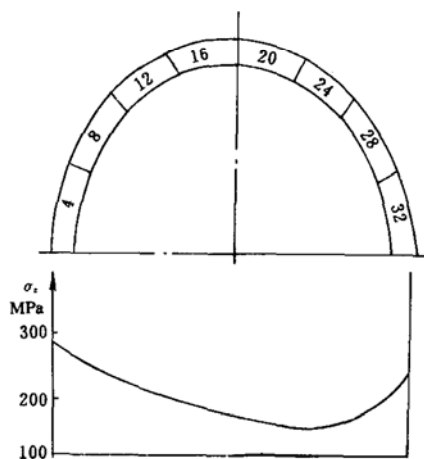


图 4 应力 σ_z 分布图

(4) 为了评估结构的可靠性, 在计算内压载荷时, 取等压强 ($p = 10\text{MPa}$) 沿内壁均匀分布, 其结果是安全的。如果选用性能较好的材料, 其强度极限约为 $\sigma_b = 885\text{MPa}$, 计算结果除喷口附近因应力集中影响和未增加补强, 而局部应力较大外 (约 700MPa), 安全系数均大于 $885/700 = 1.26$, 因此, 可以保证其工作的可靠性。

5 结 束 语

(1) 本文所提供的有限元网格剖分方法, 可以解决畸异单元的出现, 这是本文网格剖分方法的一大特点 (见图 3)。

(2) 本文所提供的算例, 虽然是针对固定斜喷管的, 但所提供的三维应力场理论预示模型, 基本方法对于摆动喷管应力场的研究, 具有参考价值和工程实际意义。

(3) 本文所提供的计算结果 (如图 4) 是可信的, 程序是可靠的。

(4) 计算工作尚需进一步完善, 如考虑变温载荷等。

参 考 文 献

- [1] 孙菊芳主编. 有限元法及其应用. 北京航空航天大学出版社, 1990. 7
- [2] 孙菊芳, 相升海等. 不对称后半球体有限元网格划分原理及程序编制与使用说明. 北京航空航天大学宇航推进研究室科研总结报告, 1991. 9
- [3] 孙菊芳等. 不对称后半球体三维有限元应力分析. 北京航空航天大学宇航推进研究科研总结报告, 1991