1993年12月 推 进 技 术 Dec. 1993
第 6 期 JOURNAL OF PROPULSION TECHNOLOGY No. 6

马赫数3到7的变比热正冲波的改进解析解及近似解

崔 济 亚

(北京航空航天大学)

摘 要：作者提出的变比热正冲波改进解析解，延伸用于马赫数从3到7情况，求出过冲波后全部气动参数，按马赫数间隔为1列表给出。并附列定比热结果误差。同时提出了只取初温到终温平均比热的单比热比 k_{12} 近似解，平行列出结果及误差。

主题词：变比热，正激波，改进解析解，近似解法

IMPROVED ANALYTICAL SOLUTION AND APPROXIMATE SOLUTION OF VARYING SPECIFIC HEAT NORMAL SHOCK WAVES FOR MACH NUMBERS 3 TO 7

Cui Jiya

(Beijing University of Aeronautics & Astronautics)

Abstract: The author first derived varying specific heat gasdynamic functions formulae[1], and applied them to analytical solution of normal shock waves[2]. In view of the physical process of shock wave not including total temperature at all, an improved analytical solution was initiated, including only specific heat ratios k_{T_1}, k_{T_2} for initial and final temperatures and k_{12} for the average specific heat between them, which is simpler, quicker, more rational and accurate[3].

In this paper, the improved solution extends from Mach number 3 to a range of 3 to 7. All parameters after shock are tabulated. The corresponding results and errors of fixed specific heat $k = 1.4$ solution are also shown, which give rapid error increase when M_1 increases.

An approximate solution using single k_{12} is then proposed with the results also

本文1993年2月22日收到，属国家自然科学基金资助项目。

accompanying. In general, the errors are smaller than the fixed specific heat solution, and might thus be accepted in primary evaluations.

The rapid increase of errors of approximate and fixed specific heat solution, however, enlightens a field of vision that at higher Mach numbers, the varying specific heat effect should be carefully distinguished from viscous effects and experimental errors.

Keywords: Varying specific heat, Normal shock wave, improved analytical solution, Approximate solution

1 前 言

作者首次先后提出变比热全套气动函数，并用以求解正冲波[1,2]。随后，鉴于冲波物理过程并不经过总温，又提出不牵动总温而更为合理准确的改进解析解，只需用到初温、终温时的比热比 k_{T_1}、k_{T_2}，以及初温到终温平均比热的比热比 k_{12}[3]，甚为简明迅速。

本文将算例马赫数 M_1 由 3 扩大到从 3 到 7，并给出定比热 k 为 1.4 的误差。此外，又提出只用单比热比 k_{12} 的近似解，并给出其误差，以便为实际应用时选择参考。

2 改进解析解

表 1～5 分别给出空气 $T_1=222\text{K}$（$k_{T_1}=1.4004$），M_1 为 3、4、5、6、7 正冲波双精度计算出的过冲波后全部参数，包括终温 T_2、马赫数 M_2、压比 p_2/p_1、总压系数 σ 及熵增 Δs；至于临界温度 T_k 及其比热比 k_k，只在求速度系数 λ_1，λ_2 时才用，所以并不是必需的。由于所用变比热拟合公式[4]只到 1800K，所以 M_1 为 7 的结果只能作为一般参考。

表中也列出定比热 $k=1.4$ 计算结果，其误差 E 各值注在括弧内，也表示在图 1 中，可看出定比热误差随 M_1 加大而急剧增大。

3 单 k_{12} 近似解

考虑到正冲波物理过程是在温度 T_1、T_2 间进行，很自然地研究按初、终温间平均比热的比热比 k_{12} 为代表计算时近似性如何。单 k_{12} 计算结果也列入表 1 及图 1 中，这单 k_{12} 与改进解析解的 k_{12} 值不同，是因为 k_{T_1} 及 k_{T_2} 也都以单 k_{12} 值代表了。可以看出，总的来说单 k_{12} 解误差比定比热解小，作为节省时间的初步估算，是可以作为近似解的。

至于随着 M_1 加大时，M_2 的误差 E_{M_2} 出现极大值后又略减小，看来是由于在

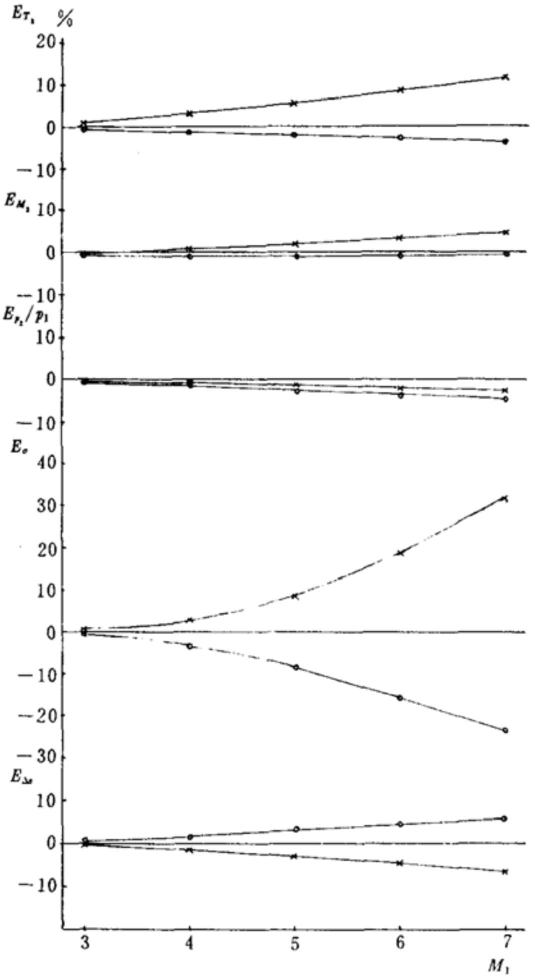
$$M_2^2=\frac{\dfrac{k_{T_1}}{k_{T_2}}M_1^2+\dfrac{2k_{12}}{k_{12}-1}\dfrac{1}{k_{T_2}}}{\dfrac{2k_{T_1}}{k_{12}-1}M_1^2-1}$$

公式中，近似解全部用 k_{12} 顶替 k_{T_1} 及 k_{T_2} 的综合影响。

表 1

$M_1=3.0$

参　数	改进解析解	单 k_{12} 解	定比热 $k=1.4$
k_{T_1}	1.4004		
T_2	590.58	588.55 (−0.34%)	594.74 (0.70%)
k_{T_2}	1.3769		
k_{12}	1.3928	1.3929	
M_2	0.4758	0.4736 (−0.46%)	0.4752 (−0.13%)
不必需 k_k	1.3849		
不必需 T_k	517.18	513.60 (−0.69%)	518.00 (0.16%)
不必需 λ_1	1.9765	1.9724 (−0.21%)	1.9640 (−0.63%)
不必需 λ_2	0.5070	0.5070 (0.52×10^{-6})	0.5092 (0.43%)
p_2/p_1	10.3705	10.3135 (−0.55%)	10.3333 (−0.36%)
$\sigma=p_2^*/p_1^*$	0.3274	0.3252 (−0.65%)	0.3283 (0.30%)
Δs (J/kgK)	320.54	322.41 (0.58%)	319.69 (−0.27%)



×—定比热 $k=1.4$ 解

○—单 k_{12} 近似解

图 1　偏离改进解析解的百分误差随 M_1 变化

4　结　语

随着飞行马赫数增大，定比热解误差也急剧增大，变比热正冲波改进解析解符合准确而简明快速要求；在初步粗估时可用单 k_{12} 近似解。

近似解与定比热解误差随马赫数增大，揭示一个重要视界，即在高马赫数时，应将变比热因素影响与粘性影响及实验误差仔细区别清楚。

表 2

$M_1=4.0$

参数	改进解析解	单 k_{12} 解	定比热 $k=1.4$
k_{T_1}	1.4004		
T_2	874.27	864.56 (−1.11%)	898.41 (2.76%)
k_{T_2}	1.3465		
k_{12}	1.3783	1.3788	
M_2	0.4333	0.4293 (−0.93%)	0.4350 (0.39%)
不必需 k_k	1.3571		
不必需 T_k	767.53	752.26 (−1.99%)	777.00 (1.23%)
不必需 λ_1	2.1853	2.1730 (−0.56%)	2.1381 (−2.16%)
不必需 λ_2	0.4605	0.4602 (−0.09%	0.4677 (1.54%)
p_2/p_1	18.6836	18.3885 (−1.58%)	18.5000 (−0.98%)
$\sigma=p_2^*/p_1^*$	0.1349	0.1304 (−3.31%)	0.1388 (2.87%)
Δs (J/kgK)	575.06	584.72 (1.68%)	566.94 (−1.41%)

表 3

$M_1=5.0$

参数	改进解析解	单 k_{12} 解	定比热 $k=1.4$
k_{T_1}	1.4004		
T_2	1217.94	1192.70 (−2.07%)	1287.60 (5.72%)
k_{T_2}	1.3224		
k_{12}	1.3614	1.3625	
M_2	0.4085	0.4041 (−1.10%)	0.4152 (1.64%)
不必需 k_k	1.3307		
不必需 T_k	1075.01	1039.56 (−3.30%)	1110.00 (3.26%)
不必需 λ_1	2.3309	2.3106 (−0.87%)	2.2361 (−4.07%)
不必需 λ_2	0.4335	0.4328 (−0.16%	0.4472 (3.16%)
p_2/p_1	29.4989	28.6827 (−2.77%)	29.0000 (−1.69%)
$\sigma=p_2^*/p_1^*$	0.0567	0.0517 (−8.83%)	0.0617 (8.89%)
Δs (J/kgK)	823.94	850.48 (3.22%)	799.50 (−2.97%)

表 4

$M_1=6.0$

参　数	改进解析解	单 k_{12} 解	定比热 $k=1.4$
k_{T_1}	1.4004		
T_2	1619.74	1571.18 (−3.00%)	1762.81 (8.83%)
k_{T_2}	1.3069		
k_{12}	1.3463	1.3479	
M_2	0.3917	0.3876 (−1.07%)	0.4042 (3.17%)
不必需 k_k	1.3130		
T_k	1435.28	1373.34 (−4.32%)	1517.00 (5.69%)
λ_1	2.4370	2.4123 (−1.01%)	2.2953 (−5.82%)
λ_2	0.4152	0.4145 (−0.16%	0.4357 (4.93%)
p_2/p_1	42.8254	41.1862 (−3.83%)	41.8333 (−2.32%)
$\sigma=p_2^*/p_1^*$	0.0250	0.0210 (−16.00%)	0.0297 (18.65%)
Δs (J/kgK)	1059.02	1109.05 (4.72%)	1009.92 (−4.64%)

表 5

$M_1=7.0$

参　数	改进解析解	单 k_{12} 解	定比热 $k=1.4$
k_{T_1}	1.4004		
T_2	2080.27	2000.99 (−3.81%)	2324.20 (11.73%)
k_{T_2}	1.2968		
k_{12}	1.3340	1.3358	
M_2	0.3796	0.3759 (−0.97%)	0.3974 (4.67%)
不必需 k_k	1.3011		
T_k	1848.32	1753.97 (−5.10%)	1998.00 (8.10%)
λ_1	2.5168	2.4904 (−1.05%)	2.3333 (−7.29%)
λ_2	0.4021	0.4015 (−0.13%	0.4286 (6.59%)
p_2/p_1	58.6577	55.9008 (−4.70%)	57.0000 (−2.83%)
$\sigma=p_2^*/p_1^*$	0.0116	0.0089 (−23.54%)	0.0154 (32.00%)
Δs (J/kgK)	1278.58	1355.64 (6.03%)	1198.88 (−6.23%)

参 考 文 献

〔1〕 崔济亚．变比热气动函数式及计算的准确解和近似解．工程热物理学报，1986，7（3）
〔2〕 崔济亚．变比热时气动函数式的简化及正冲波解析解．工程热物理学报，1990，11（2）
〔3〕 崔济亚．改进的变比热正冲波解析解．推进技术，1992（6）
〔4〕 张世铮．燃气热力性质的数学公式表示法．工程物理学报，1980，1（1）