

固体药柱的大变形分析

王本华 刘 晓 张 戈

(西北工业大学)

摘 要: 采用物质描述法, 选择初始构形作为参考构形, 导出以 Kirchhoff 应力和 Green 应变表示的粘弹性大变形本构关系和有限元方程, 利用 Total Lagrangian 增量法进行求解, 取得了满意的结果。

主题词: 推进剂药柱, 粘弹性, 变形, 数值解

LARGE DEFORMATION ANALYSIS OF SOLID-GRAIN

Wang Benhua Liu Xiao Zhang Ge

(Northwestern Polytechnical University)

Abstract: Using material formulation method, and choosing initial configuration as reference, the viscoelastic large deformation constitutive relation and the finite element equations denoted by the Kirchhoff stress and Green strain are derived. The equation is solved by use of the Total Lagrangian incremental approach. Satisfactory results are obtained.

Keywords: Propellant grain, Viscoelasticity, Deformation, Numerical solution

1 引 言

国内外众多学者采用不同方法对固体药柱的小变形进行了大量的分析研究^[1~5]。相比之下, 固体药柱大变形的研究显得很不充分。但是, 固体药柱的弹性模量远小于金属材料, 在载荷作用下它的变形通常较大。因此, 用粘弹性大变形理论分析固体药柱的变形是必要的。沈亚鹏等采用 Updated Lagrangian 增量法计算了固体药柱在点火压力作用下的大变形^[6], 本文采用 Total Lagrangian 增量法计算同一问题, 计算结果表明这二种方法对于固体药柱大变形的分析是同等有效的。

2 本构关系

假设固体药柱是均匀的各向同性的线性粘弹性材料, 则其大变形本构关系⁽⁷⁾为

$$\vec{S}_{ij}(t) = \int_0^t \vec{C}_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \vec{\varepsilon}_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1)$$

式中, 二阶张量 $\vec{S}_{ij}(t)$, $\vec{\varepsilon}_{kl}(\tau)$ 分别为相对于物体的初始构形定义的 Kirchhoff 应力张量和 Green 应变张量, 四阶张量 $\vec{C}_{ijkl}(t)$ 为材料的松弛函数。(1) 式的矩阵形式为

$$\{\vec{S}(t)\} = \int_0^t G(t-\tau) [\vec{C}] \frac{\partial \{\vec{\varepsilon}(\tau)\}}{\partial \tau} d\tau \quad (2)$$

式中, $\{\vec{S}\} = (\vec{S}_{11}, \vec{S}_{22}, \vec{S}_{33}, \vec{S}_{12}, \vec{S}_{23}, \vec{S}_{13})^T$

$$\{\vec{\varepsilon}\} = (\vec{\varepsilon}_{11}, \vec{\varepsilon}_{22}, \vec{\varepsilon}_{33}, 2\vec{\varepsilon}_{12}, 2\vec{\varepsilon}_{23}, 2\vec{\varepsilon}_{13})^T$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma} & \frac{2\gamma}{1-2\gamma} & \frac{2\gamma}{1-2\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma} & \frac{2\gamma}{1-2\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{对} & 1 & 0 & 0 \\ & & & & \text{称} & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

将剪切松弛模量 $G(t)$ 表示成 Prony 级数:

$$G(t) = G_0 + \sum_{m=1}^M G_m e^{-\beta_m t}$$

并代入 (2) 式, 则可得到时间步长 $[t_n, t_{n+1}=t_n+\Delta t_n]$ 内的增量本构关系:

$$\{\Delta \vec{S}_n\} = [D] \{\Delta \vec{\varepsilon}_n\} - \{\Delta \vec{S}_n^0\} \quad (3)$$

式中,

$$[D] = (G_0 + \sum_{m=1}^M \frac{G_m(1 - e^{-\beta_m \Delta t_n})}{\beta_m \Delta t_n}) [\vec{C}]$$

$$\{\Delta \vec{S}_n^0\} = \sum_{m=1}^M \{q_m^n\} (1 - e^{-\beta_m \Delta t_n})$$

$$\{q_m^n\} = \int_0^{t_n} [\vec{C}] G_m e^{-\beta_m(t-\tau)} \frac{\partial \{\vec{\varepsilon}\}}{\partial \tau} d\tau$$

$$= e^{-\beta_m \Delta t_n} \{q_m^{n-1}\} + \frac{G_m(1 - e^{-\beta_m \Delta t_n})}{\beta_m \Delta t_n} [\vec{C}] \{\Delta \varepsilon_{n-1}\}$$

$\{\Delta \vec{S}_n^0\}$ 是第 n 个时间增量步长 Δt_n 的应力松弛, 它只需利用已知的前一时间增量步长 Δt_{n-1} 的 $\{q_m^{n-1}\}$ 和 $\{\Delta \vec{\varepsilon}_{n-1}\}$ 即可求出, 可视为初应力。

3 虚功方程

物体相对于初始构形在 $t + \Delta t$ 时刻的虚功方程为

$$\int_{0v}^{t+\Delta t} \vec{S}_{ij} \delta_0^{t+\Delta t} \vec{\varepsilon}_{ij}^0 dv = \int_{0s}^{t+\Delta t} f_i^s \delta u_i^0 ds + \int_{0r}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i^0 dv \quad (4)$$

写成增量形式, 则为

$$\begin{aligned} & \int_{0v} \vec{S}_{ij} \delta_0 \vec{\varepsilon}_{ij}^0 dv + \int_{0v} \vec{S}_{ij} \delta_0 \eta_{ij}^0 dv \\ &= \int_{0s}^{t+\Delta t} f_i^s \delta u_i^0 ds + \int_{0r}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i^0 dv - \int_{0v} \vec{S}_{ij} \delta_0 e_{ij}^0 dv \end{aligned} \quad (5)$$

式中,

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}_0 \vec{S}_{ij} &= {}^t_0 \vec{S}_{ij} + \vec{S}_{ij} & {}_0 e_{ij} &= \frac{1}{2} ({}_0 u_{i,j} + {}_0 u_{j,i} + {}^t_0 u_{k,i} {}_0 u_{k,j} + {}_0 u_{k,i} {}^t_0 u_{k,j}) \\ {}^{t+\Delta t}_0 \vec{\varepsilon}_{ij} &= {}^t_0 \vec{\varepsilon}_{ij} + \vec{\varepsilon}_{ij} & {}_0 \eta_{ij} &= \frac{1}{2} ({}_0 u_{k,i} {}_0 u_{k,j}) \\ {}^t_0 \vec{\varepsilon}_{ij} &= e_{ij} + {}_0 \eta_{ij} & u_i &= {}^{t+\Delta t}_i u_i - {}^t_i u_i \end{aligned}$$

将增量本构关系 (3) 以及线性近似 $\{\Delta \vec{\varepsilon}_n\} = \{\Delta e_n\}$ 代入 (5) 式, 得到矩阵形式的线性化大变形增量虚功方程:

$$\begin{aligned} & \int_{0v} \delta \{\Delta e_n\}^T [D] \{\Delta e_n\}^0 dv + \int_{0v} \delta \{\Delta \eta_n\}^T {}^t_0 \{\vec{S}\}^0 dv \\ &= \int_{0s} \delta \{\Delta u\}^T {}^{t+\Delta t}_0 \{f^s\}^0 ds + \int_{0r} \delta \{\Delta u\}^T {}^{t+\Delta t}_0 \{f^B\}^0 dv \\ &+ \int_{0v} \delta \{\Delta e_n\}^T \{\Delta \vec{S}_n^0\}^0 dv - \int_{0v} \delta \{\Delta e_n\}^T {}^t_0 \{\vec{S}\}^0 dv \end{aligned} \quad (6)$$

4 刚度方程

采用等参数单元, 并以结点位移 $\{u\}$ 和形函数矩阵 $[H]$ 表示 (6) 式中有关各量, 便可得到有限元刚度方程:

$$({}_0^t[K_L] + {}_0^t[K_{NL}])\{\Delta u\} = {}^{t+\Delta t}R + {}_0^t\{F^0\} - {}_0^t\{F\} \quad (7)$$

式中,

$$\begin{aligned} {}_0^t[K_L] &= \int_{\Omega^0} {}_0^t[B_L]^T [D] {}_0^t[B_L] dV & {}_0^t\{F^0\} &= \int_{\Omega^0} {}_0^t[B_L]^T {}_0^t\{\Delta \vec{S}^0\} dV \\ {}_0^t[K_{NL}] &= \int_{\Omega^0} {}_0^t[B_{NL}]^T {}_0^t\{\vec{S}\} {}_0^t[B_{NL}] dV & {}^{t+\Delta t}R &= \int_{\Omega^A} [H]^T {}^{t+\Delta t}\{f^a\} dA + \int_{\Omega^0} [H]^T {}^{t+\Delta t}\{f^b\} dV \\ {}_0^t\{F\} &= \int_{\Omega^0} {}_0^t[B_L]^T {}_0^t\{\vec{S}\} dV & [M] &= \int_{\Omega^0} \rho [H]^T [H] dV \end{aligned}$$

为了消除线性化引起的误差, 本文采用修正牛顿法在每个时间增量步进行平衡迭代。

5 Euler 应力的计算

相对于初始构形定义的 Kirchhoff 应力是一种假想应力, 而相对于现时构形定义的 Euler 应力才是真实应力。因此, 在求得 Kirchhoff 应力之后, 必须把它转换为 Euler 应力。

根据大变形理论, Euler 应力 σ_{ij} 与 Kirchhoff 应力 S_{ij} 之间的关系为

$${}^t\sigma_{ij} = \frac{{}^t\rho}{{}_0\rho} {}_0^t x_{i,k} {}_0^t \vec{S}_{k,l} {}_0^t x_{j,l} \quad (8)$$

式中, ${}^t\rho/{}_0\rho$ 为现时构形与初始构形的质量密度比, ${}_0^t x_{i,j}$ 是现时坐标 x_i 对物质坐标 x_j 的偏导数 (图 1)。(8) 式的矩阵形式为

$${}^t[\sigma] = \frac{1}{\det {}_0^t[X]} {}_0^t[X] {}_0^t\{\vec{S}\} {}_0^t[X]^T \quad (9)$$

式中,

$${}_0^t[X] = \begin{bmatrix} {}_0^t x_{1,1} & {}_0^t x_{1,2} & {}_0^t x_{1,3} \\ {}_0^t x_{2,1} & {}_0^t x_{2,2} & {}_0^t x_{2,3} \\ {}_0^t x_{3,1} & {}_0^t x_{3,2} & {}_0^t x_{3,3} \end{bmatrix}$$

$${}_0^t\{\vec{S}\} = \begin{bmatrix} \vec{S}_{11} & \vec{S}_{12} & \vec{S}_{13} \\ \vec{S}_{21} & \vec{S}_{22} & \vec{S}_{23} \\ \vec{S}_{31} & \vec{S}_{32} & \vec{S}_{33} \end{bmatrix}$$

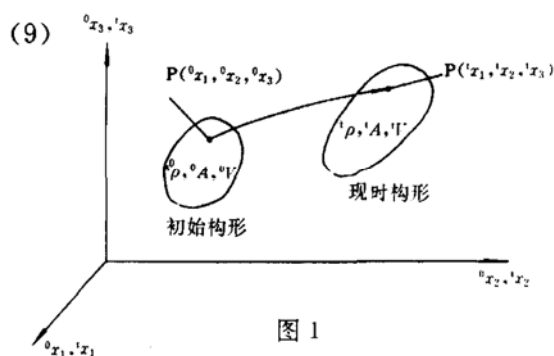


图 1

6 计算结果

按照上述方法, 编程序计算了一个无限长固体火箭发动机药柱在均布内压作用下的应力与应变 (图 2)。药柱的参数为:

$$E(t) = 718e^{-0.88889t}(\text{MPa}); \nu = 0.4。$$

弹性外壳的参数为:

$$E_c = 2.14 \times 10^5(\text{MPa}); \nu_c = 0.3$$

几何尺寸为:

$$a = 5.08\text{cm}, \quad b = 10.16\text{cm}, \quad h = 0.3\text{cm}$$

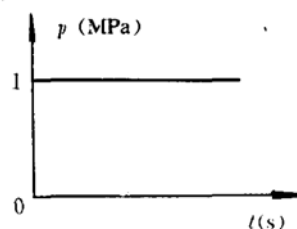


图 2

计算结果由表 1 与表 2 给出。为了比较, 表中同时列出了 Updated Lagrangian 解^[6]。由表可见, Updated Lagrangian 法和 Total Lagrangian 法所得的结果比较接近, 表明这二种方法是同等有效的。

表 1 $(-\sigma_r/p)$

r/b 方 法 $t(s)$	0.5625		0.6875		0.8125		0.9375	
	[6] 解 (U.L. 法)	本文解 (T.L. 法)	[6] 解 (U.L. 法)	本文解 (T.L. 法)	[6] 解 (U.L. 法)	本文解 (T.L. 法)	[6] 解 (U.L. 法)	本文解 (T.L. 法)
0	0.88032	0.90166	0.74099	0.75160	0.66119	0.66690	0.61242	0.61437
0.5	0.89544	0.90697	0.76417	0.76548	0.68895	0.68560	0.64185	0.63606
1.0	0.90061	0.91049	0.77589	0.77479	0.70440	0.69818	0.65963	0.65067
1.5	0.90429	0.91279	0.78429	0.78103	0.71546	0.70664	0.67237	0.66050
1.7	0.90547	0.91347	0.78695	0.78291	0.71899	0.70919	0.67644	0.66347
1.8	0.90600	0.91377	0.78817	0.78374	0.72061	0.71032	0.67830	0.66479
1.9	0.90651	0.91404	0.78932	0.78450	0.72213	0.71137	0.68005	0.66600
2.0	0.90698	0.91429	0.79041	0.78521	0.72357	0.71233	0.68171	0.66713

表 2 $(-\sigma_a/p)$

r/b 方 法 $t(s)$	0.5625		0.6875		0.8125		0.9375	
	〔6〕解 (U.L. 法)	本文解 (T.L. 法)	〔6〕解 (U.L. 法)	本文解 (T.L. 法)	〔6〕解 (U.L. 法)	本文解 (T.L. 法)	〔6〕解 (U.L. 法)	本文解 (T.L. 法)
0	0.03001	0.04059	0.17602	0.17682	0.25839	0.25605	0.30950	0.30690
0.5	0.08908	0.09471	0.22929	0.22328	0.30796	0.29804	0.35661	0.34525
1.0	0.12916	0.13117	0.26519	0.25461	0.34104	0.32637	0.38777	0.37168
1.5	0.15657	0.15574	0.29042	0.27577	0.36453	0.34551	0.41001	0.38954
1.7	0.16496	0.16316	0.29834	0.28216	0.37198	0.35130	0.41709	0.39495
1.8	0.16870	0.16646	0.30192	0.28501	0.37537	0.35388	0.42032	0.39735
1.9	0.17218	0.16950	0.30528	0.28763	0.37855	0.35626	0.42336	0.39958
2.0	0.17541	0.17231	0.30844	0.29007	0.38156	0.35846	0.42623	0.40163

参 考 文 献

- 〔1〕 Woodward W B and Radok J R M. Stress Distribution in a Reinforced Hollow Visco-elastic Cylinder Subjected to Time Dependent Internal Pressure. AD 93836
- 〔2〕 ZAK A R. Structural Analysis of Realistic Solid-Propellant Materials. J. Spacecraft and Rockets, 1968 (5): 270~275
- 〔3〕 White J L. Finite Elements in Linear Visco-Elasticity. AFFDL-TR-68-150, 1968; 489~516
- 〔4〕 Srinatha H R and Lewis R W. A Finite Element Method for Thermoviscoelastic Analysis of Plane Problems. Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., 1981, 25: 21~33
- 〔5〕 王本华. 固体推进剂的热粘弹性有限元分析. 推进技术, 1985 (4): 18~26
- 〔6〕 沈亚鹏等. 以 Kirchhoff 应力张量-Green 应变张量表示本构关系的粘弹性大变形平面问题的有限元方法. 固体力学学报, 1987 (4): 310~319
- 〔7〕 Christensen R M. Theory of Viscoelasticity. New York: Academic Press, 1982